BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE ROMA
8
27 — D
16

Digitized by Google

ARITHMETICA INTEGRA.

Authore Michaele Stifelio.

Exlibris Bibl. Doctrinæ Christianæ Collegii Romani Societ. Jesu

Norimbergæ apud Iohan. Petreium.
Anno Christi M. D. XLIIII.

Cum gratia & priuilegio Cæsareo
atq; Regio ad Sexennium.

Digitized by Google

Arithmeticum scriptum Michaelis Stifelij studiosæ iuuentuti cõmendandum esse duxi, quod cum ad exercitationem proderit, tum uero ad causas præceptionum quærendas plurimum lucis afferet. Bene uale, Vuitebergæ Calendis Ianuarij 1543.

CLARISSIMO VI-
RO D. IACOBO MILICHIO
Doctori Medicinæ, Michael Stifel Pastor
Ecclesiæ Holtzdorfianæ S. D.

SÆpe me conspectus ruris nostri & nemorum, & tranquillitas colonorũ qui mecũ habitant, admonet de ueteri fabula, in qua dicit Astrea pulsa ex magnis ciuitatibus, & Principũ regijs, discessisse in pagos & ad hos cœtus rusticos, & his de Deo, de honestis officijs, de recte factorum præmijs, de scelerũ pœnis, denicp de natura rerum etiam concionata. Hæc ubi uestigia adhuc in rure deprehendo, ualde mihi solitudinis tædiũ minuitur, uidelicet cũ uideo in hoc nostro rure Ecclesiam esse, ac sonare laudes Dei & filij eius dñi nostri Iesu Christi, cũ intueor familias non ambitione, luxu, aut odijs certantes, sed domi puericiã affuefacientes ad agnitionẽ Dei, & scientiam ruris colendi. deinde cum in his nemoribus locum etiam philosophiæ esse uideo. Sicubi pastores Ecclesiarũ amant studia doctrinæ Christianæ, & aliarum bonarum artium. Tale rus mihi simile uidetur illis prædiolis in quibus Sem, Abraham, Isaac, Iacob, & similes uiri uixerunt, quæ nõ solum Ecclesiæ, sed etiam omnium doctrinarum domicilia fuerunt. Delector igitur hoc nostro rure, & Deum precor, ut Ecclesias & doctrinam etiam in his nemo-

nemoribus conseruet. eoq; libentius ipse ad sectionē sacrorum librorū, hæc philosophica studia adiungo, ut exemplū inuitet alios ad studia colenda. Quanq; igitur Ecclesiæ ruris, & hæc nostra studia, & hominū candor ac humanitas in hac solitudine magnæ mihi uoluptati sint, tamen urbanis cōmodis non prorsus carere possumus, præsertim ubi uicina est Academia. iuuat ibi interdū aliquid scisciteri de artibus, necesse est etiam interdū explorari aliarum Ecclesiarum statū meæ Ecclesiæ cōmonefaciendæ causa. Nam de tyrannis nihil sciscitor. Interdū opus est nobis Medicorū consilijs, qua in re & tuam & aliarum humanitatem sæpe sum expertus, & ꝓfiteor gratitudinē me uobis debere, quam ut prestem toto pectore Deum oro, ut ipse beneficia uestra compenset: sicut promisit se amplam mercedem daturum esse omnibus, qui uel potu aquæ frigidæ ministros Euangelij adiuuant. Volui autem edi hunc librum auspicio tui nominis, non solum ut hac commemoratione meam gratitudinem significarem, sed quia non solum in medendo à te adiuuor, sed etiam in hoc toto genere studiorum philosophicorū sæpe tuis eruditissimis sermonibus fruor. Dei beneficio tua opera fideli grauissimo morbo & cruciatu liberata est charissima cōiunx mea, huius tui officij testis est mea uicinia, quod omnium longe fuit mihi gratissimum. Præterea eo etiam nomine plurimum te amo, quòd ad uestram illam Physicen seu Iatricen, hanc nostram doctrinā addis, ipse scio quantum

tum in hac numerandi arte ualeas. Præterea tuæ lucubrationes testantur, quales ꝓgressus in scientia de motibus astrorū feceris. Recte ergo facis qui uniuersam philosophiam cōplecti studes. Cumq; mihi fueris hortator, ut hos libellos, in quibus artis Arithmeticæ mirifica series & ꝓpagatio conspicitur, colligerem & ederem, erit humanitatis tuæ etiam hanc meā inscriptionem boni consulere. Possum autē hoc uere dicere, me dedisse operam, ut multiplicem numerorū doctrinam breuibus regulis & idoneis exemplis cōplecterer, ita ut studiosi etiā sine magistro hanc tractationem percipere possent. Quanq; autem plurimi de Arithmetica libelli extent, & quotidie plures noui gignuntur, ego tamen adhuc nullum uidi qui integrā artem traderet. Complexus itaq; sum non tantum Algorithmos uulgares, proportionum uarietates, progressionum discrimina ac interualla, & reliquas rationalium numerorum passiones, Verum etiam integram tractationem omnium regularum Cossæ, quas Algebræ uocant, & reliquos omnes Algorithmos irrationalium numerorū. Quid autem in uniuersa hac tractatione effecerim iudicabunt studiosi lectores, quibus opto meum laborem esse gratum. Bene Vale, Vuitebergæ ferijs Michaelis 1543.

Sequitur Index Capitum.

INDEX CAPITVM OPERIS HVIVS ARITHmetices Michaelis Stifelij.

LIBRI I.

I. De communi Algorithmo numerorum integrorum & minutiarum. Folio 1
II. De natura & speciebus numerorũ abstractorum. 7
III. De progressionibus Arithmeticis. 19
IIII. De progressionibus Geometricis, & quædam ad Algebram pertinentia. 30
V. De extractionibus radicum. 39
VI. De Proportionibus, & earum Algorithmo. 47
VII. De ꝓportionalitate Harmonica, Contraharmonica, & alijs quibusdam similibus. 55
VIII. De progressione Astronomica, & usu eius. 65
IX. De Musicis progressionibus. 70
X. De numeris uulgariter denominatis, & de praxi Italica. 80
Appendix de regula falsi. 93
De regula Alligationis. 100
De regula quadam Hieronymi Cardani. 101

LIBRI II.

I. De essentia numerorum irrationalium. 103
II. Quid Euclides sẽserit de numeris irrationalib9. 104
III. De definitionibus decimi libri Euclidis. 105
IIII. De speciebus numerorum irrationalium. 109
V. Quid Euclides collegerit ex prædictis speciebus, & ut collectorum illorum usus sit. 111

VI. De Algorithmo medialium. 114
VII. De usu illorũ medialiũ, quorũ Euclides nullam mentionẽ facit in suo decimo: & de duplatiõe cubi. 118
VIII. De proportionibus irrationalibus. 121
IX. De Algorithmo numerorum irrationalium cõpositorum, & tanquam compositorum. 123
X. De Binomijs & Residuis, atq; de eorum radicibus quadratis extrahendis. 127
XI. De Algorithmo minutiarum irrationalium & de probatione quadam huiusmodi Algorithmorum. 132
XII. De surdis radicibus binomiorum & residuorum, & de Algorithmo earum. 134
XIII. De ꝓpositionib9 Euclidis, quibus ipse numeros irrationales abstracte cõsideratos tractasse uidet. 144
XIIII. De propositionibus quibus Euclides utitur tanq; elementis quibusdam ad compositionem suarum tredecim specierum. 152
XV. De propositionibus decimi Euclidis, quas de duplici specie rationalium linearum proposuit. 157
XVI. De propositionibus Euclidis, quas posuit de medialibus lineis, quæ sunt lineæ primæ speciei linearũ suarum irrationalium. 160
XVII. De propositionibus Euclidis quas posuit de secunda specie irrationalium linearum suarum, id est, de binomialibus lineis. 163
XVIII. De propositionibus Euclidis, tractantibus bimediales primas, id est, speciem irrationalium linearum tertiam. 169
XIX. De propositionibus tractantibus bimediales secundas, constituentes speciem irrationalium linearũ quartam. 174
XX. De propositionibus Euclidis tractantibus lineas maiores, quæ constituunt speciem irrationalium linearum suarum quintam. 178

De pro-

XXI. De propositionibus Euclidis tractãtibus lineas potẽtes mediale & rationale: & hæ lineæ cõstituunt speciem irrationalium linearum sextam. 181
XXII. De ꝓpositionibus tractãtibus lineas irrationales septimæ speciei, quæ sunt potẽtes duo medialia. 184
XXIII. De propositionibus tractãtibus residua binomialia, quæ est species octaua irrationalium linearũ. 188
XXIIII. De ꝓpositionibus tractantibus residua bimedialia prima, hæc constituunt speciem irrationalium linearum nonam. 192
XXV. De propositionibus decimæ speciei, irrationalium linearum. 194
XXVI. De lineis minoribus. 195
XXVII. De lineis cõponentibus mediale cum rationali. 198
XXVIII. De lineis cõponentibus mediale cũ mediali. 200
XXIX. De Epilogo decimi libri Euclidis. 202
XXX. De propositionibus quibusdam in decimo Euclidis desideratis. 205
XXXI. De resolutione linearum irrationalium in lineas rationales. 208
XXXII. De numeris irrationalibus contractis ad corpora. Continens omnia illa, quæ liber decimustertius & decimusquartus Euclidis docent. 210
Appendix de Quadratura Circuli. 224

LIBRI III.

I. De regula Algebræ, & de partibus eius, earumq; declaratione. 227
II. De partium regulæ Gebri ostensione, ex figura quadrangulari. 230
III. De Algorithmo numerorum Cossicorum. 235
IIII. De extractione radicum ex numeris Cossicis. 240

V. De numeris cossicis irrationalibus, & eorum Algorithmo: & de numeris absurdis. 246
VI. De perfectione regulæ Algebræ, & de secundis radicibus. 251
VII. De exemplis regulæ Algebræ pertinentibus ad caput primum. 256
VIII. De exemplis regulæ Algebræ pertinentibus ad secundum caput præceptorum. 264
IX. De exemplis pertinentibus ad caput tertium. 273
X. De exemplis regulæ Algebræ pertinentibus ad quartum caput. 277
XI. De exemplis regulæ Algebræ pertinẽtibus ad caput quintum libri huius tertij. 281
XII. De exemplis regulæ Algebræ pertinẽtibus ad caput sextum præceptorum. 292
XIII. Epilogi uice repetit mentionẽ faciens perfectionis regulæ Algebræ, cũ exemplis quibusdam Hieronymi Cardani ad hanc rem pertinentibus. 302
Appendix, ubi autor grauia aliquot exempla Hiero. Cardani exponit. 306

FINIS.

MICHAELIS STIFELII ARITHMETICAE, LIBER PRIMVS.

De communi Algorithmo numerorum Integrorum & Minutiarum. Caput 1.

IGVRIS decem utimur, tanquam necessarijs ad numerorum repræsentationem, uidelicet 1.2.3.4.5.6.7.8.9.0. Et nouem quidem priores, significatiuæ uocantur, Quælibet enim earum significat numerum sui ordinis, sicut eas uides esse positas: ut 7. significat numerum septenarium, sic enim uides eam figuram septimo loco esse positam &c. Decima autem figura nihil uocatur, eo quòd solitarie posita, uel ultimo loco figurarum alicuius numeri, nihil significet prorsus.

Illa autem figura dicitur ultima, quæ fuerit extrema à parte sinistra, in ordine figurarum repræsentantium aliquem numerũ unum. Et illa erit prima, quæ à parte dextra fuerit extrema, ut hic 324. Prima figura est 4. & ultima est 3. At si singulæ figuræ singulos numeros repræsentent, ut hic, 3. 2. 4. erit 3 prima, & 4 reputabitur esse ultima.

De repræsentatione & enunciatione numerorum, hæc breuissima satisfaciunt.

Figura quælibet posita in primo loco alicuius numeri, suã simplicem significationem retinebit. In secundo uero loco posita, significationem suam decuplabit. Et in tertio loco centuplabit, ut hic, 324. Prima, id est 4, significat quatuor. Secũda, id est 2, significat uiginti, id est decies 2. Tertia uero, id est 3. significat trecenta, id est centies 3. Et sic de alijs. Ex quibus iam uide

BIBLIOTECA NAZ. ROMA

quid faciat figura nihili (quam etiam cifram uocant) scilicet locum occupat, ut hic 304. facit ultimam figuram, id est 3. significare trecenta, quæ sine cifra (ut hic 34) solum significaret triginta &c.

Iam si magnus tibi propositus fuerit numerus, id est, qui multas habeat figuras, tu ordinem figurarum partire in membra, ita ut quodlibet membrum habeat tres figuras, nisi forte ultimo membro desit una aut altera, ut in hoc exemplo factum uides.

2 3 2 9 0 8 9 5 6 2 8 0 0.

Vides hic tredecim figuras, & ordinem ipsum uides esse partitum in membra quinq;. Quodlibet enim punctum, significat primam figuram, noui membri, esse illam cui supraponitur. Vnde ultimum membrum, id est, extremum à parte sinistra, uides solummodo unam habere figuram hanc 2.

Membrum autem quod in signatione punctorum fuerit ultimum, in enunciatione erit primum.

Membrum autem quodlibet integre recipiatur, ut enuncientur figuræ eius simul, ut iam audies.

Primum itaq; membrum enunciandum, est 2. facitq; duo millia, millies, millies, millies.

Sequitur 329. facitq; trecenta uiginti nouem millia, millies. millies.

Sequitur 089. facitq; octuaginta nouem millia, millies.

Sequitur 562. facitq; quingenta sexaginta duo millia.

Sequitur demum primũ membrum, quod in enunciatione ultimum est, uidelicet 800, facitq; octingenta.

Satis autem uides, ut uocabulum (millies) repetitam, iuxta numerum punctorum sequentiũ illud membrum quod enunciatur.

DE ADDITIONE.

PEr additionem efficies unum numerum ex duobus aut pluribus, ut hic, ex duobus supra lineam positis, factus est unus infra lineam positus.

2329089562800
406143248 0
2333150995280.

In Additione, Subtractione, & Multiplicatione ponimus (ut uides) primas sub primis figuris, & secundas figuras sub secundis &c. Incipimusq; operationem à primis, ut hic in Additione, addo 0 ad 0. & fit 0. id quod pono sub linea, sub primis figuris. Deinde 0 & 8. facit 8. Tertio 8 & 4. faciunt 12. id est, numerum duabus figuris scribendum. Pono ergo primam earum id est 2. & reseruo alteram, addendam sequentibus. Vt dum quarto loco dico 2 & 2. faciunt 4. addo unitatẽ reseruatam, atq; ita fiunt 5. quæ scribo. Et sic de alijs. Faciliora hæc sunt quàm ut pluribus egeant uerbis.

DE SVBTRACTIONE.

SVbtractione fit, ut, dum unus numerus subtrahitur ab alio, sese maiore, uideas quantum relinquatur, ut hic. Secundus numerus subtractus à primo, relinquit tertium, qui sub linea ponitur.

2333150995280
2329089562800
406143248 0

Primo subtrahens 0 ab 0. relinquo 0. & pono 0. sub primis figuris. Secundo subtraho 0 ab 8. & manent 8. quæ pono sub secundis figuris. Tertio, dum uolo subtrahere 8 à 2. non possum, tanquam maius à minore. Dico ergo 8 à 12. remanent 4. quæ scribo sub tertijs. Denarium autem mutuo accepi à sequenti figura quinaria. Restat ergo, ut quarto loco dicam, 2 à 4. (non à 5. nam unitas mutuo accepta fuit à 5. ut iam solum 4 remanent) remanent 2. quæ scribo. Et sic de alijs. Vter autem maior numerus sit inter duos numeros, facile iudicabis ex ultimis eorum figuris.

DE MVLTIPLICATIONE.

MVltiplicatio, est inuentio numeri continentis multiplicandum, quoties multiplicans continet unitatem, ut in hoc exemplo. Infimus ordo est summa multiplicationis, quæ cõtinet supremum, id est multiplicandum, quoties multiplicans, id est secundus, continet unitatem.

```
1492920
1560090
-------
13436280
8957520
 746860
 149292
-------
2329089562800
```

Et illi ordines, qui ponuntur inter multiplicantem & summam multiplicationis, id est, inter duas lineas, proueniunt ex multiplicatione figurarum numeri multiplicantis, in multiplicandũ. Nam quælibet figura significatiua, numeri multiplicantis, multiplicatur in totum numerum multiplicandum, atq; ita quælibet earum constituit proprium ordinem, cuius ordinis prima figura stet sub sua multiplicante.

Summa autem multiplicationis, fit ex additione illorum ordinum prædictorũ, ex multiplicatione factorũ. Et quia utriq; numero, uidelicet multiplicando & multiplicãti, præponitur cifra, ideo duas cifras illas simpliciter rescripsi, præposuiq; summæ aggregatiõis collectæ ex ordinibus prædictis. Scilicet 156009. in 149292. Facit 23290895628. At 1560090 in 1492920. Facit hunc numerum sequentem 2329089562800.

Non etiam opus est (si obserues quæ dixi) ut reliquas cifras in multiplicante cures. Nam cum cifra nihil producat nisi cifrã, siue multiplicet siue multiplicetur, nullum faciet, cifra aliqua multiplicantis numeri, ordinem.

Inter multiplicandum autem (dum uidelicet figura multiplicatur in figuram) excrescentis numeri, qui duabus figuris scribitur,

bitur, primam figuram scribe, & secundam reserua (ut in Additione simile habes). Exempli gratia: Multiplico primo (in dato exemplo) 9 in 2. facit 18. Pono 8. & seruo 1. Deinde 9 in 9. faciunt 81. addo 1 prius reseruatam, fiunt 82. Scribo igitur 2. & reseruo 8. & sic in similibus.

¶ Regula multiplicationis figuræ in figuram.

Primo. Subtrahe utranq; figuram à 10. & multiplica relicta inter se, & dabit tibi hæc multiplicatio, primã figuram summæ quã quæris. Si autẽ ex multiplicatiõe illa excreuerit numerus duabus figuris scribendus, scribe primam, & reserua secundam, ut eam addes ad figuram secundam summæ quam quæris.

Secundo. Figuras tuas adde, & dabit tibi hæc additio secundam figuram summæ quam quæris. Si autem ex additione illa excreuerit numerus duabus figuris scribendus, scribe primam, & abijce secundam, tanquam inutilem ad rem hanc. Exempla.

Vt septies octo faciunt 56.	Item septies sex faciunt 42.
8. 2	7. 3
7. 3	6. 4
5 6.	4 2.

DE DIVISIONE.

Diuisio est inuentio numeri toties continentis unitatem, quoties numerus diuidendus continet diuidentem, seu diuisorem. Dicitur autẽ numerus inuentus Quotiens, notaturq; huiusmodi uirgula curua (. ut in exemplo uidebis.

¶ Modum diuisionis tibi tribus literis dabo his Q.M.S.

Expositio harum trium literarum.

Primo Q, hoc est Quære, uidelicet quoties diuisor inueniatur in sibi suprapositio.

Secundo M, hoc est Multiplica, uidelicet figuram quotientis inuentam, in totum diuisorem.

Tertio S, hoc est Subtrahe, uidelicet productũ multiplicationis ab illo quod diuisori supraponitur.

Ponẽ igitur diuisorem sub diuidendo, ita ut ultima unius sit sub ultima alterius. Vt uolo diuidere 232908956280. p 149292 Sic pono diuisorem sub diuidendo &c.

```
  83616
  232908956280 (1
  149292
```

Sic itaq; utor literis prædictis Q. M. S.

Primo, quæro quoties 149292 inueniatur in 232908. Et inuenio quòd semel. Pono igitur 1 ad uirgulam curuam, tanquã figuram quotientis.

Secundo, Multiplico figuram quotientis inuentam, in diuisorem totum, nisi quòd unitas nihil mutat sua multiplicatione, manet ergo diuisor.

Tertio, subtraho multiplicationis summam, ab eo quod diuisori supraponitur, id est, subtraho 149292 ab 232908. Remanet residuum 83616, ut uides in figura superiori. Atq; ita expeditus est diuisor semel, inuenta unitate pro figura quotientis. Restant autem in numero diuidendo adhuc figuræ sex, ultra residuum, uidelicet 956280. Vnde pro numero harum sex figurarum, sexies innouandus erit diuisor, & per singulas illas figuras erit mouendus, quemadmodum uidebis in exempli prosecutione. Et in qnalibet motione seu innouatione diuisoris, ueniunt utendæ prædictæ literæ Q. M. S. eo uidelicet modo, ut dixi paulo superius.

¶ Prima innouatio diuisoris post sui primã positionẽ.

```
   8970
  83616
  232908956280 (15
  149292
      5
 ------
  746460
```

Primo inuentus est diuisor contineri in suo supraposito (id est in 836169) quinquies,

Secundo

Secundo ergo multiplicata sunt 5 in diuisorem:

Tertio subtracta summa multiplicationis, remansit residuum 89709.

¶ Secunda innouatio diuisoris post sui primã positionẽ.

```
        13
      89784
    8384893
  783989956280  (156
    149292
         6
  ---------
    895752
```

Primo, Quæro, & inuenio 6.

Secundo, Multiplico, & facio 895752.

Tertio, Subtraho & relinquo 1343.

¶ Tertia innouatio diuisoris.

```
        13
      89784
    8384893
  783989956280  (1560
    149292
```

Vides ut diuisorem ne semel quidem inueniam in suo suprapositio, ideo posita cifra ad quotientem, continuo ut innouem diuisorem iterum pergo.

¶ Quarta innouatio diuisoris.

```
        13
      89784
    8384893
  783989956280  (15600
    149292
```

Et ne hic quidem semel haberi potest diuisor, in eo quod sibi supraponitur, ideoq; iterum pono cifram in Quotientem, & pergo innouare diuisorem continuo. Cifra enim nihil facit multiplicando, ideo tribus literis prædictis hic non egeo.

Quinta

¶ Quinta diuisoris innouatio, & hic rursum utor Q.M.S.

```
                13
             899804
          83681893
      23299889956280  (156009
          14929992
                 9
-------------------
          1343628
```

Primo inuenio diuisorem in suo suprapositio nouies.
Secundo multiplico 9 in diuisorem.
Tertio subtraho productum à suprapositio diuisoris, & nihil relinquo.

¶ Sexta diuisoris innouatio.

Quamuis nulla iam sit opus innouatione, cum omnino nihil sit relictum. Simpliciter ergo ponenda est o ad quotientem.

```
              156
             899804
          83681893
      23299889956280  (1560090.
          14929992
```

Vides ut diuisor non possit amplius haberi in suprapositio, omnino expedito & deleto. Pono ergo cifram, ut dictum est.

¶ Sequitur Algorithmus Minutiarum.

QVando in diuisione numeri per numerum, relinquitur aliquid in residuo (ut si 15 diuidantur per 4. remanēt in residuo 3) tunc nascitur Minutia. Nam hoc quod remanet, erit numerator: & diuisor ipse, erit denominator Minutiæ.

Item, quando numerus minor occurrerit diuidendus per numerum maiorem, tunc ex ratione eadem nascitur Minutia, ut 3 diuisa per 4. faciunt $\frac{3}{4}$.

Constat ergo Minutia ex numeratore & denominatore, & ponitur numerator supernè, denominator uero infernè ponitur. Interiicitur q; uirgula, ut discrimen faciat inter minutiam & proportio-

portionem. Nam quando duo numeri adinuicem proportionaliponuntur ad regulam additionis uel subtractionis proportionum (ut infra dicam suo loco), ponitur etiam unus eorum superne, & alter ponitur inferne, & non debet uirgula interponi, ut intelligas esse duos numeros, non unum. At Minutia cum numeratore & suo denominatore proprie est unus numerus, ut iam dicam.

Numerator Minutiæ, est qui numerat partes unius, alicuius rei integræ, diuisæ in partes.

Denominator Minutiæ, est qui denominat partes numeratas à numeratore, ipse autem nihil numerat.

Vnde sicut, dum dico 3 gr. 3 est numerus, & gr. est denominatio ipsius numeri, nihil numerãs, sed solummodo denominãs. Sic dum dico $\frac{3}{4}$. tunc 3 est numerus, & 4 est denominatio eius, & non est proprie numerus ipse denominator.

Est autem pronunciatio Minutiarum admodũ facilis, quemadmodum & earum repræsentatio, ut $\frac{3}{4}$. sunt tres quartæ. Item $\frac{13}{60}$. sunt tredecim sexagesimæ, unius rei diuisæ in partes sexaginta, inter se æquales. Vel $\frac{3}{4}$ dicitur ternarius diuisus per 4. uel diuisus in partes 4. Vnde $\frac{1}{4}$ est quarta pars ternarij, & sic de alijs.

De Additione & Subtractione Minutiarum.

DEnominatores Minutiarum magnam similitudinem habent cum denominationibus numerorum realibus. Vnde cum denominatores Minutiarum addendarum, fuerint inter se æquales (ut hic $\frac{3}{10}$. $\frac{4}{10}$) tunc numeratores ad se adduntur, & denominator communis simpliciter illi aggregato supponitur, ut $\frac{3}{10}$ ad $\frac{4}{10}$. facit $\frac{7}{10}$. Sic 3 gr. ad 4 gr. facit 7 gr. Vide certe, bona similitudine, rationem additionis Minutiarum.

Sic in Subtractione, dum denominatores fuerint inter se æquales, subtrahitur numerator à numeratore, & relicto supponitur denominator communis, ut $\frac{3}{10}$ à $\frac{4}{10}$. manet $\frac{1}{10}$. Item $\frac{3}{10}$ à $\frac{7}{10}$. remanent $\frac{4}{10}$. Sic (ut uideas rationem ex similitudine) 3 gr. à 7 gr. remanent 4 gr. &c.

¶ De inæqualitate denominatorum.

Sed si denominatores Minutiarum fuerint inæquales inter se, tunc reducendi erunt ad æqualitatem, aliàs non recte poterit fieri uel Additio uel Subtractio. Patet hoc ex similitudine superius data. Neq; enim recte addis 3 gr. ad 4 §. Si dicas, 3 gr. & 4 § facere 7 gr. aut 7 §. Sed oportet ut reducas inæqualitatem denominationum, ad æqualitatem. Vt si ex 3 gr. feceris 36 §. tunc recte dixeris 36 § & 4 §. facere 40 §. Aut si ex 4 § feceris $\frac{1}{3}$ gr. Tunc recte dixeris 3 gr. & $\frac{1}{3}$ gr. facere $3\frac{1}{3}$ gr. Idem de Subtractione intellige: Si enim 4 § subtrahas à 10 gr. non remanebunt 6 gr. aut 6 §. Sed reducenda est inæqualitas denominationum, ad æqualitatem, manente ualore & proportione priore in rebus denominatis.

¶ Est autem regula, ex 17 & 18 propositionibus septimi Euclidis sumpta, qua facile quaslibet duas minutias inæqualium denominatorum, reducere possis ad æquales denominatores, manente in utraq; Minutia, priore ualore.

¶ Sic autem habet regula.

Multiplica Minutias in cruce, tunc producuntur numeratores. Deinde multiplica denominatores inter se, tunc producitur denominator communis. Vt.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$. facit $\frac{8}{12}$ & $\frac{9}{12}$.

Vnde $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$. faciunt $\frac{17}{12}$. id est $1\frac{5}{12}$.

Subtractæ autem $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{4}$. relinquunt $\frac{1}{12}$.

Ratio regulæ huiusmodi reductionis satis patet ex propositionibus Euclidis prædictis, id est, ex 17. & 18 septimi. Scilicet $\frac{2}{3}$ multiplicantur eodem numero, uidelicet quaternario, & fiunt $\frac{8}{12}$. Sic $\frac{3}{4}$ multiplicantur uno & eodem numero, uidelicet ternario, & fiunt $\frac{9}{12}$. Quando autem uterq; terminorum Minutiæ, uno & eodem numero multiplicatur, tunc non uariatur ualor eius, neq; proportio, quæ est inter terminos ipsos, mutatur &c.

De

De Multiplicatione Minutiarum.

Vera Multiplicatio numerorum denominatorum, requirit non solum numeratorum multiplicationem inter se, sed etiam denominatorum multiplicationem inter se. Omnis autem Minutia est numerus denominatus, ut infra Cap. 2. dicam. Facilis igitur est regula multiplicationis Minutiarum, & breuis. Scilicet.

Multiplica numeratores inter se, & proueniet numerator producta summæ. Multiplica etiam denominatores inter se, & proueniet denominator productæ summæ.

Vt $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$. Facit $\frac{6}{12}$. seu $\frac{1}{2}$, ut infra dicam.

Quid autem fiat in multiplicatione numerorum, uulgariter denominatorum, dicam suo loco.

Quòd autem multiplicatio denominatorum, requirat etiam denominationum multiplicationem, liquido patet ex Cossicis numeris, de qua re etiam suo loco dicam.

De Diuisione Minutiarum.

Ego Diuisionis regulam reduco ad regulam Multiplicationis Minutiarum, hoc modo: Diuisoris terminos commuto, id est, numeratorem pono sub uirgula, & denominatorem supra uirgulam pono. Hoc facto, nihil aliud restat, nisi ut operaris iuxtã regulam Multiplicationis superius datam.

Vt uolo diuidere $\frac{1}{2}$ per $\frac{2}{3}$. Sic stabit exemplum ad regulam. $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$. facit $\frac{1}{4}$ quotientem.

Sic si uelim diuidere $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$. Sic stabit exemplum $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{1}$. facitq; hunc quotientem $\frac{4}{3}$. seu $1\frac{1}{3}$. Et sic de alijs.

Et ego noui quàm commode fiat hæc regulæ Diuisionis reductio, & quàm sæpe memoriam leuet, præsertim in operationibus exemplorum secundum Algebram fiendorum.

Sed ut rationem Diuisionis Minutiarum aliquam uideas, uolo tibi exemplum ad hanc rem commodum tradere. Scilicet uolo diuidere $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{4}$. Facit autem quotiens diuisionis 2. Sed si miraris quotientem esse maiorẽ cũ sit minutia diuidẽda,

cogita quotientes diuisionum plerumq; esse aduerbiales, & fieri nominales, ut (exempli gratia) dum diuido $\frac{1}{2}$ per $\frac{1}{4}$. tunc inquiro quotiens $\frac{1}{4}$. contineatur in $\frac{1}{2}$. Non autem est obscurum quod $\frac{1}{4}$ cõtineatur bis in $\frac{1}{2}$. Est ergo Quotiens illius diuisiõis aduerbialis, quem nihilominus signo figura binarij &c.

De Minutijs plura dicam suo loco. Proderit tamen si hic etiã nonnulla de Minutijs dicam ulterius.

1. Quando Minutiæ numerator maior fuerit quàm denominator, tunc diuide numeratorem per denominatorem, si commodum uisum fuerit, ut uideas integrum uel integra. à Minutia separatim, ut $\frac{16}{8}$ facit $4\frac{1}{2}$. Sic $\frac{16}{12}$ facit 3. Sic $\frac{8}{8}$ facit 1. & sic de alijs

2. Fit nonnunquam ut commodum sit integrum uel integra frangere, at ita ex integris & Minutia componere unã Minutiam. Sed de hac re paulo inferius ostendam rationem integri alicuius Algorithmi, idq; breuissimis.

3. Cum inueniantur Minutiæ frangi, nõ inutile erit, ut de his rebus etiam dicam. Dicam autem de his, id est, de Minutijs minutiarum, paulo inferius, breuissimis etiam ostendens rationem integri cuiusdam Algorithmi.

4. Fit nonnunquam ut Minutia ponatur sub terminis magnis, duplici uidelicet incommodo, quæ commode posset poni sub terminis paruis, ut $\frac{16}{72}$ incommode sic ponitur. Commode autem sic ponitur $\frac{1}{2}$. Neq; enim $\frac{16}{72}$ aliquid aliud significat quàm dimidiam partem rei alicuius.

Cum aũt $\frac{16}{72}$ significet id quod $\frac{1}{2}$, & quilibet homo facilius uideat atq; intelligat qd sit $\frac{1}{2}$. quàm quid sit $\frac{16}{72}$, facilioráq; quælibet operatio fiat per $\frac{1}{2}$, quàm per $\frac{16}{72}$. non erit inutile ostendere, qua ratione quælibet minutia reponatur in terminos suos proprios seu minimos.

¶ Regula ex 1. & 2. Septimi Euclidis.

Recipe numeratorem & denominatorem tuæ Minutiæ, tanquam duos numeros integros, & diuide maiorem per minorem. Deinde reiecto quotiẽte iterum diuide, uidelicet diuisorem prioris

oris diuisionis per residuum. Et sic deinceps semper diuisorem proximæ diuisionis diuide per residuum, donec occurrat diuisor qui nullum relinquat residuum. Et talis diuisor semper est maxima mensura, quæ reponat & numeratorem & denominatorem Minutiæ tuæ in terminos proprios seu minimos, ut $\frac{126}{504}$ facit $\frac{4}{11}$.

¶ Vel sic operare.

Diuide utrunq; terminum tuæ Minutiæ per numerum aliquem numerantem utrunq;. Et hoc fac toties, donec Minutia stet in propriis suis terminis, ut $\frac{6}{154}$ diuide p̄ 2. fit $\frac{3}{77}$. Deinde per 3. fit $\frac{1}{25}$. Eadem enim proportio manet inter terminos tuæ Minutiæ, idemq; ualor, siue diuidas utrunq; terminum per unum aliquem numerum, siue multiplices. Et est 18 septimi Euclidis.

¶ De Algorithmo integrorum cõmissorũ cũ Minutijs.

Integro numero suppone unitatem interiecta uirgula, tũc ex integro numero feciſti Minutiam. Operare igitur iuxta regulas Minutiarum, & nulla opus erit propria regula aut proprio Algorithmo.

¶ De Algorithmo Minutiarũ ex alijs Minutijs.

Minutias Minutiarum sic repræsentari debent, ut à simplicibus Minutijs possint discerni ut

Tres quartæ, duarum tertiarum, $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}$

unius septimæ, sic repræsententur. $\frac{1}{7}$

¶ Idem autem faciunt hæ Minutiæ Minutiarũ singulæ.

$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{7}}$ $\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{7}}$ $\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{4}}$ $\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}$ $\frac{1}{7}$

Patet hoc ex regula reductionis huiusmodi Minutiarum, qua uidelicet reducuntur ad simplices Minutias.

¶ Regula hæc est.

Multiplica numeratores inter se, Deinde multiplica etiã denominatores inter se, tunc efficit Minutia simplex, ut ex illis quas posui, sit hæc simplex Minutia $\frac{6}{84}$ seu $\frac{1}{14}$.

Vides ut Minutiæ Minutiarum non egeant proprio aliquo Algorithmo, quando tam facile ad simplices Minutias reducuntur, earumq; regulis subijciuntur.

Sed probemus operationis huius regulam aliquo exemplo. $\frac{1}{3}$ fl. facit 36 ß. nam 1 fl facit 252 ß. De 36 ß faciunt $\frac{2}{7}$. 24 ß. Et de 24 ß faciunt $\frac{1}{4}$. 18 ß. Vide iã an $\frac{1}{14}$ fl. faciat 18 ß. Operatio tamen probationis huius, sumpta est secundum hanc signationem, & non secundum priorem. Vides autem, ut in huiusmodi Minutijs tantum sit unus numerator principalis, reliqui uero improprie uocantur numeratores &c.

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{7}$ fl $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{2}{7}$ fl $\frac{1}{4}$

De natura & speciebus numerorũ abstractorũ. Cap. 11.

NVmeri abstracti propriè dicuntur, q̃ nullã prorsus denominationẽ habẽt. Cũ autẽ omnis Minutia denominatorẽ habeat, certũ est eas etiã Minutias improprie uocari abstractas, quæ nulli reali, aut artifici alí denominatiõe sunt signatæ, ut sunt Minutiæ, q̃ fiunt ex Diuisione numeri abstracti, per numerũ abstractũ. Solemus tamẽ eas nihilominus, docendi gratia, uocare abstractas. Scilicet $\frac{2}{7}$ uocamus Minutiam abstractam. At $\frac{2}{7}$ fl uocamus Minutiam contractam. Sicut autem $\frac{2}{7}$ fl. sunt duæ tertiæ unius Floreni, sic $\frac{2}{7}$. sunt duæ tertiæ unius unitatis. Quòd autem tales Minutiæ, sint unitatis fractiones, potius quàm numerorum, patet uel ex Multiplicatione Minutiarum. Nam pono has Minutias $\frac{2}{7}$ & $\frac{3}{4}$ esse fractiones huius numeri 120. & multiplico eas inter se. Faciunt autem iuxta regulam Multiplicationis $\frac{6}{12}$ seu $\frac{1}{2}$. Est autem $\frac{1}{2}$ de 120. solummodo 60. At $\frac{2}{7}$ de 120. faciunt 80. Et $\frac{3}{4}$ de 120 faciũt 90. Oporteret iam, iuxta Algorithmi regulam, quòd 80 in 90. multiplicata facerent solummodo 60. sed non faciunt 60, sed potius 7200. Certe uides clare, ut Algorithmi Minutiarum multiplicatio,

plicatio, non respondeat Minutijs numerorum abstractorum, sed potius Minutijs unitatis.

Sed quid dices ad Arithmeticorum sententias, qui dicunt unitatem esse indiuisibilem? Nam Boetius recte iuxta Euclidem colligit, ex indiuisibilitate unitatis, imparem numerũ non posse diuidi in duo æqualia, & alia huiusmodi plura, imò uniuersam Theoricæ partis Arithmeticæ tractationem, huic fundamento superstruunt. Respondeo permittendum esse Arithmeticis, ut dũ bona ratione & utili consilio aliquid fingunt, uti possint huiusmodi rebus fictis. Liceat igitur eis fingere fractiones unitatis indiuisibilis, uel hac saltem utilitate, ut earum fractionum Algorithmus, docendi gratia, extet, qui uidelicet exemplar sit regularum pro omnibus Minutijs ueris, qualitercunq; signentur aut denominẽtur, nisi forte Minuta Physica uelis esse excepta. Certe insignis est ista utilitas, id quod nouerunt, qui calculationes Algebræ non ignorant.

Duo uero sunt, ad quæ omnia ferè referuntur, quæ in hoc capite dicenda sunt, uidelicet Compositio & Numeratio. Discernitur autem hic compositio à collectione numerorũ, qualis fit p additionẽ, quanq; alicubi in propositionibus Euclidis legamus compositionẽ sumi pro tali collectiõe, qualis fit in additione numerorũ. Compositio autem numerorũ, proprie dicitur constitutio eorũ per multiplicationẽ numeri in numerũ. ut 6 componitur ex 2 & 3. Dicunturq; 2 & 3, hac ratione, partes cõpositiõis senarij. Compositio ergo & Multiplicatio, una & eadem operatione fiunt. Sic Numeratio & Diuisio, una & eadem operatione fiunt. Et tamen Numeratio differt à Diuisione, id quod uel hac experientia probatur, quòd unitas omnem numerũ numerat, nullum autem numerũ diuidit. Numerus aũt numerum numerare dicitur, quando eum diuidit ita, ut neq; Minutiã statuat, neq; residuũ relinquat. Vnde omnis numerus numerans numerũ, est pars eius aliquota. Et omnis numerus, est pars numeri se maioris, uel aliquota, uel aliquãta. Aliquota quidẽ, si eum numeret, ut iam dixi. Aliquanta uero, si eũ non numeret.

Vt

Vt autem ea quæ in hoc capite dicēda sunt, facilius atq; promptius dijudicare ac probare possis, diligenter obserua quæ iam dicam de numeratione & compositione numerorum.

Vnitas omnem numerum numerat, nullum autem numerum componit.

Binarius quemlibet numerum componit & numerat, cuius figura prima ab ipso binario numeratur.

Ternarius quemlibet numerum componit & numerat, cuius singulæ figuræ, pro primis acceptæ, & ad se additæ, ab ipso ternario numerantur. vt 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. etc

Quaternarius quemlibet numerum componit & numerat, cuius ipse partem numerat illam, quæ sub duabus figuris eius primis continetur. vt 12. 16. 20. 24. 28. 32. 36. 40 etc

Quinarius quemlibet numerum cōponit & numerat, cuius prima figura fuerit 5 uel 0.

Senarius, quemlibet numerum parem componit & numerat, quem numerat ternarius.

Septenarius, quemlibet numerum componit & numerat, qui colligitur ex tribus, sex, nouem, aut duodecim terminis, proportionalitatis duplæ, quadruplæ, aut sedecuplæ.

Octonarius, quemlibet numerum componit & numerat, cuius ipse numerat partem illam, quæ sub tribus primis figuris eius continetur.

Nouenarius, quemlibet numerum componit & numerat, cuius singulæ figuræ pro primis acceptæ, & simul additæ, ab ipso nouenario numerantur.

Denarius, quemlibet numerum componit & numerat, cuius prima figura fuerit 0.

Ex his iam facile scies, quos numeros numeret 20. aut 30. aut 40. aut 50 &c.

Item scies facile, quos numeros numeret 16, aut 32. aut 64. aut 128 &c.

Item scies quos numeros numeret 12, aut 24. aut 48 &c. Nā 12 nu-

12. numerat omnem numerum, quem senarius numerat numero pari &c.

¶ De speciebus numerorum abstractorum.

Numeri abstracti prima sui diuisione diuiduntur in Pares & Impares.

Numeri pares sunt, qui binario numero numerantur.

Numeri impares, sunt qui binario non numerantur.

¶ Proprietates numerorum parium.

1. Par additus pari, speciem non mutat.
2. Par additus impari, speciem mutat.
3. Par subtractus à pari, speciem non mutat.
4. Par subtractus ab impari, speciem mutat.
5. Par numerus dum componit, nunquam mutat speciem.
6. Par numerus dum numerat, suæ speciei numerũ numerat.
7. Pares numeri sequũtur sese hac Arithmetica Progressiõe.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. &c.

Hæc omnia suos habent usus, ut suis locis dicam.

¶ De speciebus numerorum parium.

Subdiuiduntur autem pares numeri dupliciter. Nam primo Binarius differt specie à quolibet alio numero pari. Cum enim Binarius sit primus & incõpositus, reliqui pares oẽs sunt cõpositi. Constituit itaq; Binarius solus propriam speciem. Hinc est ut nulli specierum parium respondeat constanter. Dum enim additur aut subtrahitur, seruat proprietatem parium impariter. Dum uero multiplicat seu componit, & numerat, seruat proprietatẽ parium pariter. Quod ut uideas, proprietates eius recẽsebo.

Binarius additus numero pari composito, primæ speciei, aut subtractus à tali, constituit numerum secundæ uel tertiæ speciei iuxta proprietatem parium impariter. Item è diuerso.

Binarius additus numero pari composito, secundæ uel tertiæ speciei, aut subtractus à tali, constituit numerum primæ speciei, iuxta proprietatem parium impariter.

Binarius multiplicans parem compositum speciei secundæ,

componit numerum eiuſdem ſpeciei, iuxta proprietatem parium pariter. Sic.

Binarius dū numerat parem cōpoſitū ſecūdæ ſpeciei, tūc facit numerum eiuſdem ſpeciei, iuxta proprietatem parium pariter.

Itaq; Binarius huiuſmodi ratiōibus, neq; par pariter dici poteſt, neq; par impariter. Multo minus dici poteſt pariter impariterq; par. Stet igitur binarium propriam conſtituere ſpeciem.

De ſpeciebus numerorum pariū cōpoſitorū.

Parium compoſitorum ſpecies ſunt tres, quarum mentio facta eſt proximo loco, præter ordinem, uidelicet re ipſa, quæ tractabatur ſic exigente.

Primo. Quidam pares compoſiti, ſunt pares impariter, qui à pari non numerantur, niſi impariter. hoc eſt. Dum diuiduntur per parem numerum, ſemper faciunt imparem quotientem.

Secundo. Quidam numeri pares compoſiti, ſunt pares pariter, qui à nullo impari numero numerantur.

Tertio. Quidam numeri pares compoſiti, ſunt pariter impariterq; pares, qui modo à pari numerantur pariter, modo impariter numerantur, ab alio numero pari,

Proprietates parium impariter.

1. Par impariter, additus ad numerum ſuæ ſpeciei, conſtituit numerum parem alterius ſpeciei.

2. Par impariter, additus pari alterius ſpeciei, cōſtituit numerum ſuæ ſpeciei.

3. Par impariter, ſubtractus à numero ſuæ ſpeciei, relinquit numerum parem alterius ſpeciei.

4. Par impariter, ſubtractus à numero pari alterius ſpeciei, relinquit numerum ſuæ ſpeciei.

5. Par impariter cōponit ex impari numerum ſuæ ſpeciei.

6. Par impariter, componit ex pari numerū tertiæ ſpeciei,

7. Par impariter dum numerat, numerat numerum tertiæ ſpeciei.

8. Par

8. Par impariter dum numeratur, aut á numero suæ speciei numeratur, aut ab impari.

9. Pares impariter sequuntur sese hac Arithmetica Progressione, qua nullus intermittitur.

6. 10. 14. 18. 22. 26. 30. 34. 38. &c.

▼ Proprietates parium pariter.

1. Par pariter, additus numero suæ speciei, constituit parē tertiæ speciei.

2. Par pariter additus numero alterius speciei, constituit numerum eiusdem speciei.

3. Par pariter multiplicatus in numerum suæ speciei, non mutat speciem.

4. Par pariter dum numerat numerum suæ speciei, aut facit binarium, aut numerum suæ speciei.

5. Par pariter dum numerat numerum alterius speciei, tunc numerat numerum tertiæ speciei.

6. Pares pariter sequuntur sese hac Progressione Geometrica, qua nullus intermittitur.

4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. &c.

▼ Proprietates pariter imparitérq; parium.

1. Pariter imparitérq; par, dum multiplicat, suam speciem nunquam mutat.

2. Pariter imparitérq; par, dum numerat, suæ speciei numerum solummodo numerat.

3. Pariter imparitérq; pariū, numeri tres primi, pgrediūtur secundū Progressionē Cōtraharmonicā, ut 12. 20. 24. Reliqui irregulariter progrediunt. Impossibile aūt est Progressionē Cōtraharmonicam posse extēdi ultra terminos rationales tres, ut suo loco dicam.

Sub hac specie sunt oēs numeri integri diametrales, de qbus suo loco dicam.

▼ De numeris perfectis.

Omnes numeri perfecti, sunt pariter imparitérq; pares, excepto primo perfectorum, id est senario, qui est primus pariū im-

pariter,& primus perfectorum,componiturq; ex duobus numeris primis,id est, ex 2 & 3. Reliquorum autem perfectorum cõpositionem mox indicabo.

Dicuntur autẽ numeri perfecti,qui coaceruatione omniũ partium suarum aliquotarum seipsos restituunt præcise, ut partes senarij aliquotæ omnes sunt hæ, 1. 2. 3. Et hæ simul coaceruatæ restituunt senarium. Hac ratione imperfecti sunt, qui ex collectione suarum partium aliquotarum omnium, uel plus faciunt (ut 220. facit collectione suarum partium 284) uel minus faciunt, ut 284. facit collectione suarum partium 220.

☞Inuentio numerorum perfectorum pariter imparitérq; parium, hac pictura ostenditur.

4. 8	16. 32	64. 128	256. 512	&c.

Vides autem hunc ordinem esse Progressionem pariter parium, & quemlibet terminum habere socium. Poteris autem cõponere ex huiusmodi Progressiõe singulos numeros perfectos, suo ordine,ut nullus obmittatur. Hoc modo.

A maiore inter duos combinatos, subtrahe unitatem,& residuum multiplica per minorem, tunc semper habebis numerũ perfectum. Exempla.

4 in 7. facit 28.
16 in 31. facit 496.
64 in 127. facit 8128.
256 in 511. facit 130816.
Et sic de alijs in infinitum.

☞Hæc est ergo Progressio numerorũ perfectorũ.

6. 28. 496. 8128. 130816. &c.

Mira admodum sunt perfectorum numerorũ rationes. Quãuis enim paruum usum habeant numeri perfecti, in rebus Arithmeticis,iucundum tamen est cernere, ut sub tam mira raritate eorum inter numeros alios,proferri tamen possint seu inueniri tam prompte,& modo tam facili,ordineq; tam pulchro. Tradidit

didit autem Euclides modum inueniendi propositione ultima libri noni. Et post eum Boetius.

Vides autem compositionem numerorum perfectorum esse ex maxime diuisibilibus numeris, ut sunt pares pariter: & ex minime diuisibilibus, ut sunt impares incompositi.

Sunt autem perfectioni numerorum perfectorum adeo propinqui, pariter pares, ut quilibet eorum sola unitate deficiat à perfectione prædicta. Vt si omnes partes aliquotæ numeri pariter paris cuiuscunq;, in unam summam colligas, addasq; illi aggregato, solummodo unitatem, tunc restituitur integer numerus illarum partium. Et cum partes illæ inter se semper constituant Progressionem Geometricam, uaria etiam additione sui constituūt semper Progressionem Arithmeticam numerorum naturalem, ab unitate usq; ad suum integrum progredientes, cuius speculationis usum habemus in ponderibus institorum.

Et perfectorum numerorum nullus potest numerare aliū numerum perfectum, quemadmodum imparium incompositorū nullus potest numerare alium numerum imparem incompositū.

Hæc de paribus numeris dicta iam sufficiant. Sequitur de imparibus.

¶ Proprietates numerorum imparium.

1. Impar additus impari, mutat speciem.
2. Impar additus pari, non mutat speciem.
3. Impar subtractus ab impari, mutat speciem.
4. Impar subtractus à pari, non mutat speciem.
5. Impar cum componit numerum cum numero suæ speciēi, non mutat speciem.
6. Impar cum componit numerum cum numero alterius speciēi, mutat speciem.
7. Impar numerus dum numerat numerum suæ speciēi, nō mutat speciem.
8. Impar dum numerat numerum alterius speciēi, speciem mutat.

9. Impares numeri, sequuntur sese hac Progressione Arithmetica admõdum admiranda, de qua suo loco dicam.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. &c.

¶ De speciebus numerorum imparium.

De speciebus numerorum imparium pauca restant dicenda. Diuiduntur autem impares numeri, in incompositos & compositos. Ex ijs autem quæ superius dicta sunt, satis constat, qui numeri simplices, seu incompositi sint, & qui sint compositi.

¶ De imparibus incompositis.

Simplices seu incompositi sunt, qui à nullo numero numerari possunt. Hi sunt, qui nullam partem aliquotam habent, excepta unitate. De unitate autem superius dixi, quòd nihil possint componere.

Habẽt autem incompositi numeri usus ualde egregios. Nam per eos inueniuntur signa artis Algebræ, quæ res ineffabilem usum habet. Et (ut de Algebra & signis eius inueniendis iam transeam, donec locus eorum proprius mihi occurrat) secundõ eam inuentionem, componuntur signa radicum, infinitarum specierum.

Item per numeros incompositos, inueniuntur partes numerorum aliquotæ utili & iucunda operatione.

¶ Sic operor.

Numero aliquo proposito, ut 462. resoluo eum in partes suas incompositas aliquotas omnes, quæ ipsum constituunt, id est, ex quarum multiplicatione inter se, ipse restituitur. Sic autem eum resoluo. Primo diuido eum per 2. tanquam per aliquotam partem incompositam omnium minimam, Facit Diuisio 231. Reseruo igitur 2. & 231 diuido per 3. tanquam per minimum numerum quo potest numerari, Facit Diuisio 77. Reseruo igitur 3. & 77 diuido per minimũ, id est per 7. facit Diuisio 11. itaq; iam habeo 2. 3. 7. 11. uidelicet omnes partes incompositas aliquotas, constituentes 462. numerum uidelicet integrum. Partibus inuentis sic utor.

Multi-

Multiplico 7 in 11. facit 77. Facioq; ordinem primum ex his tribus numeris, uidelicet 7. 11. 77.

Deinde recipio sequentem incompositam partem, uidelicet 3. & multiplico eam in primum ordinem, facioq; ex 3. & productis eius hunc ordinem secundum 3. 21. 33. 231.

Deinde recipio reliquam partem incompositam, uidelicet 2. & multiplico eam in omnes ordines superiores. Facioq; ex 2. & productis eius hunc ordinem 2. 14. 22. 154. 6. 42. 66.

Vltima autem multiplicatio, semper producit ipsum numerum integrum, pro quo tu pone unitatem.

Habet itaq; numerus ille 462. partes has. 1. 2. 3. 6. 7. 11. 14. 21. 22. 33. 42. 66. 77. 154. 231. Et certum est nullam partem aliquotam esse intermissam.

Sic numerus ille 2310. inuenitur habere partes aliquotas triginta unam.

Item numerus ille 30030. habet partes aliquotas sexaginta tres.

Sed uideamus aliud exemplum. Volo inuenire, partes aliquotas, omnes numeri huius 496.

Partes incompositae componentes totum sunt hae,

2. 2. 2. 2. 31.

Primus ordo facit 2. 31. 62.

Secundus ordo facit, 4. 124.

Tertius facit, 8. 248.

Quartus ordo, facit 16.

Partes igitur singulae sunt hae.

1. 2. 4. 8. 16. 31. 62. 124. 248.

Ex his exemplis iudicabis de omnibus alijs faciliter.

Sunt autem (ut ad impares redeam) omnes numeri incompositi, impares, excepto uno pari incomposito, id est binario, qui in usu imparium incompositorum semper sejllis adiungit.

Hæc autem est incompositorum numerorum Progressio.

3. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. &c.

De

De imparibus compositis.

Numeri impares compositi, sunt qui ab uno numero, aut à pluribus numerantur. Notum est autem, ut numeri numerantes numerum, sint partes compositionis eius. Vnde omnis multiplicatio imparis in imparem, producit imparem numerum compositum. Et si impar incompositus multiplicetur in se semel, non poterit productus numerus numerari, nisi ab uno illo solo. Si bis in se multiplicetur impar incompositus, producitur impar compositus, solidus, qui à duobus solummodo numeris numeretur. Et si ter in se multiplicatus fuerit numerus impar incompositus, numerabitur impar ille compositus productus, à numeris solummodo tribus, ut 8 1. numeratur præter unitatem à tribus his 3. 9. 27. &c. Si autem multiplicentur inter se duo impares incompositi, producitur impar compositus pure superficialis, ut qui solūmodo à duabus illis partibus suis possit numerari. Si autem cōpositus ille rursum multiplicetur per alteram, ex partibus illis (ut si 15 multiplicetur per 3. aut per 5) tunc impar compositus, qui producitur, numerabitur necessario à numeris quatuor, præter unitatem. Si autē multiplicetur per alium aliquem imparem incompositum (ut si, 15 multiplicetur per 7. aut per 11) tunc impar compositus, qui fuerit productus, numerabrtur necessario à numeris sex.

Si impar compositus, pure superficialis, non quadratus, fuerit, multiplicatus in imparem compositum, pure superficialem, non quadratum. Fuerintq; numeri illi duo contra se incompositi, tunc compositus, qui producitur, numerabitur necessario à quatuordecim numeris, præter unitatem, ut 15 in 77. facit 1155 numerabilem à quatuordecim numeris.

Et si ille multiplicaretur in alium numerabilem à quatuordecim numeris, tunc qui nasceretur, numerabilis esset à ducentis quinquaginta quatuor numeris, dummodo duo illi multiplicantes essent contra se compositi.

ige incōpositi q
tur errata est

Si impar compositus pure superficialis, nō quadrantus, fuerit multi-

multiplicatus in imparem compositum, pure superficialem, non quadratum, fuerintq; numeri illi duo contra se compositi, tunc producitur impar numerabilis solummodo à decem numeris, præter unitatẽ, ut 35. in 77. facit 2695. Item 15 in 21. facit 315.

Si uero multiplicentur inter se duo numeri, impares compositi, pure superficiales quadrati, producitur impar numerabilis à septem numeris præter unitatem, ut 9. in 15. facit 225. 135

Omnes numeri pure superficiales quadrati, sunt contra se incompositi.

Omnes numeri pure superficiales quadrati, sunt impares, excepto quaternario.

Numeri contra se incompositi dicuntur, qui nullam habent partem aliquotam communem, ut est omnis impar numerus ad omnem pariter parem. Nam impar, non nisi ab impari numeratur, & pariter par, non nisi à pari numeratur.

Numeri ergo contra se compositi sunt, qui partem habent aliquotam unam communem, aut plures, ut sunt omnes numeri pares adinuicẽ. Intelliguntur autem ista de partibus aliquotis cõponentibus, ut scias unitatem esse excluſam.

Præter compositionem sunt alij quidam modi producendi numeros impares compositos, ut si à numero pariter imparitérq; pari perfecto, auferas unitatem, semper fit impar compositus, & talis qui nouenario etiam numeretur.

Sic etiam impares incompositi modos habent similes, quibus producãtur, ut si à pariter pari, cuius prima figura fuerit 2. aut 8 auferas unitatem, semper fit impar incompositus.

Sic omnis numerus diametralis abiecta unitate, relinquit imparem incompositum.

¶ De numeris compositis in genere.

Numeri compositi, aut sunt quadrati, aut non quadrati.

Numeri nõ quadrati, aut sunt diametrales, aut nõ diametrales

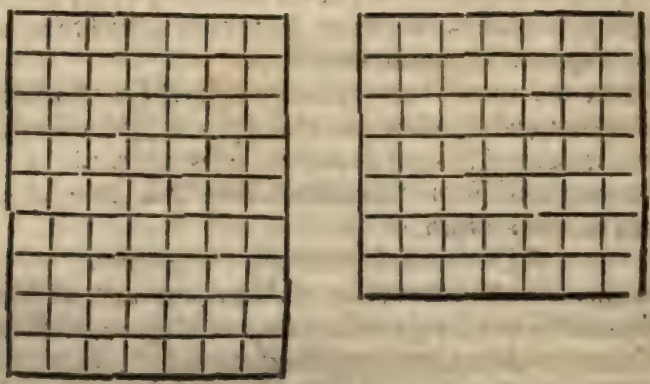
Vt autem uideas, quo consilio numeros cõpositos sic distinxerim, aliã institutã numerorum cõpositorũ distinctionẽ. Videlicet

Numeri compositi, aut sunt pure superficiales, aut solidi.

Pure superficiales sunt, qui solidi esse non possunt, ut sunt numeri, qui uel ab uno solo numero numerantur, uel à duobus solummodo incompositis. Exempla primi sunt, 4.9.25.&c. Exempla secundi sunt 6.10.14.15.21.&c.

Solidi sunt, qui ita sunt superficiales, ut etiam solidorum figuras orthogonaliter recipiant, uidelicet secundum trinam dimensionem, ut sunt numeri, qui uel à duobus solummodo numeris numerantur, uno incõposito & altero composito, uel qui à pluribus quàm duobus numeris numerantur. Exempla primi 8.27.125 &c. Exempla secundi 12.16.18.20.45.63.75 &c.

Quia autem in Progressionũ Geometricarum tractatione, ui deo esse locum, ubi recte & cõmode dici possit, quicquid dicendũ fuerit de soliditate numerorum. Et in tractatione Progressionum Arithmeticarum, locus est, ubi de Polygonalibus & Pyramidalibus dicere commode possim quantum sufficit. Nihil aliud restat hoc loco, quàm ut de compositis numeris dicam, quatenus sunt quadrangulares orthogonaliter, uidelicet aut quadrate, aut aliter, ut sunt altera parte longiores, sicut hæ duæ figuræ satis indicant,



Eos

Eos etiam numeros, qui altera parte longiores sunt, hoc loco negligo, tanquã parum utiles, nisi regula quadam longitudinẽ latitudini conferant, ut diametrales numeri, qui certas proportiones statuunt inter suam latitudinem & longitudinem. De diametralibus ergo numeris atq; quadratis, hoc loco dicam, eo q̃ regulares superficies habere uideantur.

De quadratis numeris.

QVadratus numerus, est qui partem habet aliquotam, à se ipsa denominatam, ut 7 est septima pars de 49. ut uides ex figura quadrata paulo superius posita. Aequat enim illa, ex hac ratione, longitudinem latitudini.

Quadratorum numerorum usus infinitus est, ut ex ijs intelliges, quæ de irrationalibus numeris & de Algebra dicam. Sufficiant ergo hæc pauca, hoc loco pro multis.

Primo. Notũ est unũquẽq; numerũ ex se cõponere quadratũ, ut 7 septies faciunt 49. ut indicat figura quadrati posita.

Secundo. Omnis numerus quadratus, multiplicatus in quadratum, quadratum numerum componit.

Tertio. Numeri quadratis similes, dum inter se multiplicantur, quadratum numerum componunt.

Dicũtur autẽ numeri duo, quadratis similes, inter q̃s mediat numerus, diuidẽs proportionẽ eorũ in duas ꝓportiões æquales, cũ tamẽ ipsi nõ sint quadrati. Hoc aũt quadratis peculiare est, ut inter quoscũq; duos, mediet numerus ꝓportionaliter. Et impossibile est, ut inter numerũ quadratũ, & numerũ non quadratũ, numerus cadat, qui prædicto modo mediet, id est, ꝓportionẽ extremorũ æqualiter diuidat. Sic aũt inuenitur mediãs numerus, seu mediũ ꝓportionale. Numeros ipsos (siue sint quadrati siue quadratis similes) inter se multiplica, & radix ꝓducti erit numerus mediãs quẽ q̃rebas. Ex his patet, q̃ nullus numerus solitarie positus, uocat̃ similis quadrato, sed p̃ relationẽ duorũ numerorũ inter se, uocant̃ ipsi quadratis similes, aut dissimiles. Similes quidẽ, si ad similitudinẽ quadratorũ habuerint mediũ ꝓportionale &c.

Producuntur autem numeri, ſimiles quadratis, ex duobus numeris quadratis, multiplicatis per aliquem numerum, qui non ſit quadratus, ut 4 & 9. multiplicati per 2. faciunt 8 & 18. quadratis ſimiles. Sic multiplicati per 3. faciunt 12 & 27. ſimiles quadratis &c. Habent autem numeri quadratis ſimiles uſum magnum in decimo Euclidis, imò in omnibus irrationalium numerorum & linearum tractationibus, ut ſuo loco uidebimus.

Impoſsibile eſt, ut quadratus numerus producatur ex multiplicatione quadrati in non quadratum. Sicut impoſsibile eſt ex additione paris ad imparem fieri parem.

Impoſsibile eſt, numerum eſſe quadratum, cuius prima figura fuerit 2. aut 3. aut 7. aut 8.

Cum numerus à fronte habuerit cifra ſub numero impari (ut hic 160. 16000. &c.) Impoſsibile eſt eum eſſe quadratum.

Cum numerus fuerit, cuius prima figura ſit 5. impoſsibile eſt eum eſſe quadratum, niſi ſecunda figura eius ſit 2.

Reliqua de quadratis numeris dicenda, dicam in alijs locis, ubi neceſſe erit.

De numeris Diametralibus.

Numerus diametralis, eſt numerus non quadratus, habens partem aliquantam, cuius quadratum ſit æquale duobus quadratis, partium aliquotarum eius aliquarum, quæ partes aliquotæ inter ſe multiplicatæ, totum conſtituant diametralem, ut 12 eſt numerus diametralis, cuius latera diametralia ſunt 3 & 4. eo q̃ quadrata eorum addita ad ſe, faciant 25. id eſt numerum quadratum. Diameter ergo eſt 5.

Sic in omni numero diametrali eſt diameter pars eius aliquanta, & latera diametralia ſunt partes eius aliquotæ.

Licet numerus diametralis nonnunquam ualde multas habeat partes aliquotas, tamen præter duas, nullas habebit alias, quorum quadrata iuncta, faciant numerum quadratum. Hoc eſt. Diametralis numerus non poteſt, niſi uno ſimplici modo eſſe diametralis. Seu, nõ poteſt habere plura latera diametralia duobus.

Si fuerit

Si fuerit numerus diametralis, necesse est, ut latera, eius diametralia sint sub proportione aliqua earum quæ his duobus ordinibus signantur.

Primus ordo.

$1\frac{1}{3}$. $2\frac{3}{7}$. $3\frac{3}{7}$. $4\frac{4}{9}$. $5\frac{5}{11}$. $6\frac{6}{13}$. $7\frac{7}{15}$. &c.

Secundus ordo.

$1\frac{7}{8}$. $2\frac{11}{12}$. $3\frac{15}{16}$. $4\frac{19}{20}$. $5\frac{23}{24}$. $6\frac{27}{28}$. $7\frac{31}{32}$. &c.

Si iam habere uelis numerum diametralem, recipe terminũ aliquem ex ordinibus illis, quemcunq; uolueris, facitoq; ex eo unam Minutiam, tunc numerator ostendet tibi latus diametrale maius. Denominator uero latus diametrale minus. Duo itaq; numeri illi inter se multiplicati, semper faciunt numerum diametralem. Et quia proportio laterum manet, dum numero quocunq; multiplicantur, facile uides, ut ex uno diametrali facere possis infinitos diametrales. Patet etiam ex his, quòd diametralis numerus, multiplicatus per numerum quadratum, necessario producit diametralem.

Vides & hoc, ut ordo uterq; progrediatur in infinitum, & modus progrediendi facilior sit, quàm ut uerbis egeat. Nulla autem proportio laterum diametralium obmittitur, quemadmodum in Progressione naturali numerorũ, nullus obmittitur numerus. Sunt hæc certe admiratione digna. Deinde magnum & iucundum usum habent in Geometricis.

Habes itaq; (ut repetam) modum producendi latera diametralia, sub infinitis proportionibus, quas tibi subministrant ordines illi, (ut ex $1\frac{1}{3}$. fit $\frac{4}{3}$. habes itaq; latera duo, uidelicet maius 4. & minus 3.) & cum uterq; ordinum infinitas proportiones complicet, cum sine fine uterq; progrediatur, nihilominus tamen quælibet etiam proportio complicat infinitum numerum laterum. Ex lateribus autem duobus diametralibus (ut dixi paulo superius) componitur diametralis numerus. Item per latera diametralia constituitur etiã diameter numeri diametralis. Quodlibet enim multiplicatur in se, & quadrata illa duo (duorum late

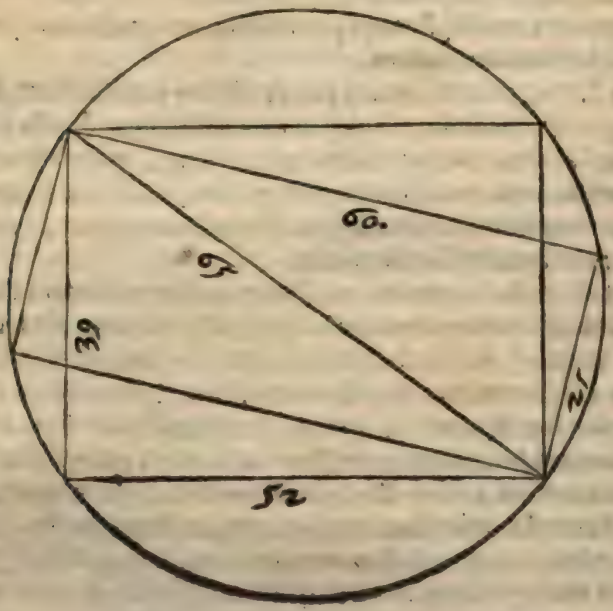
rum) adduntur. fitq; ita ex duobus quadratis additis, unũ quadratum, cuius radix quadrata est diameter numeri diametralis.

Est & hoc mirabile, ut sub infinitis infinitatibus, diametraliũ numerorũ constituendorũ (ut iam superius ostendi) nullus inueniatur numerus diametralis, cuius prima figura possit esse alia quàm 2. aut 8. aut 0.

Omnes autem numeri diametrales continentur sub specie tertia numerorum parium. Hoc est, omnes diametrales numeri sunt pariter impariterq; pares.

Impossibile est unum numerum diametralem, habere diametros plures, unâ. Sicut impossibile est unum numerum quadratum, habere radices quadratas plures, unâ.

Possibile autem est, unam diametrum, esse pluriũ diametraliũ numerorũ diametrũ, ut satis ostenditur hac figura sequenti.



Maior numerus diametralis facit 2028. Minor facit 1500. Reliqua satis indicat ipsa figura, uidelicet ut 65 sit communis utriusq; numeri diametralis, diameter &c.

Si autem à me petas regulam, iudicādi de singulis numeris, generalem, qua de quolibet uidelicet numero scire liceat, an sit diametralis, uel non diametralis. Ego tibi breuius hanc rem non possum ostendere, q̄ ut numeri propositi partes aliquotas omnes quæras (ut superius docui) easq; inuētas ita disponas, ut cuilibet partium ex minoribus, adiūcta sit ea pars ex maioribus, quæ cū ea totum illum numerum componat propositū, atq; ita quaslibet duas partes examines, utrum diametralium laterum conditionem habeant, an ne &c.

Vt uolo scire, utrum numerus ille 360. sit diametralis, uel non diametralis. Sic dispono partes eius aliquotas oēs inuentas.

1	2	3	4	5	6	8	9
360	180	120	90	72	60	45	40
	10	12	15	18			
	36	30	24	20			

Binas igitur & binas examino. Scilicet $\frac{18}{20}$. non sunt diametralia. Neq; $\frac{15}{24}$. sunt diametralia latera. Neq; $\frac{12}{30}$. Neq; $\frac{10}{36}$. Sed $\frac{9}{40}$. inuenio esse latera diametralia. Nā quadrata eorum, uidelicet 81. & 1600. faciunt (si addantur) 1681 numerum quadratum, cuius radix quadrata facit 41. diametrum uidelicet huius numeri 360. Ergo 360. est numerus diametralis. Vel sic exploro. Maiorem partem inter combinatas diuido per minorem, & uideo an Quotiens contineatur in altero ordinum quos superius posui, ut 40. per 9. facit $4\frac{4}{9}$. Quotientem, uidelicet quartum primi ordinis.

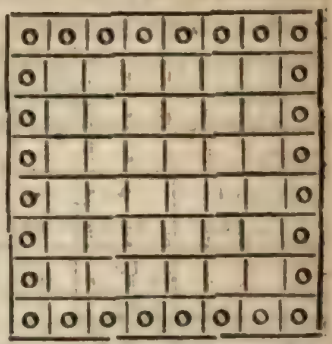
Notum est, ut ad partem minorem inueniatur sua pars maior, uidelicet diuisione totius per partem minorem, ut 360 per 2. facit 180 &c.

De

De numeratione circulari.

NVmerationem circularem seu reciprocam, uolo huic parti connectere, tanquam Epilogũ quẽdam, eo quòd hoc exercitium reuocet omnes species numerorum parium & imparium. Rationem autem appellationis huius, satis intelliges ex ipsa numeratione.

Recipitur autem pro numeratione huiusmodi, figura quadrate cellulata, & numerantur cellulæ figuræ illius, quæ sunt in extremo ambitu, ut sunt, quas uides esse signatas in figura sequẽti.



Et cum figura sit quadrata, impossibile est, ut numerus cellularũ, ambitus extremi sit numerus impar, aut sit par impariter. Et dũ latus unum figuræ quadratæ, habuerit cellulas sub numero pari, impossibile est numerum cellularum extremi ambitus esse de numero pari pariter. Necesse est igitur, ut sit de numero impariter pariterq; pari. Itaq; numerus cellularum ambitus extremi, tunc potest esse par pariter, quando latus unum, figuræ illius, habuerit cellulas de numero impari. Nõ autem semper est ambitus de numero pariter pari, quoties latus unum figuræ fuerit de numero impari, sed solum dum latus habuerit numerum imparem huius sequentis Progressionis, cuius differentiæ faciunt Progressionem Geometricam parium pariter numerorum.

3. 5. 9. 17. 33. 65. 129. &c.

Cellulæ ambitus uniuscuiusq;, numerari possunt, per dimidiũ numerum cellularum, eiusdem ambitus. Loquor autem (ut nosti) de ambitu extremo, figuræ cellulatæ quadrate. Item de numeratione circulari loquor, quæ sic fit, ut sequitur.

Numera

¶ Numeratio circularis.

Incipe numerare à quacunq; cellula ambitus libuerit, ut incipe à cellula signata litera A. Numerabis autem sex cellulas immediate sequentes, id est ab A usq; ad F. Senario autem numerabis, eo quòd ambitus habeat 12 cellulas, & 6 sit dimidium de 12. Pones autem calculum ad cellulam finitæ numerationis, id est ad cellulam F. Deinde una cellula obmissa, incipe à sequenti iterum numerare, donec compleas senarium, scilicet obmissa cellula signata litera G.

A	B	C	D
M			E
L			F
K	I	H	G

Incipe numerare à cellula H, tunc complebis senarium in cellula A, & illic repone calculum secundum. Tertio, obmissa cellula B, (semper enim sic unã cellulam obmittes) incipe numerare à cellula C, tunc perueniet calculus tertius in cellulam H. Et sic deinceps numerabis, donec omnes cellulæ repleantur, una solummodo excepta. Nam cum hac lege fiat numeratio, ut à nulla cellula possis incipere nisi sit uacua, necesse erit, ut tandem una remaneat uacua. Perueniet autem quartus calculus ad cellulam C. Quintus ad cellulã K. Sextus ad cellulam E. Septimus ad M. Octauus ad cellulam G. Nonus ad cellulam B. Decimus ad cellulam I. Vndecimus ad cellulam D. Et cellula L, manet sine calculo, id est, uacua manet.

Atq; ita per hæc habes modum numerationis circularis satis clare traditum.

Ambitum quemlibet habentem cellulas sub numero pariter pari, numerat non solum dimidius numerus cellularum, circulariter, sed quilibet numerorum parium, qui continetur sub illo numero dimidio. Vt si ambitus figuræ quadratæ habeat cellulas 32. (ut est ambitus quadrati, habentis cellulas in unoquoq; latere nouem) numerant ambitum illum singuli numeri Progressionis huius parium numerorum, 2.4.6.8.10.12.14.16. Seruit autem huic Progressioni alia Progressio, uidelicet, 1.5.9.13.17.21.25.29. Nam quando 16 numerat, tunc post quamlibet nu-

merationem obmittitur 1 cellula. Quando autem numerat 14. tunc obmittuntur semper 5 cellulæ. Quando uero 12 numerat ambitum, tunc obmittuntur semper cellulæ 9. Et sic de alijs, procedendo in una Progressione sinistrorsum, & in altera dextrorsum.

Ambitum habentem cellulas de numero impariter pariterq; pari, non numerant singuli numeri pares, qui continentur sub dimidio numero cellularum ambitus. Et hic uide mirabilem naturam numerorum.

Quando Progressio illa parium numerorum habuerit terminos de numero impari incomposito (de pari incomposito hic pulchre nihil dicitur) tunc medius terminus non numerat ambitum circulariter, reliqui uero singuli numerant.

Exemplum. Vt si latus figuræ quadratæ habeat 8 cellulas, habebit ambitus 28. cuius dimidium est 14. Sic autem stat Progressio parium usq; ad 14.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14.

Sunt autem termini 7. Et est 7. numerus impar incompositus. Igitur medius eorum uidelicet 8. non numerat 28. circulariter. Reliqui uero numerant.

Quando uero Progressio illa parium numerorum habuerit terminos de numero composito, tunc quære omnes partes compositionis eius aliquotas impares incompositas, & diuide secundum singulas earum ordinem terminorum, & inuenies cuiuslibet partis, medium parem, non posse numerare ambitū.

Vt hunc ordinem

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18.

Sic diuide.

| 2. 4. 6. | 8. 10. 12. | 14. 16. 18. |

Hic uides, ut neq; 4. neq; 10. neq; 16. possit numerare 36. circulariter.

latiter. Reliquos autem uides posse. Sic 4 non numerat 12, simili ratione.

¶ Item hunc ordinem

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

Sic diuide.

| 2. 4. 6. 8. 10. | 12. 14. 16. 18. 20. |

Hic uides, ut neq; 6. neq; 16. numeret 40. Reliquos autem octo uides posse numerare 40. circulariter.

¶ Item hunc ordinem.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30.

Diuide primo sic.

| 2. 4. 6. | 8. 10. 12. | 14. 16. 18. | 20. 22. 24. | 26. 28. 30. |

Secundo sic eum diuide.

| 2. 4. 6. 8. 10. | 12. 14. 16. 18. 20. | 22. 24. 26. 28. 30. |

Vides hic ut 60 non possint numerare numeri hi,

4. 10. 16. 22. 28. 6. 26.

Reliqui octo numerant 60. circulariter, uidelicet.

2. 8. 12. 14. 18. 20. 24. 30.

Et sic de alijs.

Patet ex his, cur omnes termini Progressionis parium, cuius extremus est pariter par, numerēt duplarem illius pariter paris. uidelicet numerus terminorū semper est de pariter pari, qui nullam partem habent aliquotam imparem incompositam.

¶ Dato numero cellularū ambitus, inuenire latus quadrati, cuius est ille ambitus.

Diuide ambitū per 4. & ad quotientem adde unam unitatem.

¶ Ambitum quadrati inuenire ex latere quadrati.

Subtrahe unitatem de numero lateris unius, & multiplica residuum per 4.

Cum 8 numerat 18, obmittuntur tres cellulæ, post quamlibet numerationem. Et cum 6 numerat 18, intercalatur 7. Et dum 2 numerat, 15 est intercalaris. Nam sicut 4 obmittitur, ut nõ numeret, ita 11 obmittitur, ut non intercaletur.

Satis est per hæc Indicata & explicata circularis numeratio.

De Progressionibus Arithmeticis. Cap. III.

HVIT præcedentis capitis tractatio de numeris in se, & in suis partibus consideratis. Sequentia uero capita, erunt de admirandis numerorum uicibus, id est, de Progressiõibus seu ordinibus numerorũ.

Inter species autem innumerabiles progressionum, duæ sunt præ alijs utiles, atq; in frequentiori usu uersantur uidelicet species Arithmeticarum Progressionum, & Geometricarum. De Arithmeticis prius dicam.

Arithmetica Progressio, est successio numerorum progredientium secundum æquales differentias, ut hic uides.

4. 4. 4. 4. 4. 4.

3. 7. 11. 15. 19. 23. 27. &c.

Hoc autem uide, ut in qualibet Progressione Arithmetica, differentia communis, addita termino extremo, cõtinuet ipsam Progressionem. Et hæc est regula progrediendi Arithmetice, ut his duobus terminis positis 3. 7. addo differentiam eorum maiori. (id est 4 ad 7) tunc fit terminus debite sequens, uidelicet 11. Iterum addo 4 ad 11. fiunt 15. Et sic deinceps, in hac & in alijs, quibuscunq; Progressionibus Arithmeticis, cõtinuabis eas.

Videntur forte hæc inutilia esse, ut sunt facilia. Sed ex Geometricis Progressionibus ostendam suo loco, quàm sint hæc utilia atq; iucunda.

¶ Regula qua uniuscuiusq; Progressionis Arithmeticæ termini in unam summam redigantur.

Adde terminos, Progressionis Arithmeticæ, extremos, ad se.

& aggregati partem dimidiam multiplica per numerum locorum, tunc proueniet summa omnium terminorum Progressionis dispositæ, ut

3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24.

3 ad 24. facit 27. Huius dimidium facit $\frac{27}{1}$ quod multiplica per 8 (eo quòd sint termini octo, seu loca 8.) facit 108. summam Progressionis illius.

Sufficit hæc regula etiam pro inuentione arearum Polygonalium superficierum, talium, quales Boetius ponit, uidelicet trigonalium, pentagonalium, hexagonalium superficierum.

¶ Sic operare.

Primo resolue tuam Polygonalem aream in suam Progressionem Arithmeticam (quælibet etiam earum constat ex terminis, Progressionis alicuius Arithmeticæ, simul collectis) hoc modo.

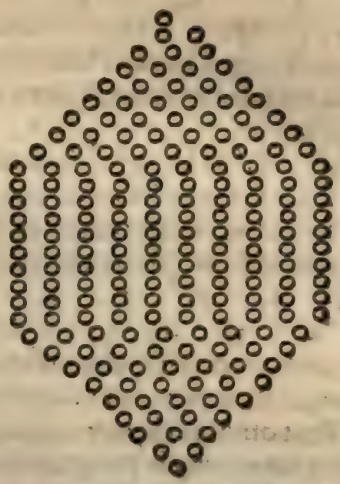
De numero angulorum (seu laterum) subtrahe unitatem, tunc unitas erit terminus primus illius Progressionis, & residuum illius subtractionis (id est numerus unitate minor, quàm sit numerus angulorum tuæ Polygoniæ) erit terminus secundus. Poteris iam continuare tuam Progressionem per quot terminos libet. Sed uide quot puncta habeat unum latus tuæ Polygoniæ. Nam tot terminos constituendi sunt in illa tua Progressione, quot puncta habuerit tua Polygonia in uno latere. Constituta uero, secundum hæc, tua Progressione, utere regula superius iam data, qua ex omnibus terminis, unam summã facias. Et ea summa erit area tuæ Polygoniæ.

¶ Exemplum.

Sit hexagonus Arithmeticus, cuius latus unum habeat puncta 10. ut hic uides. Subtraho 1 à 6. (eo quòd sit hexagonus) remanet 5. Erunt ergo duo priores termini Progressionis faci

nis faciendæ, duo hi, 1. 5. Sic ergo ſtabit Progreſſio fienda.

1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29. 33. 37.



Hos decem terminos ſi collige in unam ſummam, per regulam ſuperius datã, tunc inuenies 190. Et tanta eſt area huius hexagoni quẽ poſui. Et ſic in alijs operaberis ſimiliter.

Interciſæ Progreſſiones, ut hæ ſunt.

1. 2. 1. 2. 1. 2 1.
4. 5. 7. 8. 10. 11. 13. 14. &c

Item.

2. 4. 2. 4. 2. 4. 2.
11. 13. 17. 19. 23. 25. 29. 31. &c.

Item

¶ Item hæc.

3. 6. 3. 6. 3. 6.

15. 18. 24. 27. 33. 36. 42. &c.

non sunt Progressiones Arithmeticæ propriè. Habent tamen suos usus (ut uidebimus in capite de Proportionibus) licet ita sint interciſæ.

¶ De Progressione naturali numerorum.

NAturalis numerorum Progressio, est Progressio Arithmetica progrediens ab unitate per binarium ad reliquos numeros secundum differentiam unitatis. ut

1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. &c.

Notum autem est quàm in frequenti usu sit hæc Progressio, apud omnes homines, etiam apud pueros &c.

Et sicut omnia solemus numerare hac Progressione, ita etiã per eam numeramus proportiones proportionalitatum, in qua re mirifice seruit Algebræ.

Longum autem esset nimis, recensere usus eius uarios. Et nemo est qui hoc satis præstare posset. Exempla autem usus eius, frequenter occurrent nobis in hac mea Arithmetica, ut de alijs negotijs taceam. Est autem Progressio illa naturalis numerorum, fons & origo omnium speculationum Arithmeticarũ &c.

Huius Progressionis termini nouem priores, singuli una figura scribuntur, & nonaginta sequentes binis figuris scribuntur, deinde noningenti sequentes termini, tribus scribuntur figuris, Et sic deinceps iuxta hanc Progressionem Geometricam.

9. 90. 900. 9000. 90000. &c.

¶ De Progressione naturali numerorum parium.

Si de Progressione numerorum naturali deleantur termini locorum imparium (ut primus, tertius, quintus &c.) tunc relinquitur Progressio numerorum parium, ut hic uides.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. &c.

Habet hæc Progressio usum egregium in Geometria. Respondet

ſpondet autem ordini Polygoniarum ſic, ut facile ex hac Progreſsione dicere poſsis, de qualibet Polygonia, quot angulis rectis, ualeant omnes anguli eius. Vt (exempli gratia) 10 eſt quintus terminus Progreſsionis huius, et Heptagonus eſt ſub quinta ſpecie Polygoniarum. Itaq; ſeptem anguli, cuiuslibet heptagoni, ualent angulis rectis decem. Sic omnes anguli cuiuslibet Hexagoni, ualent angulis rectis octo, Sic enim 8. eſt terminus quartus Progreſsionis parium, quemadmodum Hexagonalium ſpecies, quarta eſt inter ſpecies Polygonalium. Et ſic de alijs.

¶ De Progreſsione naturali numerorum imparium.

Si de Progreſsione naturali numerorum, deleantur numeri locorum parium (ut ſecundus, quartus, ſextus, &c.) tunc relinquitur Progreſsio naturalis numerorum imparium, ut hic uides.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. &c.

Hæc Progreſsio numerorũ imparium, omnes complicat Progreſsiones Geometricas, numerorum integrorum, quæ ab unitate incipiunt, & excipiuntur ſolummodo radices Progreſsionũ id eſt, numeri ſecundo loco ponendi.

Quadratos eñ numeros omnes cõpræhẽdit hoc modo. Duo termini primi, id eſt, 1 & 3. faciunt quadratum binarij. Tres termini primi, id eſt 1.3.5. faciunt quadratũ ternarij. Quatuor termini primi, faciunt quadratum quaternarij, ut 1.3.5.7. faciunt 16. Et ſic deinceps.

Neceſſe aũt eſt in qualibet Progreſsione Geometrica ab unitate incipiente, in tertio loco poni quadratum, deinde in quinto, ſeptimo, nono &c. ſemper inuenies quadratos, ut non ſit neceſſe dicere de numeris illorum locorum.

Cubicos numeros ſingulos, etiam compræhẽdit, hoc modo, Vnitas reputatur pro primo cubo. Deinde duo termini ſequentes, id eſt, 3 & 5. faciunt Cubum binarij, id eſt 8. Deinde tres ſequentes termini, uidelicet 7.9.11, faciunt Cubum ternarij. Deinde quatuor termini ſequentes 13.15.17.19, faciunt Cubum quaternarij. Et ſic deinceps. Neceſſe eſt autem in omni Progreſsiõe

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Geometrica, ab unitate incipiente, in quarto loco poni Cubũ, & deinde in septimo, decimo, decimotertio &c. semper inuenies Cubum, ut non sit necesse de numeris locorum illorum dicere.

Surdesolidum numerum, id est, sexti loci numerum, Item undecimi, sedecimi &c. Sic inuenies compræhendi in prædicta Progressione. Vnitas reputatur pro primo Surdesolido. Deinde obmittitur unus terminus, & bis duo termini sequentes faciunt Surdesolidum binarij, ut 5. 7. 9. 11. faciunt 32. Deinde obmittuntur tres termini sequentes, uidelicet 13. 15. 17. Et ter tres termini sequẽtes, faciunt Surdesolidum ternarij, ut 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33. 35. Faciunt 243. Deinde obmittuntur termini sex, uidelicet 37. 39. 41. 43. 45. 47. Et quater quatuor termini sequentes faciunt 1024, id est Surdesolidum quaternarij. Et sic deinceps.

Numeri autem terminorum obmittendorum hac Progressione repræsentantur, cuius differentiæ sunt termini Progressionis naturalis numerorum. Et est Progressio trigonalium superficierum, quæ etiam alios usus habet.

1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36. 45. &c.

Item (ut de Cubis denuo dicam) si de Progressione numerorum imparium, omiseris terminum unum, dabunt tibi duo reliqui Cubum binarij. Cubum ternarij dabunt tibi tres termini, omissis tribus primis. Obmissis uero sex primis, dabunt tibi quatuor termini sequentes, Cubum quaternarij. Et sic seruit illa Progressio etiam Cubis, uidelicet

1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. &c.

Bsurdesolidum, id est, numerum octaui loci, sic inuenies, (Sunt etiam in quintodecimo, & uigesimo secundo loco numeri Bsurdesolidi) Vnitas reputatur pro primo Bsurdesolido. Deinde obmittuntur tres termini, id est 3. 5. 7. Et ex sequentibus bis duobus bis terminis (id est octo his 9. 11. 13. 13. 17. 19. 21. 23 colligitur Bsurdesolidus binarij. Deinde obmittuntur termini quin-

quindecim. Et ex sequentibus terminis, ter tribus ter, (id est, ex uiginti septem terminis) colligitur Bsurdesolidus ternarij. Deinde obmittuntur termini 42. Et ex sequentibus, quater quatuor quater, terminis colligitur Bsurdesolidus quaternarij. Et sic deinceps in infinitum.

Numeri autem terminorum obmittendorum hac Progressione repræsentantur.

3. 15. 42. 90. 165. 273. 420. &c.

Differentiæ faciunt quadratos triplicatos, quod dico, ut intelligas rationem huius Progressionis, & modum progrediendi.

¶ Alia ratio Progressionis huius sic habetur.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. &c.
1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36. &c.

1. 15. 42. 90. 165. 273. 420. 612.

Vides Progressionem priorem esse numerorum imparium. Posteriorem uero esse trigonalium superficierum. Si iam multiplicentur termini eorum inter se, ita ut primus terminus unius Progressionis multiplicetur in primum terminum alterius Progressionis, Et secundus unius in secundum alterius, Et sic deinceps, tunc efficitur Progressio illa prædicta seruiens Bsurdesolidis numeris.

¶ De numeris Polygonalibus, & eorum Progressionibus.

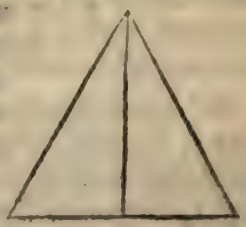
Polygonalium numerorum paulo superius obiter facta est mentio. Euclides autem solummodo tetragonalium numerorum mentionem facere uoluit, eo quod illi solummodo respondeant Geometricis figuris. Trigonales uero numeri & Pentagonales, Hexagonales, & reliquarum specierum Polygonales numeri, non respondent Geometricis figuris, id quod paucis hoc loco uolo ostendere.

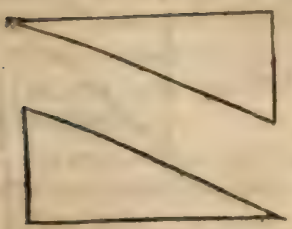
Tetragonalis numerus sic depingitur, uel sicut superius uidisti quadratum depictum. Respondet autē Geometricis quadratis. Nam latus Tetragonicum in seductum, aream producit, sicut hic quoq; fieri uides ut 10 in se multiplicata faciant 100.

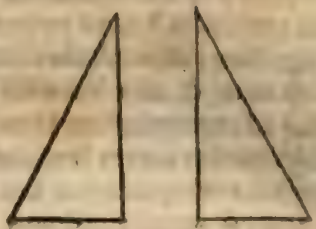
o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o
o o o o o o o o o o

Trigonalis numerus ita depingitur. Vnde si latus unum faciat 10. faciet area 55. In Geometricis autem, si triangulus æquilaterus habeat latus unum quod faciat 10, faciet area non plene 44. Itaq; non respondent Arithmetici trigoni, trigonis Geometricis. In Geometricis sic habet regula triangulorum æquilaterorum. Dimidium unius lateris, multiplicatur in lineam erectam à medio basis, ad oppositum angulum orthogonaliter, Et hoc productum facit aream trianguli æquilateri. Ratio regulæ huius satis ostenditur ex his figuris sequentibus.

o
oo
ooo
oooo
ooooo
oooooo
ooooooo
oooooooo
ooooooooo
oooooooooo

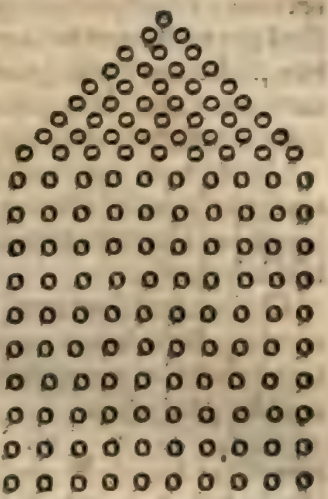


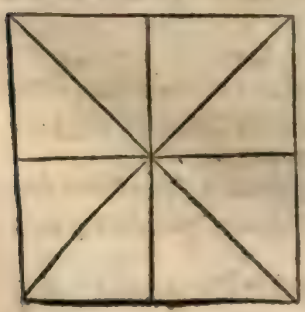




Scilicet omnis triangulus æquila terus resoluitur in duos orthogonios, qui constituant unum quadrangulum rectangulum &c,

Pentagonalis numerus ita depingit. Vnde si latus unũ faciat 10. faciet areapentagoni 145. In Geometricis aũt si latus pẽtagoni æqlateri faciat 10. faciet area totius pentagoni aliquantũ plus q̃ 172. Itaq; nõ respõdent Arithmetici pentagoni Geometricis pentagonis. Et nihil est quod contentiosi contra hæc dicant. Mea ratio solida est.





Quælibet autem Polygonia æquilatera, resoluitur in tot triangulos orthogonios, ut numerus ille orthgoniorum duplus sit ad numerum laterum Polygoniæ, ut uides in figura hac quadrata, continerí octo orthogonios, cum latera quadrati illius sint 4. Sic in pentagono uideres decem orthogonios, & in hexagono duodecim &c.

Regula ergo Geometrica est generalis, ut ducta linea à centro figuræ Polygonicæ, ad medium alicuius laterum eius, & alia linea ab eodem centro ad extremitatem lateris eiusdem. Figurato autem hoc modo orthogonio, multiplicantur latera eius duo inter se, quæ continent angulũ rectum. Multiplicaturq; productũ illud per numerum laterum Polygoniæ, scilicet in Pentagono multiplicatur per 5. In Haxagono per 6. Et sic de alijs. Et ratio regulæ huius satis clara est ex figuris illis superius positis.

Hexagonus Arithmeticus, si unum latus fuerit 10. tota area faciet 190. At Hexagonus Geometricus, cuius unum latus fuerit 10. facit tota area plus aliquantum quàm 259. Et sic de alijs Polygonijs.

Quemadmodum uero Progressio imparium numerorum, complicat quadratos numeros singulos, ita naturalis Progressio numerorum, complicat trigonalis numeros singulos. Siceti am hæc progressio

0. 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22 &c.

complicat singulos numeros Pentagonales. Et hæc sequens Progressio, complicat singulos numeros hexogonales eodem modo.

1. 5. 9. 13. 17. 21. &c.

Et sic de alijs Progressionibus Arithmeticis numerorum integrorum, ab unitate incipientibus, per quas numeri Polygonales Boetij, optime tractantur & proponuntur.

Quacunq; enim Progressione tali proposita, produces semper Polygonalem numerum, ex quibuscunq; terminis primis positæ Progressionis.

Denominatio Polygonalium, quos fert Progressio posita, colligi-

colligitur ex duobus terminis primis additis, id est, ex unitate & termino immediate sequenti.

Polygonalis numerus, superficialiter descriptus, tot habebit in uno latere puncta, ex quot terminis Progressionis suæ, ipse colligitur.

Et uicissim, numerus tuus Pplygonalis, constat ex tot terminis Progressionis suæ, quot ipse in uno suorum laterum puncta habet.

Si autem proponatur numerus Polygonalis, per figuras suas scriptus, & quæstio fiat de eo, quot uidelicet terminos complicet de sua progressione (ut hoc numero Pentagonali proposito 176.) Hac utere regula.

Numerum propositum multiplica per differentiam Progressionis tuæ duplatam, producto adde unitatem. Subtrahe dimidiatam differentiam tuæ Progressionis à radice quadrati prædicti aggregati, Tunc remanet semper extremum maius tuæ Progressionis. Reliqua patent ex dictis superius.

De numeris Pyramidalibus, & de Progressionibus eorum.

Pyramidalium Arithmeticalium mentionem nullam facere uoluit Euclides, eo quòd non respondeant Geometricis Pyramidibus. Habent etiam numeri Pyramidales suas Progressiones, ut.

Ista est Pyramidalium trigonalium Progressio, quæ & alios usus habet, ut partim uidimus superius, & partim inferius uidebimus, præsertim in tabula extractionum radicum &c.

2. 3. 4. 5. 6. 7. differentiæ.
1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. &c.

Pyramidalium tetragonalium Progressio.

3. 5. 7. 9. 11. differentiæ.
1. 4. 9. 16. 25. 36. &c.

Pyrami

¶ Pyramidalium pentagonalium Progreſsio.

4. 7. 10. 13. 16. differẽtiæ,
1. 5. 12. 22. 35. 51. &c.

Et ſic de alijs in infinitum

Pyramidalis numerus conſtat ex tot terminis Progreſsionis ſuæ, quot ipſe in uno latere lineali puncta habet.

Progreſsione Pyramidalium propoſita, producitur Pyramidalis numerus, ex additione quotcunq; terminorum primorũ. Et hinc eſt, ut prædictæ Progreſsiones dicantur Pyramidalium Progreſsiones, cum tamen ſingulis terminis Polygonales numeros ferant.

Denominatio Pyramidalium numerorum quos fert progreſsio aliqua Pyramidalium, modo iam oſtenſo, ſumitur iuxta terminum Progreſsionis ſecundum, ut ſatis uides Pentagonalium Pyramidalium Progreſsionem in loco ſecundo ponere 5 &c.

Vt autem fiant Progreſsiones illæ Pyramidalium, ſatis ſignificãt differentiæ terminorum, quas ea ratione exprimere uolui, unà cum ipſis terminis, ut hoc uideres.

¶ Sequitur mirabilis tranſpoſitio terminorum Progreſsionum Arithmeticarum.

PRogreſsio Arithmetica, ſi habeat terminos ſecundum numerum aliquem quadratum, id eſt, ſi habeat terminos 9. aut 16. aut 25. aut 36. &c. (Nam 4 uolo eſſe reiectum) poterunt termini eius ſub figura quadrata, ita tranſponi, ut eadẽ ſumma ſemper prouenìat, ex Additione omnium terminorum, in uno latere inuentorum, ſiue latus ſumatur ſecundum latitudinem, ſiue ſecundum longitudinem. Voco autem hoc loco latus, non ſolum extremas lineas cellularum, ſed omnes etiam intermedias, imò diametros etiam ambas uolo intelligi, ut in exemplo ſequenti, inuenies nouem lineas, ſecundum longitudinem acceptas, et nouem alias ſecundum latitudinem. Deinde ſunt duæ diametri. Harum linearum quælibet proferet tibi hunc numerum 369. ſi omnes numeros eius in unam ſummam, per additionẽ, colligas.

Sic

16	81	79	77	75	11	13	15	2
78	28	65	63	61	25	27	18	4
76	62	36	53	51	35	30	20	6
74	60	50	40	45	38	32	22	8
9	23	33	39	41	43	49	59	73
10	24	34	44	37	42	48	58	72
12	26	52	29	31	47	46	56	70
14	64	17	19	21	57	55	54	68
80	1	3	5	7	71	69	67	66

Sic operare.

Incipe ab ambitu maximo seu primo: & illo repleto suis numeris, recipe sequentem. & sic deinceps.

Sic autem replebis ambitum primum, & deinde singulos eodem modo. Numera cellulas ambitus, ut secundum numerum cellularum recipias numerum terminorum, de tua progressione. Dimidiam autem partem terminorum recipiendorum, recipe de minimis seu de primis terminis. Et alteram partem dimidiam recipe de maximis seu de ultimis terminis.

Ambitus primus.

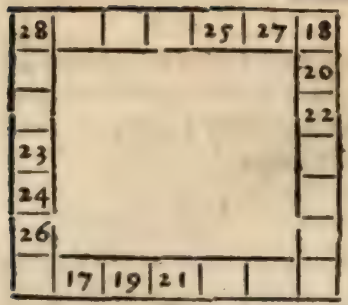
Vides ut dimidia pars terminorum minimorum impariū, in latere infimo progrediatur.

Alteram partē dimidiam horum, uides ponere primū terminū suum intra cellulam mediā sinistri lateris, & reliquos in supremo latere.

Deinde uides ut pars dimidia terminorum minimorū pariū, descēdat in latere dextro.

Vides etiam alteram partem dimidiam horum, descendere in sinistro latere, & maiorē suum ponere intra cellulam primā.

Secundus ambitus.



Satis uides, ut unica sit regula in quolibet ambitu replẽdo, si habeat latera imparium cellularũ.

Sequitur de Dispositione terminorum maiorum.

Satis iam indicaui, ut minores termini intra cellulas suas collocentur, restat ergo, ut ostendam idem de maioribus.

Vacuæ aũt cellulæ (quas uidisti in superioribus figuris duabus, & quas inferius uidebis) debentur terminis maioribus. Nam quòd in quolibet ambitu tot uides uacuas cellulas, quot repletas esse uides, signum est quemlibet terminum ex minoribus, respicere unum aliquem terminum ex maioribus. Eum autem maiorem quem respicit minor, reponendum esse scito, intra cellulam ipsi minori oppositam. Sic enim uides, & infrà etiam uidebis, cuilibet minori termino uacuã cellulam opponi. Angulares autem cellulæ sese respiciunt diametraliter.

Facile uero est inuenire maiorẽ quemlibet ex suo minore.

Ita operare.

Minimum terminum totius progressionis, adde ad maximum terminum eiusdem progressionis (ut in posito exemplo 1 & 81 faciunt 82.) aggregatum serua, ut quod utile tibi sit futurum, per omnes ambitus totius exempli. Itaq; numeris minoribus dispositis intra ambitum suum, uacuas cellulas residuas sic replebis. Subtrahe de minoribus unumquẽq; ab aggregato reseruato (de quo iam dixi. i. de 82 in exẽplo hoc) tunc semper relinquitur maior terminus, quem minor ille subtractus respicit

cit: ut in hoc ambitu, exempli positi, tertio, uides poni maiores obmissis minoribus.

☞ Ambitus tertius.

Quilibet ex maioribus his, subtractus ab 82. relinquit minorem suum.

Quemadmodum autem impares minores progrediunt per infimum latus & supremũ, ita maiores impares regrediuntur. (id est, gradiuntur retrorsum) per infimum latus & supremum. Et quemadmodum pares minores descendunt per dextrum latus & sinistrum, ita maiores pares ascendũt per eadem latera. Sed hæc in maiori aliquo ambitu clarius perspiciuntur.

☞ Ambitus quartus.

40	45	38
39		43
44	37	42

Iste est ambitus quartus & ultimus, cuius minores termini sunt hi quatuor. 37. 39. 38. 40.

Maiores sunt:

43. 45. 42. 44.

Relinquitur tandem media cellula, intra quam ponatur medius terminus, totius progressionis, ut hic est 41.

Medius terminus prouenit & dimidiatione aggregati, collecti ex additione maximi termini & minimi progressionis: ut 81 & 1 faciunt 82. cuius dimidium est 41.

Medius terminus multiplicatus per dimidiũ numerum cellularum unius lateris, producit summam numerorum existentium in unoquoq; latere; ut 41 per 9. facit 369. habet cũ unum latus nouem cellulas.

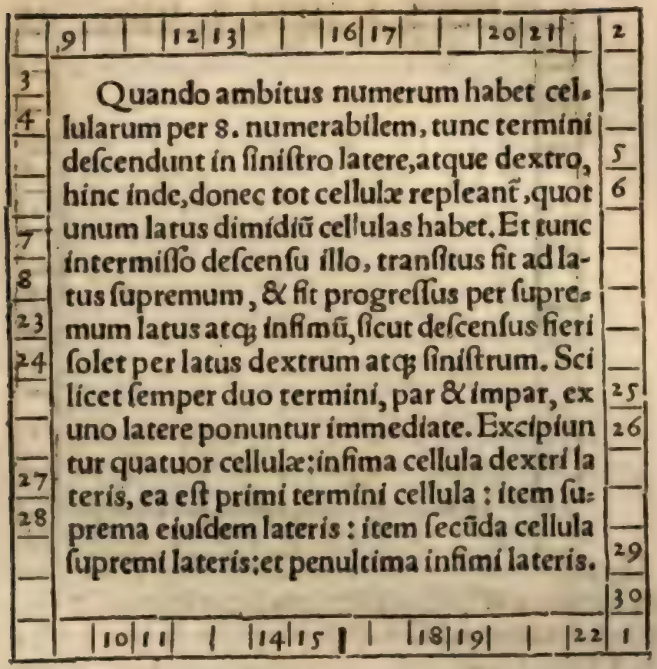
Sequitur Quadratura cellularum sub numero pari.

HActenus de quadratura cellurarum sub numero impari. Videamus nunc etiam de quadratura cellularum sub numero pari. In illud autē negotium ponam exemplum, quo explicabo rem hanc uniuersam. Exemplum quod ponam facit in qualibet linea 2056. Et prouenit ille numerus etiam, si aggregatum collectum ex additione maximi termini & minimi, multiplicetur per numerum cellularum dimidiatum, qui est in uno latere: ut 257 per 8. facit 2056. Habet enim unū latus sedecim cellulas, ut uides.

Exemplum.

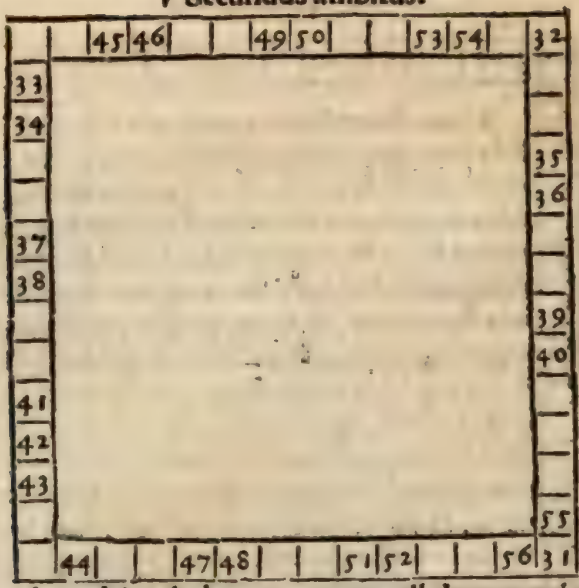
256	9	247	246	12	13	243	242	16	17	239	238	20	21	235	2
3	226	213	45	46	210	209	49	50	206	205	53	54	201	32	254
4	33	200	63	193	192	66	67	198	188	70	71	185	58	224	253
252	34	59	178	169	89	90	166	165	93	94	161	80	198	223	5
251	222	60	81	160	101	155	154	104	105	151	98	176	197	35	6
7	221	196	82	99	146	141	117	118	137	112	158	175	61	36	250
8	37	62	174	100	113	130	123	122	133	144	157	83	195	220	249
23	38	73	173	107	114	129	126	127	132	143	150	84	184	219	234
24	218	183	85	108	115	125	130	131	128	142	149	172	74	39	233
232	217	75	86	148	138	124	135	134	121	119	109	171	182	40	25
231	41	76	87	147	145	116	140	139	120	111	110	170	181	216	26
27	42	180	162	159	156	102	103	153	152	106	97	95	77	215	230
28	43	179	177	88	168	167	91	92	164	163	96	79	78	214	229
228	202	199	194	64	55	191	190	68	69	187	186	72	57	55	29
227	225	44	212	211	47	48	208	207	51	52	204	203	56	31	30
255	248	10	11	245	244	14	15	241	240	18	19	237	236	22	1

¶ Primus ambitus.



Finito autem progressu prædicto per latus supremū & infimum, repetitur descensus ille prius intermissus. Intermittitur autem semper in sinistro latere, & illic iterum repetitur. Hinc fit, ut quatuor celllulas cōtinue uideas repleri, & ex alio latere quatuor uacuas.

Secundus ambitus.



Quando ambitus habet numerum cellularum qui est impariter par, tunc fit descensus hincinde (ut superius dictum est) donec una solummodo cellula supersit, ex ijs quæ minoribus terminis debentur in dextro & sinistro lateribus. Finitur autem descensus ille in sinistro latere tribus terminis immediate positis. Quo sic finito, fit transitus ad infimum latus. Et inde fit progressus per supremum & infimū latera hincinde, ut in superiori ambitu dictum est, atq; ut hic uides. Dum autē ad finem illius progressus perueneris (.i. ad penultimā cellulam infimi lateris) non pones intra illam, terminum illum, quem ordo progressionis tangit, sed pones eum intra cellulā in descēsu intermissam, id est, intra penultimā cellulam dextri lateris; sequentem uero terminū pones intra penultimā illam cellulam infimi lateris.

Vides igitur hic, ut quinq; cellulæ solitarios numeros excipiant: uidelicet infima, penultima, suprema, dextri lateris: secunda & penultima infimi lateris.

Tertius ambitus.

Quando ambitus numerum habet cellularū, numerabilem per 4. & non per 8. tunc eadem fiunt per omnia, quæ in ambitu fiunt, cuius latus unum per octo numeratur (ut fuit primus, & quintus) hoc solo excepto, q̄ intermissio descensus, non fit cum duobus terminis in uno & eodem latere ponendis, sed prius ponitur unus solitarie in dextro latere, & deinde finit sequens terminus solus partem illam descensus, uidelicet in sinistro latere. Idem fit dum descensus repetitur. Ponitur enim unus primo in sinistro, & deinde sequens ponitur in dextro latere: atque ita octo ponuntur solitarie.

Satis autem uides quæ sint illæ octo cellulæ, quæ solitariæ excipiant terminos minores, Scilicet, infima & suprema dextri lateris: item secunda supremi lateris, & penultima infimi lateris; deinde quatuor illæ, de quibus dictum est paulo superius.

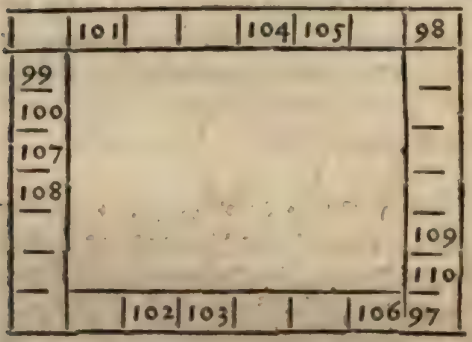
Quartus

¶ Quartus ambitus.

Iſte ambitus ſimilis eſt ſecundo: nec enim dabilis eſt ambitus qui differat ab illis ſuperioribus amplius, in ratione diſponendi ſeu trãſponendi terminos, niſi ſingularis ille ambitus qui ambit quadratum quatuor cellulaꝝ, cuius uidelicet unum latꝰ habet quatuor cellulas.

¶ Habent igitur ambitus omnes impariũ laterũ ſolum unũ modum diſpoſitionis ſeu regulam unam, ut ſatis dictum eſt. At ambitus parium laterum, habent tres modos, ſeu tres regulas diſponendi terminos. Videlicet aliter fit diſpoſitio dum latera numerantur per 8. Et paulo aliter dum non per 8. ſed per quatuor numerantur. Item aliter, dum neqꝫ per 8 neqꝫ per 4. ſed per 2 numerantur.

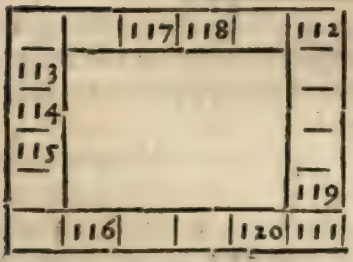
¶ Quintus ambitus.



Iſte ambitus eſt ſimilis primo: numeratur enim latus unum octonario. hoc eſt, numeratur ſeipſo octonarius.

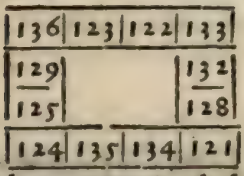
Sextus

¶ Sextus ambitus.

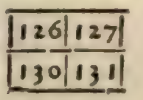


Et ambitus ille similis est secundo & quarto.

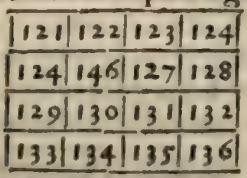
¶ Septimus ambitus.



¶ Medij numeri.



Quãdo peruenerís ad ultimũ ambitũ, qui uidelícet ambit quadratum quatuor cellularum, tũc repone 16. terminos tuæ progressiõis, qui restãt, suo ordine, ut uides factũ in sequẽti figura.



Ambitus aũt ille, qui quadratum quatuor cellularum ambit, sola cõmutatione angularium numerorũ sese respicientium, adæquat latera sua inter se. At propter quadratum quatuor cellularum, (quod numeros suos seruat ĩmutabiliter, in quatuor suis cellulis, quemadmodum ordine fuerant repositi quatuor numeri ad cellulas illas) necesse est ut etiam intermedij commutentur. Commutatur ergo primus cum ultimo, & quartus cum tertio decimo, & secundus cum tertio, & quintus cum nono, & octauus cũ duodecimo, & quartusdecimus cũ quintodecimo. Medij autem quatuor (ut dixi) manent tanquam medium unũ, & non commutantur. Hæc omnia uides in ambitu septimo superius posito.

¶ Si progressio Arithmetica inciperet â numero pari, haberetq; progressio illa nihilominus numeros impares, tũc omnia quæ dixi de terminis imparibus, intelligẽda essent de terminis paribus: & quæ dicta sunt de terminis paribus, intelligenda essent de terminis imparibus.

Si autem progressio nullum haberet imparem, tunc ea quæ dicta sunt de terminis imparibus, accommodanda essent illis terminis paribus, qui in locis imparibus inuenirentur, id est, in loco primo, tertio, quinto, septimo &c̃.

Sic si progressio nullum haberet terminũ parem, tunc ea quæ dicta sunt de paribus, intelligenda essent de illis imparibus terminis, qui inuenirentur in locis paribus, id est, in loco secundo, quarto, sexto, octauo &c̃.

Sufficientia autẽ regularum negotij huius sic colligitur. Aut enim numerũ cellularum (quæ sunt in uno latere ambitus) numerat quaternarius, aut nõ numerat. Si numerat, tunc aut pari numero numerat (ut latus primi ambitus in secundo exemplo, & latus quinti ambitus in eodem exemplo secũdo) aut impari numero numerat, ut latus tertij ambitus in secundo exemplo. Si non numerat, tunc numerus ille à quaternario non numerabilis, aut est par (ut est in latere secũdi ambitꝰ, & in latere quarti ambitus, & in latere sexti ambitus, in exemplo secundo) aut est impar, ut est in quolibet latere primi exẽpli per oẽs ambitus.

¶ Respondent etiam speculationi huic, progressiones Geometricæ; in qua re sufficiant duo exempla quæ ponam.

Primum exemplum, de quadrato cellulato pari, sedecim cellularum.

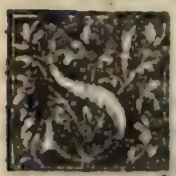
32768	4	2	4096
256	32	64	2048
16	512	1024	128
8	16384	8192	1

Secundum, de quadrato cellulato impari, nouem cellularum. In illis autem non additionibus, sed multiplicatiõibus agendum est, ut proueniat æqualitas laterum inter se: ut 8 in 256 bis, faciunt, quantum 4 sedecies in 64. &c̃.

8	256	2
4	16	64
128	1	32

Vides autem in utroq; exemplo, progressionem duplæ proportionalitatis.

De progressionibus Geometricis, Cap. IIII.



EQVVNTVR post Arithmeticas progressiones, Geometricæ, recto ordine, nisi quòd proportionum tractatio potuisset interponi, eò q̃ progressiones Geometricæ, nihil aliud sint, quàm proportionalitates, id est, proportionum continuationes æqualium: ut in hac progressione 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. succedit proportio dupla, proportioni duplæ, per omnes terminos continue. Sed propositum hoc loco est, solũmodo ponere progressiones numerorum integrorum, sub genere proportionalitatis multiplicis, quatenus numerorum solidorum appellationes, & alia quædam ad Algebram & irrationalium numerorum tractationem utilia, possem exponere. Quare proportionum tractatione hoc loco non est opus.

Eximiam uero laudem merentur Geometricæ progressiones, uel ex hoc, quòd Cossa seu ars Gebri, nihil aliud est, quàm calculatio per progressiones Geometricas: quæ tum tanta est, ut omnium Arithmeticorum regulas calculandi complicet, immensum quoq; usum habeat in Geometricis, &c̃.

Sub genere uero multiplici sunt infinitæ species progressionum. Quædam enim uocantur duplæ proportionalitatis progressiones, ut hæc est, 3. 6. 12. 24. 48. 96. &c. Quædam uo-

cantur triplæ proportionalitatis,ut hæc, 2. 6. 18. 54. 162. &c. Quædam quadruplæ,quædam quintuplæ: & sic in infinitum.

Sciendum tamen, quòd progressiones Geometricæ, nisi ab unitate incipiant,modicum usum habent.Omnes autem Geometricæ progressiones, subiacent regulæ quæ sumpta est ex Euclidis penultima noni, siue ab unitate incipiant, siue à numero,uel minutia.

Ea autem regula,docet terminos progressionis geometricæ in unam summam contrahere. Sic uero præcipit. Multiplica maximum terminum per numerū denominantem tuam progressionem. id est, per numerum qui producitur ex diuisione minimi in sibi proximum.Subtrahe minimum terminum ab eo qui sibi est proximus, & uocetur hoc relictum,Relictum minus. Subtrahe etiam minimum terminum à producto prius facto per multiplicationem: & uocetur relictum hoc, Relictum maius. Deinde multiplica terminum minimum in relictum maius,& productum diuide per relictum minus,tunc prouenit summa terminorum tuæ progressionis Geometricæ, qualiscunq; sit.

At pro progressionibus, quas hoc loco tractandas suscepi, breuioribus traditur regula. Multiplica ultimum terminum per numerum denominātem tuam progressionem, à producto subtrahe primum terminum, relictum diuide per numerū unitate minorem illo numero,qui tuam progressionē denominat, & habebis summam.

¶ Regula continuandi progressiones.

Item ad omnium generum & specierum progressiones Geometricas, pertinet hæc regula faciendi & cōtinuandi ,pgressiones: uidelicet. Quacunq; ,pportione proposita,diuide terminū posteriorem per priorem: quotientem autem illum multiplicabis in terminum posteriorem,atq; hac multiplicatione produces terminum tertium. Quo multiplicato per eundem quotientem, produces quartum terminum; ex quarto produces quintum

tum, & sic deinceps in infinitum. Habes iam totum negotium progressionum, nisi q̃ species proportionum & exempla reseruantur in alium locum.

Sed de ijs mihi restat dicendum, quæ ab unitate incipiunt. In omni progressione Geometrica ab unitate incipiente, dicitur radix progressionis ille numerus, qui unitatem immediate sequitur, eò quòd omnes termini illius progressionis sequentes ex eo termino excrescant tanquam ex radice. Si enim radix bis ponatur, fiatq; ita multiplicatio, tunc oritur terminus tertius, qui radicem immediate sequitur. Si radix ter ponatur, oritur terminus quartus. Si quater, oritur terminus quintus: & sic in infinitum.

Et hic uide, ut progressio naturalis numerorum seruiat progressionibus Geometricis; ut,

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. &c.

Primo hoc quod in Geometricis progressionibus est unitas, in Arithmeticis progressionibus est cifra. Quòd autem 2 supraponitur termino tertio, significat ipsum terminum tertium produci, si radix (ut dixi) bis ponatur, atq; ita fiat multiplicatio. Simile est, quòd 3 supraponitur termino quarto, & 4 suprapositur termino quinto: & sic de alijs.

De numeris solidis.

SOlidus numerus est, qui tres dimensiones recipit, unam longitudinis, aliam latitudinis, & tertiam altitudinis: ut 30 constat ex bis tribus quinquies.

Solidorum numerorum quidam sunt regulariter solidi, quidam irregulariter.

Solidi irregulariter sunt, qui ita suas tres dimensiones recipiunt, ut nullam radicem recipiant, cuius multiplicatione aliqua regulari excrescant. Quorum quidam sunt solidi inæqualiter secundum omnes dimensiones, ut sunt numeri qui ex tribus incompositis numeris producuntur: qualis est 30, cuius dimensio

nes sunt 2. 3. 5. Sic 105 constat ex 3. 5. 7. & sic de alijs. Quidã sunt solidi inæqualiter secundum unam dimensionem: ut 24 constat ex 2. 2. 6. quanquam constitui possit inæqualiter secundum omnes dimensiones, Sic 2. 3. 4.

Solidi regulariter sunt, qui radicem aliquam habent, ut sunt omnes numeri progressionis Geometricæ ab unitate incipientis, à termino quarto, in infinitum usq;. Vnde in qualibet progressione Geometrica ab unitate incipiente, unitas ponit loco puncti, & radix ponitur loco lineæ, & tertius terminus ponitur loco superficiei: & reliquorum singuli sunt solidi.

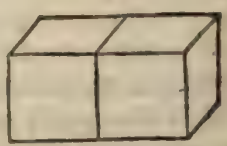
De Cubis.

Primus igitur solidorum est cubus. Cubus autẽ est, qui producitur ex numero ter posito atq; ita multiplicato: ut 2. 2. 2. inter se multiplicati, faciunt 8.

Hæc est autem figura cubi. Et in omni progressione ab unitate incipiẽte, quartus terminus est cubus: quia omnis numerus in quarto loco producit, ex radice ter posita atq; ita mutiplicata.

De Zensizensis.

Terminus qui cubum sequitur, uocatur zensizensus. Respexit autem uocabuli impositor ad modum multiplicationis potius, quàm ad figuram huius soliditatis. Zensum uero uocant, quod nos quadratum uocamus: & zensizensum, quod nos quadratum ex quadrato uocare possemus.

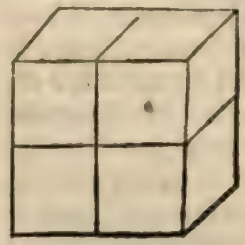


Nam zensizensus nascitur ex radice quater posita atque ita multiplicata, ut 2. 2. 2. 2. facit 16. & idem prouenit ex hac quadrata multiplicatione quadrati 4. 4. Zensizensus autem est linea cuborum, quẽadmodum radix progressionis est linea punctorum. Vnde zensizensus, in dupla progressione est cubus duplicatus, in tripla est cubus triplicatus: & sic de alijs.

De

De Surdesolidis.

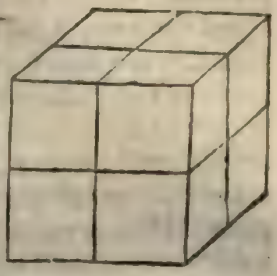
Numerus surdesolidus sequitᵉ zensizensum, non aliter quàm quadratus numerus sequitur radicem. Et tamen raro est numerus quadratus, sed est solidus, & quantum attinet ad radicem quadratam est surdus: attamen suæ speciei radicē habet, id est, surdesolidam, sic uocatam à numero, cuius est radix, ut suo loco dicam latius.



Sicut autem in dupla progressione quatuor cubi (ut hic uides) faciunt unū surdesolidum, sic in tripla progressiōe nouem cubi faciūt unum surdesolidū: & in quadrupla, sedecim cubi faciunt unum surdesolidum, & sic deinceps in infinitum.

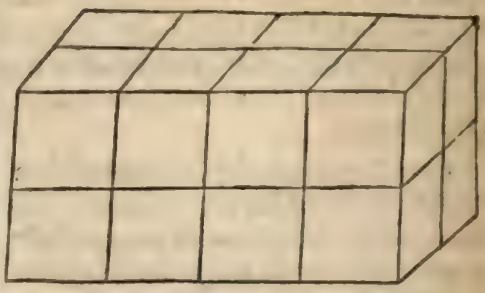
De Zensicubicis.

Zensicubus sequitur surdesolidum, quemadmodum cubus sequitur quadratum seu zensum. Sicut autem in duplæ proportionalitatis progressione 8 cubi faciunt unum zensicubum (ut hic uides) sic in tripla progressione uiginti septem cubi faciunt unum zensicubum: et in quadrupla, 64 cubi faciunt unum zensicubum, & sic deinceps. Vides etiam hic, ut duo surdesolidi faciant unum zensicubum: in tripla uero progressione, faciunt tres surdesolidi unum zensicubum &cē.



Est præterea zensicubus talis numerus, ut simul etiā sit quadratus atq; cubicus: quod enim facit multiplicatio hæc zensicubica, 2. 2. 2. 2. 2. 2 hoc idem facit hæc multiplicatio cubica, 4. 4. 4. Atq; idem facit etiam hæc multiplicatio quadrata, 8. 8.

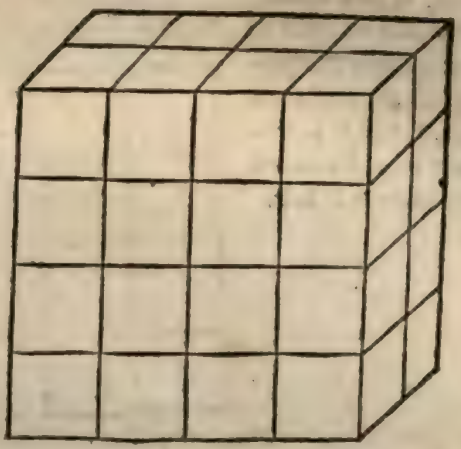
De Bſurdeſolidis.



Quid ſit numerus bſurdeſolidꝰ, ſatis tibi indicat hæc eius figuratio. Eſt autem linea quædam zenſicuboꝝ, quemadmodum radix progreſſionis eſt linea punctorum. Quare ſimilia omnino hic dicenda ſunt (quantum ad figuram attinet) ijs quæ de zenſizēſo (qui eſt linea quædam cuborum) dicta ſunt, paulo ſuperius. Videlicet, quòd Bſurdeſolidus, in dupla progreſſione, eſt duplicatus zenſicubus: in tripla, eſt triplicatus &c̄. Sed quantū attinet ad multiplicationem, ſurdus eſſe inuenitur: raro enim radicem habet quadratam, ut zenſicenſus habet. Licet habeat aliam, talem uidelicet, quæ ab ipſo numero denominetur, ut poſtea dicam, qualium radicum Euclides nullo loco librorum ſuorum meminit: ſcilicet radix ſepties poſita (ut 2.2.2.2.2.2.2.) facit bſurdeſolidum. Aptiſſima aūt hæc appellatio eſt, multis rationibus. Si uocaueris huiuſmodi numeros Bſurdeſolidos, obſcurabit ipſa appellatio rem ſignificatā, cum uox hæc ſonet, quaſi ſit conſtitutio quædā ex binis ſurdeſolidis. Item ſi appelles ſurdeſolidum ſecundum, cogitabit imprudens Lector quandam cohærentiam, uel quandam communicationem eſſe ſecundi cū primo. Deinde ratione ſignorū (de quibus dicam in Algebra) ualde commoda eſt hæc præſens appellatio: & etiam propter ſequentes has ſolidorum appellationes, Cſurdeſolidus, Dſurdeſolidus, Eſurdeſolidus, Fſurdeſolidus, &c̄.

De Zenſi-

De Zenſizenzenſicis.

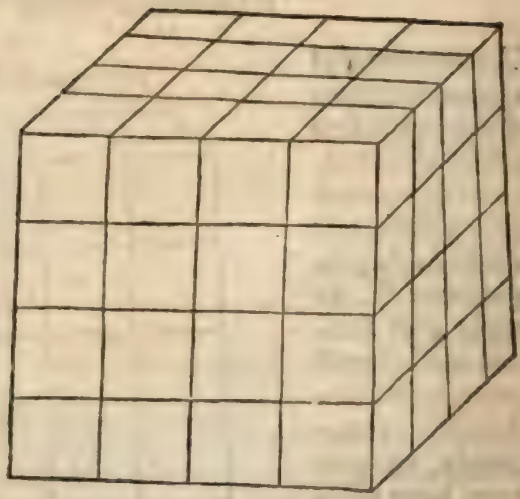


Zenſizenzenſici numeri huiuſmodi ſoliditatis figuras conſtituunt. Sunt autem duo Bſurdeſolidi: ſic em̄ in dupla progreſſione fit. In tripla autē fit unus zenſizēzenſicus ex trib⁹ bſurdeſolidis: in quadrupla, ex quatuor. Item uides unum hunc zenſizenzenſicum cōtinere quatuor zenſicubos, quemadmodum ſurdeſolidus continet quatuor cubos: at in tripla proportionalitate, continet unus zenſizenzenſicus nouem zenſicubos &c̄. Naſcitur uero zenſizenzenſicus ex numero octies poſito atque ita multiplicato, ut hic faciunt, 2.2.2.2.2.2.2.2. 256. & uocatur hæc multiplicatio zenſizenzenſica. Idem autem facit hæc multiplicatio zenſizenſica, uidelicet 4.4.4.4. Item idem facit hæc multiplicatio zenſica ſeu quadrata, 16. 16.

De Cubicubicis.

Cubicubicus numerus habet ſe ad zenſizenzenſicum, ſicut ſe habet cubus ad quadratum. Continet autem hic (tanquam in dupla progreſſione) octo zenſicubos. Nam in tripla continet 27 zenſicubos: & in quadrupla 64. &c.

Est autem cubicubus, etiam cubus, ut patet ex ipsa figura, Item ex multiplicatione: nam 2.2.2.2.2.2.2.2.2. facit 512. Et tantũ facit etiam 8.8.8.



¶ De reliquis solidis.

Sequitur Zensurdesolidus, qui est linea quædam cubicuborum, sicut radix est linea punctorum.

Sequitur Csurdesolidus, qui est tanquam superficies cubicuborum, sicut quadratus est superficies punctorum.

Sequitur Zensizēsicubicus, deinde Dsurdesolidus, deinde Zenbsurdesolidus, &c̄.

Si forte tibi uidetur difficilis illa solidorum numerorum tractatio, expecta donec locus ueniat, ubi de usu eorum dicendum erit. Illic, Deo dante, rem hanc omnem ita clare tradam, ut tu ipse huiusmodi solidorũ appellationes ualde faciliter, per quot libuerit terminos, possis nominare & continuare, quemadmodum iam terminos continuare potes.

¶ Alia notabilia.

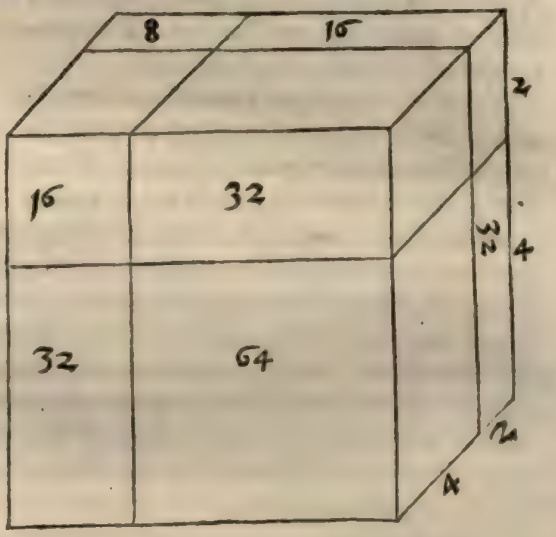
1. ¶ In progressione Geometrica ab unitate incipiente, duo quilibet termini, inter quos mediat unus terminus, aut sunt ambo quadrati, aut quadratis similes.

Et ſi duo illi termini fuerint quadrati, tunc ſi medium duplicatum ſupaddas illis terminis quadratis, tunc aggregatum ex omnibus illis neceſſario etiam fiet quadratum, ut hæc figura ſatis indicat.

4	8
8	16

Item ſi ab aggregato duorũ quadratorum, ſubtrahatur duplatum mediĳ, hoc quod relinquitur, eſt numerus quadratus: cuius radix quadrata, eſt relictum, quod fit ex ſubtractione radicis â radice.

Habent iſtæ ſpeculationes egregios uſus. Nã primo oſtenditur ex priore, modus extrahendi radices quadratas ex numeris rationalibus & binomialibus, ut ſuis locis dicam. Secundo, ex priore & poſteriore ſpeculatione, oſtenditᵉ modus addendi & ſubtrahendi binomiales numeros, ualde utilis. Et præter hæc figura illa propoſitionis quartæ ſecundi Euclidis, uſus habet magnificos ĩ Algebra, ut ſuo loco oſtendam.



2. ¶ In progreſſione Geometrica ab unitate incipiente, duo quilibet termini, inter quos mediãt duo termini, aut ambo ſunt cubici, aut cubicis ſimiles.

Si duo illi termini extremi fuerint cubici, tũc coaceruatio ex illis duobus cubicis, & ex utroq; medio triplicato, fit cubicus, cuius radix cubica sit aggregata ex duabus radicibus cubicis, prædictorum cubicorum minorum.

Item si ab aggregato maioris cubi, & triplato minoris medij, subtrahatur minor cubus, & triplatum maioris medij, hoc quod relinquitur est cubus, cuius radix cubica est relictum, qd fit ex subtractione radicis cubicæ unius ab altera. Habent istæ speculationes usus similes prædictis.

3. ¶ In progressione Geometrica ab unitate incipiente, duo quilibet termini, inter quos mediãt tres numeri, aut sunt ambo zensizensici, aut zensizensicis similes.

Et si duo illi termini fuerint zensizensici, tunc coaceruatio ex illis duobus zensizensicis, & ex medio primo multiplicato per 4, & secũdo medio multiplicato per 6, & medio tertio multiplicato per 4, fit zensizensicus numerus, cuius radix zensizensica sit aggregata ex duabus radicibus zensizensicis prædictorum zensizensorum, ut hic uides.

16	32	64	128	256
	32	64	128	
	32	64	128	
	32	64	128	
		64		
		64		

Item si ab aggregato amborum zensizensorum, & medio secundo multiplicato per 6. subtrahantur quadruplicata reliquorum duorum mediorũ, id est, medij primi & medij tertij, tunc relictum quod relinquitur est zensizensus, cuius radix zensizensica est relictum, quod fit ex subtractione radicis zensizensicæ unius ab altera.

4. ¶ In progressione Geometrica incipiente ab unitate, duo quilibet termini, inter quos mediant quatuor numeri, aut sunt ambo surdesolidi, aut surdesolidis similes.

Et si duo illi termini fuerint surdesolidi, tunc coaceruatio ex illis duobus surdesolidis, & ex mediis duobus, uidelicet primo & quarto, quintuplicatis, reliquis uero duobus mediis, uidelicet secundo & tertio, multiplicatis per 10, fit surdesolidus numerus

rus, cuius radix surdesolida sit aggregata ex duabus radicibus surdesolidis prædictorum surdesolidorū: ut in sequenti figura uidere poteris.

Item si ab aggregato maioris surdesolidi, & medio primo multiplicato per 5, medioq; tertio multiplicato per 10, subtrahatur surdesolidus minor, & medius secundus multiplicatus per 10, & quartus multiplicatus per 5, tunc relictum quod relinquitur, est surdesolidus, cuius radix surdesolida est relictum quod relinquitur ex subtractione radicis surdesolidæ unius ab altera. Et sic de alijs hoc modo in infinitum.

32	64	128	256	512	1024
	64	128	256	512	
	64	128	256	512	
	64	128	256	512	
	64	128	256	512	
		128	256		
		128	256		
		128	256		
		128	256		
		128	256		

Numeros autem multiplicantes medios numeros, inuenies ex tabula, quã ponam capite sequente de radicib. inueniendis.

Vera sunt etiam omnia iam dicta, de duobus quibuscunq; quadratis, & medio suo proportionali. Item de duobus cubicis quibuscunq;, cum medijs eorum duobus. Item de duobus zensizensis quibuscunq;, cum medijs eorum tribus. Item de surdesolidis duobus quibuscunq;, cum quatuor medijs eorum quatuor, &c.

¶ Sequitur utilis quædam tractatio, ut progressioni Arithmeticæ respondeat Geometrica progressio.

1. Additio in Arithmeticis progressionibus, respõdet multiplicationi in Geometricis. Vt, sicut in hac Arithmetica progressione, 3. 7. 11. 15. duo termini extremi additi, faciunt quantum medij ad se additi, utrobiq; enim fiunt 18. Sic in hac Geometrica, 3. 6. 12. 24. duo extremi inter se multiplicati, faciunt quantum medij inter se multiplicati, utrobiq; enim fiunt 72. & sic de infinitis alijs exemplis.

2. Subtractio in Arithmeticis, respondet in Geometricis

diuiſioni. Vt ſicut in hac progreſſione, 8. 13. 18. 23. idem remanet ex ſubtractione primi à ſecundo, quod ex ſubtractione tertij à quarto: ſic in hac progreſſione, 2. 6. 18. 54. idem prouenit ex diuiſione ſecundi per primum, quod ex diuiſione quarti per tertium &c.

3. Multiplicatio ſimplex (id eſt, numeri in numerum) quæ fit in Arithmeticis, reſpondet multiplicationi in ſe, quæ fit in Geometricis. Vt duplatio in Arithmeticis, reſpondet in Geometricis multiplicationi quadratæ, ſcilicet in hac Arithmetica 5. 11. 17. facit duplatio medij, quantum additio extremorum: ſic in hac Geometrica, 4. 6. 9. facit multiplicatio quadrata medij, idem quod multiplicatio extremorum inter ſe. Item triplatio in Arithmeticis, reſpondet multiplicationi cubicæ in Geometricis: ut in ſuperiori exemplo, 5. 11. 17. triplatio medij facit quantũ additio omnium trium, ſic hic 4. 6. 9. multiplicatio cubica medij facit quantum tres inter ſe. Item quadruplatio in Arithmeticis, reſpondet multiplicationi zenſizenſicæ in Geometricis: ut hic 2. 5. 8. 11. 14. quadruplatio medij facit quãtum additio reliquorum quatuor, ſic in hac 3. 12. 48. 192. 768. multiplicatio zenſizenſica huius 48. facit quantum reliqui quatuor inter ſe, utrobiq; autem fiunt 5 3 0 8 4 1 6. Item quintuplatio in Arithmeticis, reſpondet multiplicationi ſurdeſolidæ in Geometricis. Vt hic 2. 5. 8. 11. 14. quintuplatio medij, id eſt, 8. facit quantum additio quinq; illorum terminorum: ſic hic 3. 12. 48. 192. 768. multiplicatio ſurdeſolida medij, facit quantum illi quinq; inter ſe multiplicati, utrobiq; enim fit 2 5 4 8 0 3 9 6 8. & ſic de alijs in infinitum.

4. Diuiſio in Arithmeticis progreſſionibus, reſpondet extractionibus radicum in progreſſionibus Geometricis. Vt dimidiatio in Arithmeticis, reſpondet extractioni quadratæ in Geometricis: ſcilicet hic, 5. 11. 17. medius eſt pars dimidia, additionis, ſummæ duorum extremorum. Sic in hac 3. 6. 12. medius eſt radix quadrata ſummæ multiplicationis extremorũ.

Item diuisio per 3. respondet extractioni radicis cubicæ. Vt hic 5. 11. 17. medius terminus est pars tertia summæ totius aggregationis ex terminis tribus illis: sic hic, 3. 6. 12. terminus medius est radix cubica summæ multiplicationis trium horum inter se, & sic de alijs in infinitum.

De usu prædictarum speculationum.

Primo facile potuit ex consideratione harum speculationum inueniri regula De Tri, & regula De Tri conuersa. Vt sicut hic 2. 5. 8. ex additione tertij ad quartum, & subtractione primi à summa aggregationis, relinquitur quartus terminus illius progressionis: sic hic 3. 6. 12. ex multiplicatione secundi in tertium, & diuisione summæ per primum, fit terminus quartus illius progressionis.

Exemplum de contigue proportionalibus.

Non solum respondent illa in istis continuæ proportionalibus, sed etiam in contigue proportionalibus: ut hic, 3. 5. 8. facit quartus 10. sic hic 3. 6. 27. facit quartus 54.

Exemplum iuxta De Tri conuersam.

5. 8. 10. 3. item 6. 8. 12. 4.

In priore addo primum ad secundum, & subtraho tertium ab aggregato, tunc relinquitur quartus. In posteriore multiplico & diuido, &c. & respondent probationes. Sed de regulis illis suis in locis dicam.

Secundo potuit ex consideratione harum speculationum inueniri ferè quicquid de natura quadratorum, atque solidorum regularium, dici potest: ut est inuentio mediorum inter duos quadratos, inter duos cubicos, inter duos zensizensicos, inter duos surdesolidos, &c. Sed satis est si inuentiones illæ suis figuris signentur.

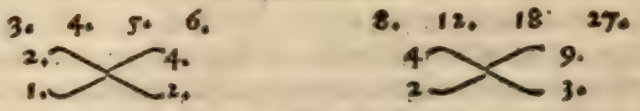
De quadratis.

4. 5. 6.
2. + 3.

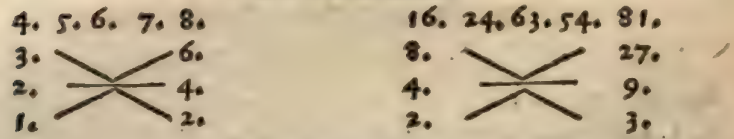
4. 6. 9.
2. — 3.

De

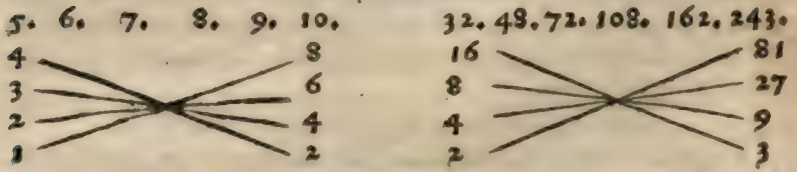
¶ De cubicis.



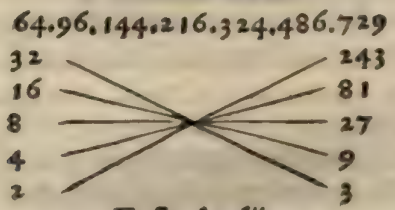
¶ De zensizensis.



¶ De surdesolidis.



¶ De zensicubis.



Et sic de alijs.

¶ Obserua hic, ut quod in Arithmeticis est numerus par, in Geometricis est numerus quadratus: & quod in Geometricis sunt quadratis similes, in Arithmeticis sunt impar & impar. Sicut ergo par ad parem additus, parem efficit, Item impar ad imparem: sic quadratus in quadratũ multiplicatus, quadratum efficit. Item similes quadratis inter se multiplicati, &c.

Item inter parem & parem necesse est cadere medium arithmeticale, unum ut minimum, Item inter imparem et imparem: sic

ſic inter duos quadratos, aut duos ſimiles quadratis, neceſſe eſt cadere medium Geometricale, &c.

Et quod in Arithmeticis ſunt duo numeri ternario numerabiles, hoc in Geometricis ſunt duo numeri cubici; & qđ in Geometricis ſunt duo numeri cubicis ſimiles, hoc in Arithmeticis ſunt duo numeri ternario differentes, quorũ neuter tamen ternario numeretur. Vides aũt, ut duo numeri, quorum differẽtia eſt ternarius, cum tamen neuter eorum numeretur per ternarium, additi ad ſe non conſtituant numerum per ternarium numerabilem; ita non eſt tibi expectandum, ut duo ſimiles cubicis, inter ſe multiplicati, producant cubicum. At ſi diuidas maiorem per minorem, certe exit quotiens cubicus: ſic enim duobus numeris poſitis, quorum differentia ſit 3, ſitq; nullus eorum per 3 numerabilis, ſi minor ſubtrahatur á maiore, relinquitur ternarius. & ſic de omnibus alijs iudicabis.

Si fuerint quatuor numeri, iuxta progreſſionem Arithmeticam diſpoſiti, quorum extremi ternario numerentur, neceſſe erit ut medij duo additi, ternario numerẽtur. Item tres priores & tres poſteriores, additi numerabunt ternario: & huiuſmodi alia multa poteris ſcrutari, ſciens quòd omnia reſpondeãt Geometricis progreſſionibus.

Seruit etiam hic naturalis numerorum progreſſio Geometricis progreſſionibus: ut,

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

Quinarius qui ponitur ſupra ſurdeſolidum, ſignificat hoc eſſe in Geometricis ſurdeſolidum, quod in Arithmetica naturali progreſſiõe eſt quinarius, aut numerus quinario numerabilis. Itẽ quod in Geometricis ſunt ſurdeſolidis ſimiles, hoc in Arithmeticis ſunt numeri quorum differentia eſt 5, & ipſi tamen quinario non numerantur: & ſic de alijs.

Tertio potuit ex conſideratione huiuſmodi ſpeculationum inueniri illa admirãdæ latitudinis ratio calculandi, quam Coſ-

ſam uocant ſeu Algebram : & hic mirifice ſeruit naturalis numerorum progreſſio progreſſionibus Geometricis. Sicut enim in ſuperiore ordine 2 ad 3 faciunt 5 : ſic in inferiore ordine 4 in 8 faciunt 32. id eſt, ſurdeſolidum quinario deſignatum, ſeu numerum quinto loco poſt unitatem excluſam ponendum. Item ſicut in ſuperiori ordine 2 ad 4 faciunt 6: ita in inferiore ordine 4 in 16 multiplicatus, facit numerum ſub 6 ponendum, id eſt, zenſicubum progreſſionis. Item ſicut in ſuperiore ordine 1 ſubtracta à 6, relinquit 5 : ſic in inferiore ordine 2 diuiſore diuidente 64, producit numerum ponendum ſub 5, id eſt ſurdeſolidum progreſſionis illius. & ſic de alijs. Sumpta eſt igitur hinc ratio Algorithmi peculiariter ad Algebram pertinentis, &c.

Quarto, notum eſt ſatis, quàm affinis ſit Algorithmus minutorum Phyſicalium, Algorithmo Algebræ.

Quinto, potuit etiam Algorithmus proportionũ ex huiuſmodi ſpeculationibus inueniri : ut quòd $\frac{2}{1}$ ad $\frac{2}{1}$ facit $\frac{4}{1}$. Item $\frac{2}{2}:\frac{2}{1}:\frac{2}{1}$, id eſt dupla triplicata, quòd illa facit $\frac{8}{1}$, facile potuit conſiderari: uel ex illis ordinibus, qua naturalis numerorũ progreſſio, ſeruit progreſſionibus Geometricis, ut

0. 1. 2. 3. 4. 5.
1. 2. 4. 8. 16. 32.

hic 5 non ſolum ſignificat numerum ſibi ſubſcriptũ (id eſt 32) facere proportionem quintam, ſed ſignificat etiam eundem numerum ſibi ſubſcriptum collatum unitati, eſſe proportionem quintuplicatam reſpectu primæ proportionis. Et tertio ſignat modum ipſum, quo uel per additionem, uel per quintuplationẽ primæ proportionis, fiat proportio hæc quintuplicata $\frac{32}{1}$, ſcilicet $\frac{2}{1}$ quinquies poſita, atq; ita ſecundum regulam multiplicationis Minutiarum facta operatione, producitur quintuplicatæ proportionis collectum: ut $\frac{2}{1}.\frac{2}{1}.\frac{2}{1}.\frac{2}{1}.\frac{2}{1}$. facit $\frac{32}{1}$. Et quia per multiplicationis regulam quam habent Minutiæ uulgares, fit additio proportionum, facile fuit (hoc intellecto) concludere, ut regula diuiſionis Minutiarũ, ſeruiret etiam ſubtractioni proportionum

tionum, cum ubiq; hoc uerum sit, quòd additio probet subtractionem, & subtractio additionem, &c. Deinde, cum inter 1 & 32 medient numeri hi, 2, 4. 8. 16. ita ut diuidãt proportionem $\frac{32}{1}$ in quinq; pportiones æquales. i. in quinq; duplas. Facile recepta est coniectura hæc de numeris quibuscunq; positis ordine aliquo, quòd proportio extremorum constituatur ex proportionibus intermediorum &c̃.

Reliqua quærat diligens Lector quantum uelit. Sunt enim alia multa quæ progressiones Geometricæ, uel generaliter complicãt, uel specialiter, &c. ut progressio Geometrica triplæ proportionalitatis ab unitate incipiens, iucunda ratione, quibuscunq; terminis primis, efficit tot terminos progressionis naturalis numerorum, quot ipsi coaceruati faciunt unitates. Vt (exempli gratia) 1. 3. 9. 27. coaceruati, faciunt 40 unitates. Itaq; illi termini quatuor faciunt 40 terminos progressionis naturalis numerorum; quemadmodum hæc descriptio indicat.

1. 3 — 1. 3. 3 + 1. 9 — 3 — 1. 9 — 3.
9 + 1 — 3. 9 — 1. 9. 9 + 1. 9 + 3 — 1. 9 + 3.
9 + 3 + 1. 27 — 9 — 3 — 1. 47 — 9 — 3. 27 + 1 — 9 — 3.
27 — 9 — 1. 27 — 9. 27 + 1 — 9. 27 + 3 — 9 — 1.
27 + 3 — 9. 27 + 3 + 1 — 9. 27 — 3 — 1.
27 — 3. 27 + 1 — 3. 27 — 1. 27.
27 + 1. 27 + 3 — 1. 27 + 3. 27 + 3 + 1.
27 + 9 — 3 — 1. 27 + 9 — 3. 27 + 9 + 1 — 3.
37 + 9 — 1. 27 + 9. 27 + 9 + 1.
27 + 9 + 3 — 1. 27 + 9 + 3. 27 + 9 + 3 + 1.

Est hoc etiam iucundum cernere, ut duo numeri integri immediate se sequentes in naturali ordine numerorum, quicunq; tandem sint duo illi numeri, reddãt tot terminos progressionis naturalis numerorum, quot ipsi inter se multiplicati fecerint unitates. Vt (exempli gratia) 4. 5. inter se multiplicati faciunt 20 unitates: itaq; 4 & 5 reddunt quemlibet numerũ ab unitate usq; ad uigenarium.

Iam si numerus à te sit electus, qui mihi sit occultus, quem tu dicas scribi quatuor figuris, tunc ego recipio duos aliquos numeros immediatos, qui inter se multiplicati faciant numerum quinq; figuris scribendum (ut certus sim meũ productum superare tuum electum, quãtitate) ut sunt hi duo numeri, 100. 101. quorum multiplicatio facit 10100.

Peto igitur ut diuidas numerũ à te electum, per meum priorem, id est, per 100, dicasq; mihi quantum remaneat. Eum aũt numerum qui remanet, multiplico per meum posteriorem, & reseruo productum.

Secundo peto, ut tuum numerũ electum diuidas denuo per meum posteriorem numerum, id est per 101, dicasq; quantum remaneat. Eum autem numerum qui remanet, multiplico per quadratum mei prioris, & illi producto addo id quod prius fuerat reseruatum: & aggregatum illud diuido, per numerum qui prouenit ex multiplicatione duorum meorũ numerorũ primo receptorum (id est, per 10100, cum receperim 100 & 101) tunc apparebit semp numerus à te electus, in residuo diuisiõis meæ.

De extractionibus radicum. Cap. v.

QVEMADMODVM sunt infinitæ species multiplicationum numerorum in se, ex quibus nasci uidimus numeros quadratos & solidos: ita infinitas esse oportet radicum species, uidelicet iuxta solidorum appellationes, nascentium ex ipsis radicibus, per multiplicationes uarias. Sed hæc omnia significat seu repræsentat naturalis numerorum progressio seruiens progressionibus Geometricis ab unitate incipientibus, ut

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.

Primo, numeri superioris ordinis significãt multiplicationum species; scilicet 2 significat multiplicationem quadratam fieri, dum

dum radix bis ponitur, atque ita multiplicatur, ut 2. 2. facit 4. Sic 3 significat multiplicationem cubicam, qua radix ter ponitur, atq; ita multiplicatur ut producatur cubicus. Sic 4 repræsentat multiplicationem zensizensicam, & 5 repræsentat surdesolidam: & sic deinceps. Secundo significant (numeri superiores) radicum species. Vt 2 significat radicem quadratā, componere quadratum numerum per multiplicationē quadratam. Sic 3 significat radicem cubicam, componere cubicum numerum per multiplicationem cubicam: & sic deinceps.

EST ergo radicis extractio, inuentio numeri ex numero proposito, qui multiplicatione aliqua in se producat numerū propositum.

Primum quod in extractionibus radicum obseruandum uenit, est figurarum signatio, in numero de quo extrahenda est radix aliqua.

In extractione radicis quadratæ signantur figuræ in locis imparibus: figuræ autem in locis paribus non signantur. Hinc fit ut alternatim semper una figura obmittatur quæ non signetur, ut hic uides,

6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6

In extractione cubica obmittuntur semper duæ figuræ quæ non signentur, ut hic uides,

6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6

In extractione zensizensica obmittūtur semper tres figuræ, ut hic uides,

6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6

In extractione radicis surdesolidæ obmittuntur semper quatuor figuræ, ut hic,

6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6

Et sic deinceps in infinitum.

Respondēt autem hæ signationes medijs proportionalibus.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64.

ut hic uides, inter quadratum & unitatem poni unum medium, inter cubum & unitatem duo poni media, inter zenſizenſum et unitatem tria media: & ſic deinceps.

¶ Secundũ, quod in extractionibus radicũ obſeruandũ uenit, eſt cognitio qua ſcias q̃ figuræ pertineãt ad quodlibet punctũ.

Ad punctum ultimum (id eſt, ad extremũ à ſiniſtris) pertinet figura ſub ipſo puncto poſita cũ reliquis figuris uerſus ſiniſtrã: & ſic de alijs punctis iudicabis, ut in iſta ſignatione ſurdeſolida uides exemplum, 2 0 5 8̊ 1 1 3 2 0 9 4 6 4 9̊

Ad ultimum itaq; punctum, pertinẽt hæ figuræ, 2 0 5 8̊. Sequens punctum uerſus dextram habet has, 1 1 3 2 0̊. Primum habet, 9 4 6 4 9̊.

¶ Tertium, quod obſeruandum eſt in radicum extractionibus, pertinet ad punctũ ultimum, & eſt ipſius puncti abſolutio.

In extractione quadrata, ſubtrahitur ab ultimo puncto quadratus numerus maximus qui poteſt ſubtrahi.

In extractione cubica, ſubtrahitur cubicus maximus qui ſubtrahi poteſt ab ultimo puncto.

In extractiõe zenſizẽſica, ſubtrahit̃ maximus zenſizenſic⁹.

Et in ſurdeſolida extractione ſubtrahitur maximus ſurdeſolidus: & ſic de alijs in infinitum.

Tabula pro radicibus cubicis.

1	1	4	64	7	343
2	8	5	125	8	512
3	27	6	216	9	729

Vides hic cubos ſingularum figurarum. Horum aliquis (in omni extractione cubica) ſubtrahitur ab ultimo puncto, & radix ſubtracti cubi ponitur in quotientem ultra uirgulam curuã ut fit in diuiſione, & reſiduum ſubtractionis reputabitur pertinere ad ſequens punctum uerſus dextram.

Hoc autem quod iam dixi de abſolutione ultimi puncti, ſuo modo

modo intelligi debet de quacūq; alia extractione. Facilior uero est inuentio quadratorum ex figuris singulis, quàm ut tabula aliqua opus sit. Ratio etiam est, quā inferius intelliges, cur pro zensizensicis & zensicubicis non posuerim tabulas.

Tabula surdesolidorum.

1	1	4	1024	7	16807
2	32	5	3125	8	32768
3	243	6	7776	9	59049

Tabula Bsurdesolidorum.

1	1	4	16384	7	823543
2	128	5	78125	8	2097152
3	2187	6	279936	9	4782969

¶ Quarto, obseruandum est circa quamlibet speciem extractionum, ut reliqua puncta, ultimo expedito (est autem ultimū punctum, in operatione primum) absoluantur. In qualibet aūt specie extractionum, est una propria regula, qua omnia sequentia puncta, post ultimum expeditum, absoluantur.

¶ Quinto, obseruandum est, ut quælibet regula pro punctis sequentibus ultimum, habeat suos numeros peculiares.

Extractio quadrata habet unum hunc, 20.

Extractio cubica habet duos hos, 300. 30.

Extractio zensizensica habet tres hos, 4000.600.40.

Extractio surdesolida habet quatuor hos, 50000. 10000. 1000. 50.

Extractio zensicubica habet quinq;. & sic de alijs.

Respondent itaq; numeri numerorum huiusmodi, numeris figurarum obmissarum in signationibus. Vt dum signantur figuræ numeri de quo extrahenda sit radix zensizensica, post primam figuram signatā, obmittēdæ erunt quinq; figuræ, & sexta signabitur (ut superius dictum est) sic hic quinq; numeri peculiares requiruntur, ut iam indicaui. Qua uero ratione aut q tandem modo sint inueniendi numeri illi regularum peculiares, satis clare indicabo inferius per quandam tabulam.

¶ Sexto, obserua modum depingendi regulas: hoc enim obseruato, facile poteris, absq; libro, cuiuslibet speciei radices extrahere.

Extractionis quadratæ regula, sic depingitur ex exemplo hoc,

6 7 6

2 —— 20 —— 6

36

Extractionis cubicæ regula sic depingitur ex numero hoc,

2 3 8 3 2 8

36 —— 300 —— 2

6 —— 30 —— 4

8

Extractionis zensizensicæ regula sic depingitur, ex

1 4 7 7 6 3 3 6

216 —— 4000 —— 2

36 —— 600 —— 4

6 —— 40 —— 8

16

Extractionis surdesolidæ regula sic depingitur ex exemplo numeri huius,

9 1 6 1 3 2 8 3 2

1296 —— 50000 —— 2

216 —— 10000 —— 4

36 —— 1000 —— 8

6 —— 50 —— 16

32

Extractionis zensicubicæ regula sic depingitur ex hoc numero pro exemplo posito,

5 6 8 0 0 2 3 5 5 8 4

7776	600000		2
1296	150000		4
216	20000		8
36	1500		16
6	60		32
			64

Sequitur pictura regulæ extractionis bſurdeſolidæ ex hoc numero,

3 5 2 1 6 1 4 6 0 6 2 0 8.

46656	7000000		2
7776	2100000		4
1296	350000		8
216	35000		16
36	2100		32
6	70		64
			128

Et ſic de alijs regulis aliarum ſpecierum in infinitum.

Expoſitio picturarum, id eſt, declaratio regularum.

QVoties expeditū fuerit punctum aliquod, tunc pro puncto uerſus dextram ſequēte, ſic operaberis. Depinge regulam.

Primo, pone medios numeros, id eſt, eos qui tuæ operationi debentur tanquam peculiares.

Secundo, conſtitue progreſſionem tuam aſcendentem, id eſt, eam quæ ponenda eſt à ſiniſtris, ea enim ſemper aſcendit. Sic autem ponenda uenit.

Ad infimum locum pone totum quod eſt in quotiente, tanq; radicem progreſſionis, & ſic aſcende per quadratum & cubum &c. donec quilibet mediorum habeat ſuum collateralem numerum à parte ſiniſtra. Hoc facto, parabis tibi diuiſorem quo diuidas punctum tuum, ut inuenias nouam figuram reponendam ad quotientem. Scilicet quemlibet mediorū multiplicabis per

ſuum collateralem poſitum à ſiniſtris, & producta illa ad ſe addita, dabunt tibi tuum diuiſorem. Niſi quòd non eſt neceſſe, ut ſemper totam cõpleas multiplicationẽ, ſed ſufficit ut duas multiplicatiões factas ex ſupremis, & ſic addas, ut diuiſorẽ habeas.

¶ Tertio, conſtitue progreſſionem tuam deſcendentem, id eſt, eam quæ ponenda eſt à dextris, ea enim ſemper deſcendet. Sic autem eam diſponas.

Ad ſupremum locum pone figuram tuam nouam quotientis, uidelicet quæ inuenta eſt uia diuiſionis. Ea ſic poſita, tanq; radice tuæ progreſſionis, progredere deſcendendo per quadratum & cubicum &c. donec progreſſio tua, numero locorũ, excedat eam quæ à ſiniſtris ponitur, in uno loco, quemadmodum picturæ regularum ſatis indicant. His factis, multiplica tres ſupremos inter ſe, deinde tres ſequentes etiam inter ſe: & ſic deinceps. Peractis multiplicationibus illis, adde illa producta omnia ad ſe, ſuperadde etiam illum numerum, qui à parte dextra in infimo loco ſolitarie ponitur. Hoc igitur aggregato à tuo puncto ſubtracto, abſolutum erit illud.

Vides ut ex infinitis regulis, unam regulam compoſuerim, atq; ita totum negotium hoc abſoluerim. Reſtat igitur, ut exemplis regulam declaremus.

¶ Exemplum de extractione quadrata, ſit numerus ille prius poſitus, à 7 5.

Primo, ſub ultimo puncto ſubtrahitur 4, tanquam maximus numerus quadratus, qui ab eo (id eſt, à 6) poſſit ſubtrahi. Ponitur ergo radix, huius ſubtracti quadrati (id eſt 2) in quotiente, & in reſiduo manet 2: & ſic expeditum eſt punctum unum.

Paro iam diuiſorem ex figura quotientis multiplicata in 20, fitq; 40 diuiſor, quo diuido punctum quod reſtat, id eſt 276, & inuento 6 nouam figuram. Sic ergo ſtat exempli regula.

2 —— 20 —— 6

36

Multiplicatio trium ſuperiorũ facit 240, cui addo 36, fiunt 276:

hoc ſubtractum à puncto meo, nihil relinquit. Inuenta eſt ergo radix 26, quam ſi quadrato multiplicaueris redibit 676. & ita probatur operatio.

Si iam numerus exempli huius habuiſſet plura puncta, tunc eſſet regula illa repetēda, pro ſingulis punctis. Vt ſi radix quadrata quærēda ſit de hoc numero 676201. Tunc expeditis punctis duobus ultimis, ſic ſtabit exemplum,

```
                    676201 (260
26 ——— 20 ——— 0
          0
```

Totum quod eſt in quotiente multiplico in 20, facit 520 diuiſorem quo diuido punctum ſequens, uidelicet 52. Vides autem ut ne ſemel quidem habeam diuiſorem in ſuo ſuprapoſito, ideo pono cifram in quotiente: & ſic fit in omnib. alijs operationib.

Pergo ergo repetere regulam, & ſic ſtabit.

```
260 ——— 20 ——— 1
          1
```

Multiplicatio facit 5200. addo 1, facit 5201, quod ſubtraho à puncto primo, & nihil relinquit.

Quando igitur uenerit unitas pro noua figura, tunc non fit à dextris progreſſio deſcendens, ſed unitas ſtabit loco quadrati & cubi, &c. Non ſolum hoc loquor de quadrata extractione, ſed de quacunq; alia.

¶ Exemplum de extractione cubica, ſit numerus prius poſitus, uidelicet 23832.

Primo, ſub ultimo puncto ſubtrahitur 216, quia non eſt maior numerus cubicus qui poſſit ſubtrahi de 238; remanet ergo 22. unde ſequens punctum habebit hunc numerum, 2232 8. Ad quotientem autem pono radicem cubicam de 216, id eſt 6.

Iam paro diuiſorem pro nouo digito inueniendo hoc modo

```
36    300
 6     30
```

Multiplico 36 in 300, facit 10800. & hoc sufficit mihi pro diuisore, quo inueniam nouam figuram. Noua figura est 2, scilicet 22328 diuisum per 10800 facit 2: unde sic stat regula.

36 ——— 300 ——— 2
6 ——— 30 ——— 4
8

Duæ multiplicationes faciunt 21600 & 720, quibus addo 8, fiunt 22328. quæ delent et expediunt per subtractionem totum punctum quod remanserat.

Exemplum de extractione surdesolida, sit numerus 9161328312.

Primo, sub ultimo puncto subtraho 7776, quia nõ est maior numerus surdesolidus, qui possit subtrahi ab hoc puncto 9161. Remanet autem 1385, & 6 ponitur in quotientem tanctꝫ radix surdesolida de 7776. atq; ita absolui punctum ultimum.

Restat punctum, 1381328312. Quæro nouam figuram in quotientem ponendam hoc modo:

1296	50000	
216	10000	
36	1000	
6	50	

Multiplico duos superiores inter se, uidelicet 1296 & 50000, facit 64800000: hoc diuisore inuenio in puncto remanente 2 nouam figuram. Sic ergo stabit regula.

1296 ——— 50000 ——— 2
216 ——— 10000 ——— 4
36 ——— 1000 ——— 8
6 ——— 50 ——— 16
32

Hæ quatuor multiplicationes faciunt 138532800, quibus superaddo 32, & tunc subtraho à puncto remanente, tunc nihil relinquitur.

Exemplum

¶ Exemplum de extractione bſurdeſolida, ſit numerus ille 352161460620 8.

Primo, ſubtraho ab ultimo puncto 46656, tanquam maximum bſurdeſolidum, qui ſubtrahi poſſit ab eo. Remanet autē 72225, ut punctum remanens habeat 7222546006208. Radicem uero ſubtracti bſurdeſolidi, bſurdeſolidam, id eſt 6, pono in quotientem: atq; ita abſolui operationis meæ punctum primum, id eſt, ultimum punctum. Notum eſt enim, ut ultimum punctū poſitionis, ſit primum operationis.

Quæro iam nouam figuram pro remanente puncto, quæ in quotientem ueniat. Hoc autem modo quæro eam.

46656	7000000
7776	2100000
1296	350000
216	35000
36	2100
6	70

Multiplico duos ſupremos numeros inter ſe, ut habeam diuiſorem huius inuentionis, quo uidelicet diuidā punctū remanens. Facit uero hoc productum 326592000000. Vides autem ut illum numerum bis habeam in puncto meo remanente: itaq; noua figura eſt 2, unde ſic ſtat regula.

46656	7000000		2
7776	2100000		4
1296	350000		8
216	35000		16
36	2100		32
6	70		64
			128

Vides in regula depictas eſſe multiplicationes ſex, quarum producta addita ad ſe, faciunt 72225460608 0: huic adde 128, tunc habebis aggregatum quod ſubtractum à puncto remanente, deleat ipſum totum.

¶ De extractione zenſizenſica, & de zenſicubica: item de zenſizēzenſica, et de cubicubica, itē de zenſurdeſolida, nō opus eſt ponere exempla. Præter hoc enim, quòd facile ex poſitis exemplis facere ſit exempla huiuſmodi operationū tanquam ex ſimilibus, aliam habent illæ extractiones operationū formulā, quam uel ex ipſa appellationū ratione liceat colligere, ſcilicet:

Extracturus radicē zenſizenſicā, extrahat primo radicē zenſicam, i. quadratā. Et de radice illa quadrata denuo extrahat radicem quadratā: erit em̄ hæc radix zenſizenſica quā quærebat.

Extracturus radicem zenſicubicam, quærat primo radicem quadratam, & ex quadrata illa extrahat radicem cubicam: & hæc erit illa zenſicubica quam quærebat.

Extractur⁹ radicē zenſizēzenſicā de numero aliquo, quærat primo radicem quadratam, & de radice illa iterum quærat radicem quadratam, & de illa radice tertio quærat radicem quadratam: & illa tandem erit ea quam quærebat.

Extracturus radicem cubicubicam, quærat primo radicem cubicam de numero propoſito, deinde de radice illa inuenta de nuo quærat radicem cubicam: & illa erit ea quam quærebat.

Extracturus radicem zenſurdeſolidam, quærat primo radicem quadratam, deinde quærat de ea radice ſurdeſolidam radicem: & illa erit ea quam quærebat. Et ſic de infinitis alijs, ut de zenzenſicubica, zenbſurdeſolida, cubiſurdeſolida &c.

¶ Sed tamen ut res eo ſit planior, uolo radicē zenſizenzenſicam quærere de hoc numero ſequenti: uolo aūt quærere iuxta regulas ſuperius ſignificatas, 4r 9497 2986 1772 151.

Primo, ab ultimo puncto ſolam unitatē poſſum ſubtrahere: itaq; unitas ponitur in quotientem tanq; radix zenſizēzenſica de unitate, & remanēt 3. itaq; ſequēs punctū habet 3 r 9497 298.

Quæro igitur nouam figuram pro hoc puncto per aggregatum ex 80000000 & 28000000, hoc eſt per 108000000; nam 1 in quotiente poſita nullam facit progreſſionē ut uidebis, neq; multiplicat, Inuenio aūt 3, ſed recipio tantūmodo 2; aliàs enim

fieret

fieret ſubtrahendū maius, & illud à quo fieri deberet ſubtractio, id quod tibi licebit experiri. Sic ergo ponitur regula.

1	80000000	2
1	28000000	4
1	5600000	8
1	700000	16
1	56000	32
1	2800	64
1	80	128
		256

Septē illæ multiplicationes faciunt 32998 1440: cui addo 256, fiunt 32998 1696. Subtractus ille numerus à puncto quod præ manibus habeo, relinquit 29515602. hinc fit ut punctum remanens faciat 29515602 $\frac{1696}{3572161}$.

Quæro igit̄ iam figurā quotiētis nouā pro illo pūcto, ſcilicet multiplico 80000000 ī 35831808, facit 2866544640000000: & hunc numerū ſemel ſolūmodo inuenio in puncto meo remanente. Vnde ſic ſtabit regula, cum in quotientem ueniat ſolummodo unitas ad has duas figuras prius inuentas, 12.

35831808	80000000	1
2985984	28000000	1
248832	5600000	1
20736	700000	1
1728	56000	1
144	2800	1
12	80	1
		1

Producta multiplicationis.

1866544640000000
836075520000000
139345920000000
14515200000
96768000
403200
960
1

50000
10000
1000
50

Quinq; sequentes seruiunt radici zensicubicæ,

600000
150000
20000
1500
60

Sex sequentes seruiunt radicibus bisurdesolidis,

7000000
2100000
350000
35000
2100
70

¶ Sed uideamus quo nam modo, quilibet ordo tabulæ transuersalis, constituat suos numeros illos qui exttractionibus seruiant. Exemplis autem optime uidebimus hoc. ut,

Ex ordine illo 8. 28. 56. 70. sumuntur numeri qui seruiant extractioni zensizenzensicæ.

Primo recipiuntur eo ordine quo ponuntur. Deinde repetuntur omnes retrograde, excepto ultimo. Erunt ergo septem numeri, uidelicet 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. & cuilibet eorum præpono suas cifras. Recipit autem quilibet eorum pro se cifram unam, & pro quolibet sequenti numero etiam unam recipit. Vt 8 recipit septem cifras, unam pro se, & reliquas sex pro reliquis sex numeris sequẽtibus: sic secundus numerus, id est 28, recipit sex cifras, unam pro se, & alias quinq; pro numeris quinq; sequentibus: sic tertius, id est 56, recipit quinq;: & quartus, id est 70, recipit quatuor. & sic deinceps, quemadmodum uides, eos hic esse positos.

80000000
28000000
5600000
700000
56000
2800
80

Aliud exemplum. Vt ex illo ordine, 9. 36. 84. 126. 126. sumuntur illi numeri octo, deseruientes extractioni cubicubicæ, uidelicet 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. Quia ergo sunt octo numeri, ideo primus recipit octo cifras, secundus recipit septē, tertius sex recipit cifras, quartus quinq;, quintꝰ quatuor, sextus tres, septimus duas, & octauus unam: ut hic uides,

900000000
360000000
84000000
12600000
1260000
84000
3600
90

Vnde quando primus numerus (ut absq; cifris ponitur) est par, tunc numerus numerorum est impar. Ratio est: quia ille numerus, qui in tabula est ultimus transuersaliter, nō repetitur. Reliqui uero omnes retrograde repetuntur, ut iam ostendi.

Quando autem primus in tabula transuersaliter fuerit impar, tunc numerus numerorum est par. Ratio est: quia omnes repetuntur retrograde, ut uidimus.

Habes itaq; totum negotium per hæc absolute traditum.

Nouem sequentes numeri seruiunt zensurdesolidæ extractioni.

10000000000
4500000000
1200000000
210000000
25200000
2100000
120000
45000
100

Sumpti sunt autem numeri illi ex ordine illo tabulæ transuersaliter posito, uidelicet 10. 45. 120. 210. 252.

Sic ex ordine illo transuersali, 11. 55. 165. 330. 462.

Sumuntur illi numeri, pro extractione radicum Csurdesolidarum, uidelicet 11. 55. 165. 330. 462. 462. 330. 165. 55. 11; qui cum cifris suis positi sic stabunt.

11000000000000
550000000000
16500000000
3300000000
462000000
46200000
3300000
165000
5500
110

Et sic deinceps poteris secundum hæc, aliarum extractionum numeros educere.

De extractione radicum ex numeris fractis.

Nulla radix rationalis poterit esse in Minutiâ, nisi eam simul habeat numerator & denominator. Ex utroq; ergo termino minutiæ quærenda est eiusdem appellationis radix: ut $\frac{1}{3}$ est radix quadrata de $\frac{1}{9}$, & radix cubica de $\frac{8}{27}$, & radix zensizensica de $\frac{15}{81}$, & radix surdesolida de $\frac{32}{243}$, & radix zensicubica de $\frac{64}{729}$. Et sic de alijs.

De Proportionibus, & earum Algorithmo. Caput VI.

TANDEM post radicum extractiones, quarũ usum uidebimus in Algorithmo proportionum, uidea mus de proportionibus numerorum. Fit autem proportio numerorum, ex collatione numeri ad numerum, uel sub consideratione mensurati col lati ad mensurantem, uel mensurantis collati ad mensuratum. Atq; ita duo colliguntur proportionũ genera, uidelicet Maioris inæqualitatis, & Minoris inæqualitatis: & his duobus gene tibus opponitur proportio æqualitatis.

De æqualitate.

PRoportio æqualitatis dicitur ea, qua numerus cõfertur ad numerum sibi æqualem, ut frequentissime fit in Algebricis operationibus, in quibus æqualitatis uis & efficacia mirifica, inuenitur esse latitudinis immensæ.

Tenet autem proportio æqualitatis quodammodo medium inter duo proportionum genera inæqualitatis. Nam proportiones maioris inæqualitatis, uidentur decrescendo appropinquare æqualitati: & proportiones minoris inæqualitatis uiden tur ei appropinquare crescendo. Hoc autem mirum est, quòd ab unaquaq; proportione maioris inæqualitatis, fit infinitus descensus ad æqualitatem. Vt proportio dupla, 1. 2. hic diuisa est, 2. 3. 4. in sesquialteram & sesquitertiam: & sesquitertia hic 6. 7. 8. diuisa est in duas alias, quarum quælibet diuisibilis sit in duas alias. & sic deinceps in infinitum, ut nunquã sit deuenire ad æqualitatem.

Aliud uide experimentum. Quemadmodum dupla addita ad subduplam, facit æqualitatem: sic quælibet proportio maio ris inæqualitatis, addita proportioni minoris inæqualitatis, quæ sit consimilis appellationis, constituit proportionem æquali tatis. Et hac ratione uidetur non solum medium tenere inter

proportiones, sed uidetur etiam omnes & singulas proportiones utriusq; generis complicare, atq; unamquanq; mutare de genere in genus, dum eam abijcit à se, scilicet dum subtrahitur proportio ab æqualitate, mutatur genus. Ipsa autem æqualitas siue addatur siue subtrahatur à proportione quacunq;, nihil ex ea mutat: nec ipsa mutatur quacunq; multiplicatione aut diuisione.

De proportionibus inæqualitatis, & de speciebus earum.

VTrunq; genus (id est, maioris inæqualitatis & minoris) in species quinq; diuiditur.

Nam proportionum maioris inæqualitatis, quædam sunt sub specie multiplicium, quædam sub specie superparticulariũ, quædam sub specie superpartientium, quædam sub specie multiplicium superparticularium, & quædam sub specie multiplicium superpartientium.

Sic proportionum minoris inæqualitatis, quædam sunt sub specie submultiplicium, quædam sub specie subsuperparticularium, quædam sub specie subsuperpartientium, quædam sub specie submultiplicium superparticularium, & quædam sunt sub specie submultiplicium superpartientium.

Vides ut in utroq; genere, species quarta & quinta, habeant appellationes compositas. Vt autem facile est secernere genus à gñe, ita species à specie facile discerniť, in utroq; genere.

Satis uero indicatum est, ut ipsa collationis uariatio mutet genus: ut dum confero 3 ad 2, constituo proportionem maioris inæqualitatis. Dum aũt confero 2 ad 3 (id est, minorẽ numerum ad maiorẽ) constituo proportionẽ minoris inæqualitatis.

Videbatur mihi olim distinctio illa generũ maioris inæqualitatis et minoris, nihil aliud habere quàm inanem uerbositatẽ, & displicebat mihi, donec in Algebricis & Geometricis exercitijs sentirem eius distinctionis usum. Item aliquãdo cogitabam de proportionibus minoris inæqualitatis, tanquã de fictis proportionibus

portiõibus & minime ueris: & quæ sub æqualitate essent fictæ, quẽadmodum fingũtur numeri minores nihilo, ut sunt o —3. o — 8. &c. Postea uero uidi tam uere dici 4 esse subduplum ad 8, quàm uere dicitur octonarius duplus esse ad 4.

Proprie autem ipsa figuratione discernitur genus maioris inæqualitatis à minore sic: Vt dum maior terminus ponitur supra minorem (ut hic $\frac{3}{2}$) repræsentatur genus maioris inæqualitatis: dum uero minor terminus ponitur supra maiorem (ut hic $\frac{2}{3}$) repræsentatur genus minoris inæqualitatis. Dum autem terminus sequitur terminum, id quod frequentius fieri solet (ut hic 2. 3.) tunc discernitur genus â genere, ex uerbis illius qui eos sic ponit.

¶ De speciebus etiam utriusq; generis dixi, quòd facile discernantur. Discernuntur autem diuisione maioris termini per minorem: aut enim prouenit integer quotiens sine aliqua minutia, & tunc est species multiplex aut submultiplex: aut prouenit unitas cum minutia habente unitatem pro numeratore, & tunc est species superparticularis aut subsuperparticularis: aut prouenit unitas cum minutia habente numerum pro numeratore, & tunc est species superpartiens aut subsuperpartiens: aut prouenit numerus cum minutia habente unitatem pro numeratore, & tunc est species multiplex superparticularis aut submultiplex superparticularis: aut prouenit numerus cum minutia habente numerum pro numeratore, & tunc est species multiplex superpartiens, aut est submultiplex superpartiens.

Tales igitur sunt quotientum signationes.

2. $1\frac{1}{2}$. $1\frac{2}{3}$. $2\frac{1}{2}$. $2\frac{2}{3}$.

Signationes quinq; specierum maioris inæqualitatis.

2	3	5	5	8
1	2	3	2	3

Sequuntur

Sequuntur signationes quinq; specierum minoris inæqualitatis.

1	2	3	4	5
2	3	5	5	8

Obseruabis autem quotientes proportionum non esse unitatum fractiones sed numerorum, ut $2\frac{1}{4}$ repræsentat 4 contineri sub hoc numero 11, bis cum tribus quartis quaternarij: atque ita repræsentatur minor inæqualitas. Vel $2\frac{3}{4}$ repræsentat 11 continere 4, bis cum tribus quartis quaternarij: atq; ita repræsentatur maior inæqualitas.

Ex ijs quæ iam dixi de utroq; genere proportionum, sufficienter intelligis, ut uno genere declarato per species & subspecies suas, alterum quoq; genus simul sit satis declaratum.

Quantum autem ad appellationē attiner, minor inæqualitas semper præmittit uocabulis specierum et subspecierum suarum præpositionem hanc grāmaticalem SVB, atque ea præpositione omnino differunt appellationes proportionū minoris inæqualitatis ab appellationibus proportionū maioris inæqualitatis. Vt autem genera differant in modo referendi terminum ad terminum, item ut differant dispositione terminorum, satis indicatum est. Itaq; genus maioris inæqualitatis uolo per suas subspecies monstrare, quantum sufficere puto, ne uerba frustra multiplicentur in re manifesta.

Sequuntur signationes specierum Maioris inæqualitatis cum appellationibus earum.

Signationes subspecierum speciei multiplicis.

2	3	4	5	6
1	1	1	1	1
Dupla	Tripla	Quadrupla	Quintupla	Sextupla

Signationes subspecierum speciei superparticularis.

3	4	5	6	7
2	3	4	5	6 &c.
Sesquialtera	Sesquitertia	Sesquiquarta	Sesquiquinta	Sesquisexta.

Quotientes earum.

$1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{3}$. $1\frac{1}{4}$. $1\frac{1}{5}$. $1\frac{1}{6}$.

Vides ut in his, appellationes uarientur, iuxta denominatorum uariationes.

Signationes subspecierum speciei superpartientis.

Habet hæc species infinitas subspecies aliarum subspecierū: & tamen proportiones sub tam infinitis infinitatibus singulas occurrentes facile appellabis ex quotientis inspectione, quem facit diuisio maioris per minorem terminum. Variantur uero appellationes iuxta uariationem numeratorum & denominatorum minutiarum in quotientibus inuentarum, ut uidebis. Diligenter autem obseruabis in superpartientibus & multiplicibus superpartientibus (in alijs nō opus est ista obseruatione) ne appellationem sumas à quotiente, qui minutiam habeat, cuius termini ad inuicem sint compositi.

5	7	9	11	13
3	5	7	9	11 &c.
Superbipartiēs tertias	Superbipartiens quintas	Superbipartiēs septimas	Superbipartiens nonas	Superbipartiēs undecimas.

Quotientes earum.

$1\frac{2}{3}$. $1\frac{2}{5}$. $1\frac{2}{7}$. $1\frac{2}{9}$. $1\frac{2}{11}$.

Aliæ species superpartientes.

7	8	10	11	13
4	5	7	8	10
Supertripartiens quartas.	Supertripartiens quintas.	Supertripartiēs septimas.	Supertripartiēs octauas.	Supertripartiēs decimas.

Quotientes earum.

$1\frac{3}{4}$. $1\frac{3}{5}$. $1\frac{3}{7}$. $1\frac{3}{8}$. $1\frac{3}{10}$.

Sequuntur aliæ signationes superpartientium.

9	11	13	15	17	
5	7	9	11	13	&c.
Superquarpartiens quintas.	Superquarpartiens septimas.	Superquarpartiens nonas.	Superquarpartiens undecimas	Superquarpartiens tredecimas	

Quotientes earum.

$1\frac{4}{5}$. $1\frac{4}{7}$. $1\frac{4}{9}$. $1\frac{4}{11}$. $1\frac{4}{13}$.

Et ita in infinitum protenduntur subspecierum species huius speciei tertiæ: ut,

$1\frac{5}{8}$. $1\frac{5}{7}$. $1\frac{5}{9}$. $1\frac{5}{9}$. $1\frac{5}{11}$.

Item,

$1\frac{6}{7}$. $1\frac{6}{11}$. $1\frac{6}{13}$. $1\frac{6}{17}$. $1\frac{6}{19}$. &c.

Signationes subspecierum speciei multiplicis superparticularis.

5	7	9	11	13	
2	3	4	5	6	&c.
Dupla sesquialtera.	Dupla sesquitertia.	Dupla sesquiquarta.	Dupla sesquiquinta.	Dupla sesquisexta.	

Quotientes earum.

$2\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{3}$. $2\frac{1}{4}$. $2\frac{1}{5}$. $2\frac{1}{6}$.

Triplæ superparticulares.

7	10	13	16	19	22	25	
2	3	4	5	6	7	8	&c.

Quotientes earum.

$3\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{3}$. $3\frac{1}{4}$. $3\frac{1}{5}$. $3\frac{1}{6}$. $3\frac{1}{7}$. $3\frac{1}{8}$.

Quadruplæ superparticulares.

$4\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{3}$. $4\frac{1}{4}$. $4\frac{1}{5}$. $4\frac{1}{6}$.

Et sic de alijs in infinitum.

Signationes subspecierum speciei multiplicis superpartientis.

8	12	16	20	24
3	5	7	9	11
Dupla superbipartiens tertias.	Dupla superbipartiēs quintas.	Dupla superbipartiēs septimas.	Dupla superbipartiens nonas.	Dupla supbipartiens undecimas

Quo-

Quotientes earum.

$2\frac{2}{3}$. $2\frac{2}{7}$. $2\frac{2}{5}$. $2\frac{2}{9}$. $2\frac{2}{11}$.

Vides ut denominationes uarientur ſecundum uariationem numeri integri & utriuſq; termini minutiæ.

Duplæ ſupertripartientes.

11	13	17	19	23
4	5	7	8	10 &c.

Quotientes earum.

$2\frac{3}{4}$. $2\frac{3}{7}$. $2\frac{3}{5}$. $2\frac{3}{8}$. $2\frac{3}{10}$.

Triplæ ſuperbipartientes.

11	17	23	29	35
3	5	7	9	11 &c.
Tripla ſuperbipartiens tertias.	Tripla ſuperbipartiens quintas	Tripla ſupbipartiens ſeptimas	Tripla ſuperbipartiens nonas.	Tripla ſupbipartiens undecimas

Quotientes earum.

$3\frac{3}{7}$. $3\frac{3}{7}$. $3\frac{3}{5}$. $3\frac{3}{9}$. $3\frac{3}{11}$.

Triplæ ſupertripartientes.

15	18	24	27	33	36
4	5	7	8	10	11 &c.

Quotientes eorum.

$3\frac{3}{4}$. $3\frac{3}{7}$. $3\frac{3}{5}$. $3\frac{3}{8}$. $3\frac{3}{10}$. $3\frac{3}{11}$.

Et ſic de alijs in infinitum.

VVides ſatis ut ubiq; appellationes ſeu denoſationes proportionũ ſumantur ſecũdum quotientes diuiſionũ, quibus maior terminus diuiditur per minorem, ut facile ſit inuenire denominationẽ ꝓportionis inter quoſcũq; duos numeros ꝓpoſitos.

Sub duobus generibus proportionũ inæqualitatis continentur decẽ ſpecies: quinq; maioris inæqualitatis, & quinq; minoris inæqualitatis. Ex illis decem ſpeciebus, ſunt quatuor ſpecies quarũ quælibet ſuũ ordinẽ unicũ habet cõtinentẽ ſpecies infinitas: & ex illis duæ ſpecies ſunt maioris inæqualitatis, uidelicet multiplex & ſuperparticularis, & duæ ſunt minoris inæqualitatis, uidelicet ſubmultiplex et ſubſuperparticularis.

Deinde ex reliquis sunt quatuor species aliæ, quarum quælibet infinitos ordines habet, & sub quolibet ordine infinitas species proportionum. Et ex illis sunt duæ maioris inæqualitatis, uidelicet superpartiēs et multiplex superparticularis: duæ uero reliquæ sunt minoris inæqualitatis, uidelicet subsuperpartiens & submultiplex superparticularis.

Demum restant duæ species, quarum quælibet infinitas species complicat, ita ut quælibet earum infinitos ordines habeat, & in quolibet ordine infinitas species proportionum. Harum una est sub genere maioris inæqualitatis, uidelicet multiplex superpartiens: altera est sub genere minoris inæqualitatis, uidelicet submultiplex superpartiens.

De inuentione duorum numerorum sub specie aliqua proportionum proposita quacunq;

Scribe quotientem secundum denominationem seu appellationem quam audis à proponente, ut si quis petat à te dari proportionem, duplam supertripartientem septimas, iuxta hanc denominationem, hunc scribito quotientem $2\frac{3}{7}$: & cum ex quotiente illo unam minutiam feceris (ut ex $2\frac{3}{7}$, fit $\frac{17}{7}$) erunt termini minutiæ illius, termini proportionis quam quæris, ut $\frac{17}{7}$ est proportio dupla supertripartiens septimas, facta ex quotiente hoc $2\frac{3}{7}$. Pro inuenienda proportione sub specie multiplici, ut est dupla, aut tripla &c. nihil aliud facies, nisi ut numero appellationis, unitatem subscribas, ut decupla sic stabit $\frac{10}{1}$.

De Proportionalitatibus.

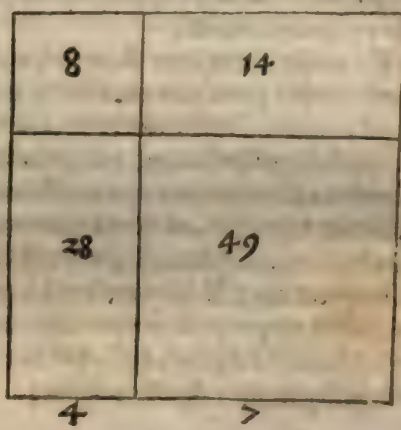
PRoportionalitas nihil aliud est quàm proportionum æqualium per inæquales numeros dispositio. Quædam proportionalitates sunt continuæ, ut progressiones Geometricæ, de quibus dictum est quarto capite. Tot autem sunt species proportionalitatum continuarum, quot ipsæ proportiones speciebus subiacent. Quàm uero infinitæ sint species proportionum, satis dixi paulo superius. Et ut ex duobus numeris, cuiuscunq; fuerint proportionis, possis proportionalitatem cōtinuam deducere

ducere, posui superius in parte quarta regulã. Item cuiuscunq; proportionis quotientem posueris pro radice, pgressionis Geometricæ, erit deductio illa progressionis, proportionalitas continua, denominata à proportione q̃ fecerat illum quotientẽ, ut 1. $1\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{4}$. $3\frac{3}{8}$. $5\frac{1}{16}$. $7\frac{19}{32}$. est proportionalitas sesquialteræ proportonis.

De proportionalitate contigua.

COntigua seu discontinua proportionalitas, sub quatuor solummodo terminis utilis esse inuenitur, & ualde utilis, adeo ut ferẽ nihil sit in mathematicis disciplinis, quod non usu eius gaudeat. Sic autem est natura eius, ut duabus proportionibus æqualibus, sub quatuor terminis constitutis, sit contenta, nihil omnino curans quã proportionẽ habeant termini medij, dummodo proportio duorum posteriorum terminorũ respondeat proportioni terminorum duorum priorum. Prior autem proportio ponitur tanquã exemplar, & sequitur posterior tanquam exemplatũ opus, ex æqualitate prioris sumptũ. Et quia proportio inter duos medios terminos non curatur, contingit nonnunquam ut continua proportionalitas pro contigua se ingerat, præter negotij, quod geritur, iacturã seu detrimẽtum. Exemplũ Geometricũ.

Quoties duæ lineæ diuidunt quadrangulum rectangulum orthogonaliter, tũc quatuor partes diuisi quadranguli, erunt ad inuicem proportionales.



Huiusmodi figuris ea oculis subiecta uides, q̃ Euclides de quatuor numeris proportionalibus proponit, ut 14. quinti

sic dicit: Si fuerint quatuor quãtitates proportionales, fueritq; prima maior tertia, secundam quarta esse maiorem necesse est: quòd si prima minor fuerit tertia, erit etiam secunda minor quarta.

Item si fuerint quatuor quantitates proportionales, permutatim quoq; proportionales erunt: & est 14 septimi, item 16 quinti. hoc est, sicut ea est proportio primi ad secundum, quæ est tertij ad quartum: sic ea est proportio primi ad tertium, quæ est secundi ad quartum.

Item quæ est proportio primi ad secundum, ea est proportio primi & tertij ad secundum & quartum. Hoc uult Euclides 5 septimi, item 18 quinti, ubi sic proponit: Si fuerint quantitates disiunctim proportionales, coniunctim quoq; proportionales erunt. Sic quæ est proportio primi ad tertium, ea est proportio primi & secundi ad tertium & quartum.

Quando tertius inter extremos fuerit medium arithmeticale, tunc secundus inter eosdem extremos erit medium harmonicale, ut 6. 9. 12. 18. Quando unus ex eis fuerit quadratus, necesse est ex multiplicatione trium reliquorum inter se fieri quadratum. Quando uterq; extremorũ fuerit cubicus, necesse est quatuor illos proportionales, non contigue sed continue esse proportionales.

Ex multiplicatione duorum mediorum inter se, & diuisione producti per primum, necesse est produci quartum. Et hæc est regula, quam De Tri uocant, id est, regula de tribus numeris propositis quibuscunq;, per quos inueniatur quartus, proportionalis ad tres priores propositos. Quidam uocant eam Mercatorum regulam, eò quòd omnes calculationes earum mediante hac regula fiant. Alij uocant eam regulam auream, ob excellentiam eius, & immensam latitudinem eius, ut quæ ferè in omnibus negotijs & artibus hominũ se immisceat & consulat. Siquidem & Algebra ipsa, quantacunq; laude splendeat, nihil esset absq; huius regulæ auxilio.

Duo

Duo extremi termini inter se multiplicati, idem faciunt pro ductū, quod duo medij inter se multiplicati. Et hæc est optima probatio regulæ De tri, & est 20. septimi Euclidis: quæ in Algebra etiam frequentatum habet usum.

Ex ea sequitur, quòd ex multiplicatione quatuor terminorū inter se necesse est produci numerum quadratum. Ex multiplicatione duorum mediorum inter se, & diuisione producti prouenit primus. Et hæc est regula quam De tri inuersam uocant, quæ & ipsa usum habet in uarijs negotijs.

Contingunt etiam calculationes, ut suis locis uidebimus, in quibus mediorum alter inueniēdus sit per reliquos. Vt tertius prouenit, si productum extremorum inter se multiplicatorum diuidatur per secundum: sic tertius diuidens productum extremorum, producit secundum.

¶ Algorithmus proportionum.

DE repræsentatione & pronūciatione proportionum satis dictum est in superiore loco. Item de reductione proportionum in terminos suos proprios, non opus est aliqua alia regula, quàm ea quam dedi in Algorithmo minutiarum, de reductione terminorum minutiarum in terminos minimos: ex prima & secūda septimi Euclidis. Restat nunc ut de additione & subtractione, de multiplicatione & diuisione dicam.

¶ Regula Additionis.

Multiplica duces inter se, & comites etiā inter se multiplica. Boëtius ducis uocabulo notat terminum proportionis qui superne scribitur, dum ipsa proportio ponitur ad regulam. Sic comitis nomine signat terminū alterum qui inferne scribitur.

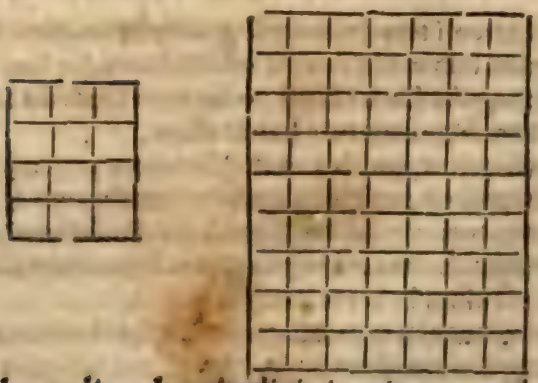
Exemplum regulæ.

9 ——— 7 facit 63
4 ——— 3 12

Demonstratio regulæ.

Vide ut ex duobus ducibus, unus dux fiat: & ex duobus comitibus, unus comes.

Certe



Certe uides, ut linea longitudinis in minore quadrangulo sit 4: & linea longitudinis in maiore quadrangulo sit 9. Et ut 9 ad 4 faciat unam proportionem. Deinde linea latitudinis in minore quadrangulo, uides esse 3: & lineam latitudinis in maiore quadrangulo uides esse 7. & ut 7 ad 3 faciat aliam proportionem. Tertio uides aream minoris quadranguli esse 12: & aream maioris quadranguli esse 63. & ut 63 ad 12 faciat unam proportionem aggregatam ex duabus proportionibus laterũ. Sic Euclides proponit 5. octaui: Omnium, inquit, numerorum compositorum proportio unius ad alterum, est producta ex laterum suorum proportionibus.

Exemplum de genere minoris inæqualitatis.

4 ——— 3 facit 12
9 ——— 7 63

¶ Regula subtractionis.

Ipse autem docet in subtractione proportionis nos debere facere ex nominatre denominatorem regulam additionis: ut $\frac{9}{4}$ subtrahenda de $\frac{63}{12}$, sic stat ad regulam, $\frac{4}{9} — \frac{63}{12}$, facitq; relicta proportio $\frac{252}{108}$, hoc est $\frac{7}{3}$.

Item $\frac{4}{9}$ subtrahenda de $\frac{12}{63}$, sic stat ad regulam, $\frac{9}{4} — \frac{12}{63}$, facitq; $\frac{108}{252}$, id est $\frac{3}{7}$.

Cum autem additio proportionũ, similis sit multiplicationi minutiarum

Terminos proportionis subtrahendæ transpone (id est, ex duce fac comitem, & ex comite ducem) & tunc operare secundum regulam additionis: ut $\frac{9}{4}$ subtrahenda de $\frac{63}{12}$, sic stat ad regulam, $\frac{4}{9} — \frac{63}{12}$, facitq; relicta proportio $\frac{252}{108}$, hoc est $\frac{7}{3}$.

Item $\frac{4}{9}$ subtrahenda de $\frac{12}{63}$, sic stat ad regulam, $\frac{9}{4} — \frac{12}{63}$, facitq; $\frac{108}{252}$, id est $\frac{3}{7}$.

Cum autem additio proportionũ, similis sit multiplicationi

minutiarum, restat ut subtractio proportionum similis sit diui sioni minutiarum.

Quando ex subtractione mutat̃ genus, hoc signum est, subtrahendam proportionem fuisse maiorem ea à qua facta est subtractio.

De multiplicatione.

Quemadmodum pannus aut lignum, non multiplicat, sed multiplicatur: sic proportio non multiplicat sed multiplicatur. Habet autem multiplicatio duas regulas, unam quæ docet multiplicare proportiones per numeros integros: alteram quæ docet eas multiplicare per numeros fractos seu per minutias.

Regula multiplicationis proportionum per numeros integros.

Pro numero multiplicante, pone proportionẽ multiplicandam, quoties ipse numerus multiplicans continet unitatem: deinde multiplica duces inter se, & similiter comites multiplica inter se. Vt uolo multiplicare $\frac{3}{2}$ per 4, pono ergo $\frac{3}{2}$ quater, hoc modo: $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}$. facit $\frac{81}{16}$.

Regula multiplicationis proportionum per numeros fractos.

Primo, multiplica tuam proportionem per numeratorem, iuxta regulam iam superius positam. Secundo, ex producto facto, extrahe radicem, qualem denominator minutiæ repræsentat. Exemplum.

Volo multiplicare $\frac{81}{16}$ per $\frac{3}{4}$. primo multiplico iuxta numeratorem, hoc est, ego triplo hanc proportionem propositam sic, $\frac{81}{16}\cdot\frac{81}{16}\cdot\frac{81}{16}$. facit $\frac{531441}{4096}$. Deinde quæro radicem zensizensicam ex utroq; termino, facit $\frac{27}{8}$. Ideo autẽ quæro radicem zensizensicam, quòd denominator (id est 4) repræsentat radicem zensizensicam, quemadmodum 2 repræsentat radicem quadratam, & 3 repræsentat radicem cubicam: ut satis docui superius in parte libri huius quinta, ex hac progressione,

$$0 : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256.$$

¶ De diuisione proportionum.

Quemadmodum numerus ulnarum diuiditur uel per numerum ulnarum, uel per numerum abstractum: sic proportio diuiditur uel per numerum abstractum, uel per proportionem.

Quando proportio diuiditur per proportionẽ, tunc in quotiente prouenit numerus & nunquam proportio: quia inquiro quoties proportio diuidens inueniatur in proportione diuidenda, ideo necesse est ut prouenìat quotiens aduerbialis. Eodem modo diuiditur pannus per pannũ: inquiro enim, quoties pars panni sumpta iuxta mensurã ulnæ, inueniatur in ipso panno.

Quando autem proportio diuiditur per numerum abstractum, tunc semper prouenit in quotiente proportio: quia tunc inquiro, an ipsa proportio possit diuidi in partes aliquot inter se æquales. Sic dum diuido florenum per numerũ abstractum, tunc prouenit quotiens nominalis & denominatus, &c.

¶ Habet aũt diuisio ꝓportionũ tres regulas, ut iam uidebis.

Regula diuisionis proportionum per proportiones.

Subtrahe proportionem diuidentem à proportione diuidenda, donec uel æqualitas occurrat, uel genus proportionum mutetur. Colligitur aũt quotiens ex unitatibus illis, quibus signantur uices subtractionum: nam uice uniuscuiusq; subtractionis ponenda est unitas.

Exemplum de occurrente æqualitate.

Vtuolo diuidere $\frac{729}{64}$ per $\frac{3}{2}$, id est per sesquialterã proportionẽ.

Prima subtractio.

2	729	facit	1458	seu	243
3	64		192		32

Secunda subtractio.

2	243	facit	486	seu	81
3	32		96		16

Tertia subtractio.

2	81	facit	162	seu	27
3	16		48		8

Quarta

Quarta subtractio.

2 ——— 27 facit 54 seu 9
3 ——— 8 24 4

Quinta subtractio.

2 ——— 9 facit 18 seu 3
3 ——— 4 12 2

Sexta subtractio.

2 ——— 3 facit 6 Ecce æqualitas:
3 ——— 2 6

Quando occurrit æqualitas, signum est proportionem diuidentem, numerare diuidendam proportionem præcise: & esse diuidentem proportionem partem aliquotam proportionis diuidendæ.

Quia autem factæ sunt sex subtractiones, ideo quotiens diuisionis huius est 6.

Exemplum ubi æqualitas non occurrit.

Quando non occurrerit æqualitas, sed genus tantum fuerit mutatum, signum est proportionem diuidentem esse partem aliquantã diuidendæ proportionis, & diuidendam nõ numerare. Vt uolo diuidere $^{2}_{12}{}^{187}_{8}$ per $^{27}_{8}$.

Prima subtractio.

8 ——— 2187 facit 17496 seu 81
27 ——— 128 3456 16

Secunda subtractio.

8 ——— 81 facit 648 seu 3
27 ——— 16 432 2

Tertia subtractio.

8 ——— 3 facit 24 seu 4
27 ——— 2 54 9

Vides hic genus esse mutatum: prouenit enim proportio minoris inæqualitatis. Quare tertia subtractio non debuit fieri.

Quia ergo duæ subtractiones factæ sunt, ideo quotiens facit 2. Remansit aũt $\frac{3}{4}$, & est illa remanens proportio, tertia pars

diuidentis proportionis, ideo totus quotiens facit $2\frac{1}{3}$. Est igitur proportio dupla sesquitertia inter $2\frac{187}{128}$ & $2\frac{7}{8}$.

Regula diuisionis proportionum per numeros integros.

Pro absolutione diuisoris, extrahe de utroq; termino proportionis radicem illam quam diuisor repræsentauerit: ut, $\frac{729}{64}$ diuisa per 2, facit $\frac{27}{8}$. Item $\frac{729}{64}$ diuisa per 3, facit $\frac{9}{4}$. Item $\frac{729}{64}$ diuisa per 6, facit $\frac{3}{2}$. Item $\frac{243}{32}$ diuisa per 5, facit $\frac{3}{2}$. Item $\frac{256}{81}$ diuisa per 4, facit $\frac{4}{3}$. Item $\frac{2187}{128}$ diuisa per 7, facit $\frac{3}{2}$. & sic de alijs.

Regula diuisionis proportionum per minutias.

Permuta terminos minutiæ diuidentis, & tunc operaberis iuxta regulam multiplicationis superius dátam, uidelicet de multiplicatione proportionum per numeros fractos.

Exemplum.

Volo diuidere $2\frac{7}{8}$ per $\frac{1}{4}$: sic ergo stat exemplum ad regulam, $2\frac{7}{8}$. $\frac{4}{1}$, facit igitur 4 hanc proportionis repetitionẽ, $\frac{23}{8}$. $\frac{27}{8}$. $\frac{27}{8}$. $\frac{27}{8}$. facit $\frac{5314416}{4096}$. Deinde quære radicem cubicã de utroq; termino pportionis factæ (propter 3 repræsentantẽ radicem cubicam) facit $\frac{81}{16}$. itaq; $2\frac{7}{8}$ diuisa per $\frac{1}{4}$ facit $\frac{81}{16}$.

Sequitur de proportione minutiarum.

Positis minutijs duabus, illa erit inter eas proportio, quæ fuerit inuenta inter numeratores illarum, postquam ad æquales denominatores fuerint reductæ.

Vt inter $\frac{2}{3}$ & $\frac{3}{4}$ est proportio sesquioctaua: nam reductæ ad æquales denominatores sic stant, $\frac{12}{18}$. $\frac{9}{12}$.

De proportionibus progressionum.

Posito numerorũ ordine quocunq;, proportio quæ est inter extremos numeros, constat ex additione omnium proportionum intermediarum, ut 3. 5. 6. 8. 12. 13. 14. Quæ est proportio 14 ad 3. ea est, pportio collecta ex omnibus his sequentib. 5: 3; 6: 5; 8: 6; 12: 8; 13: 12; 14: 13: facit autem additio omnium harum proportionum proportionem hanc $\frac{524160}{112320}$; hoc est $\frac{14}{3}$.

Sed

Sed breuius sic inuenies.

Quilibet numerus ex inferioribus, delet æqualem sibi ex superioribus. Vnde sic stabunt termini:

5. 8. 8. xv. xz. 14. manent 14
3. 5. 8. 8. xv. xz. 3

De proportionibus irrationalibus.

OMnis proportio rationalis, est proportio integra: & omnis proportio irrationalis, est proportio fracta, tanquam minutia alicuius proportionis integræ. Nam sicut ex diuisione numeri denominati, per numerum abstractum, frequenter oritur denominatus numerus fractus: sic dum proportionem diuidit numerus, oritur frequenter proportio fracta. i. irrationalis.

Omnis proportio numeri rationalis ad numerum irrationalem est irrationalis. Sed non omnis proportio numeri irrationalis ad numerum irrationalem, est irrationalis. Omnis autem proportio numeri rationalis ad numerum rationalem, rationalis est. De reliquis dicam inferius suo loco.

De proportionalitate Harmonica, Contraharmonica, & alijs quibusdam similibus. Caput VII.

DE GEOMETRICIS proportionalitatibus continuis & contiguis arbitror me satis dixisse, donec de usu earum integer mihi liber ueniat scribẽdus. Ex multis autem audiui, progressiones & radicũ extractiones esse speculationes inutiles, cum interim Arithmeticam summa laude conarentur efferre. Sed aliud est scire ut progressiones progrediantur, & aliud est usum earũ cognoscere. Certe ars Gebri, quanta quanta sit, nihil aliud est quàm usus proportionalitatum. Est autem duplex relatio numeri ad numerum: refertur enim numerus ad numerum sub obseruatione excessus, quo numerus differt à numero. Deinde

conferuntur numeri, tanquam mensura & mensurandum, sub obseruatione quotientis prouenientis ex numeratione seu diuisione maioris per minorem. Prior relatio facit proportionem Arithmeticam, & inde habemus proportionalitates seu progressiones Arithmeticas. Altera uero facit proportiones proprie sic dictas. Et ex his habemus progressiones Geometricas.

Constat autem Harmonicas proportionalitates, & Contraharmonicas, & alias huiusmodi, esse compositas ex Arithmeticis & Geometricis proportionalitatibus, eò quòd non minus differentiæ in illis considerentur quàm proportiones proprie dictæ. Et inde habemus Mediorum distinctiones, ut quædam Media dicantur Arithmetica, quædam Geometrica, quædam Harmonica, quædam Contraharmonica &c. circa quorum explicationem dum Boëtius esset occupatus, & tres terminos poneret, nihil interim solicitus de proportionalitatum huiusmodi continuationibus, inuenti sunt postea qui negarent huiusmodi proportionalitates posse extendi ultra tres terminos continue.

Vidit autem Boëtius uim & efficaciam immensam esse in proportionibus & proportionalitatibus: ideo studiosè obseruauit in illis uariationum modos, ut uidebimus.

Et quia necesse est duos terminos esse in una proportione, & in proportione differentiarum oportet concurrere tres numeros (id est, medium & duo extrema) ideo uoluit Boëtius de proportionalitatibus trium terminorum singularem tractationem habere, non curans interim de continuatione earum per terminos plures.

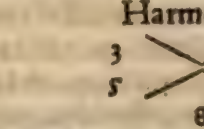
¶ Prima uariatio proportionalitatum.

Geometrica proportionalitas.

Geometrica.

Harmo-

Harmonica.



Primo, ea est proportio 6 ad 18, quæ est 3 ad 9. id est, minoris extremi ad medium. Hinc fit, ut multiplicatio prioris extremi in medium tantum faciat, quantum multiplicatio posterioris differentiæ in extremum minus.

Secũdo, ea est proportio 6 ad 18, quæ est 9 ad 27. id est, medij ad extremum maius. Hinc fit ut differentia prior multiplicata in extremum maius tantum faciat, quantum differentia posterior in medium.

Tertio, ea est proportio 3 ad 12, quæ est 5 ad 20. id est, minoris extremi ad maius extremum. Hinc est ut differentia prior multiplicata in extremum maius tantum faciat, quantum facit differentia posterior in extremum minus.

De proportionalitate Harmonica.

PRoportionalitas Harmonica est dispositio trium numerorum secundum proportionalitatem contiguam, qua proportio prioris differentiæ ad differentiam posteriorem eadem est cum proportione minoris extremi ad maius extremum: ut 3 4 6.

Sic igitur uidit Boëtius secundum Geometricam proportionalitatem fuisse quærendam Harmonicam.

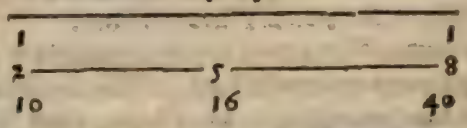
Quamuis autem Harmonica proportionalitas non secundũ Arithmeticam proportionalitatem, sed secundum Geometricam, sit inuenta: tamen ipsa non ex Geometrica, sed ex Arithmetica inuenta est. Miris uero modis inter Geometricam proportionalitatem & Arithmeticam uersatur & uariatur Harmonica proportionalitas, ut ob hanc causam existimẽ illi hoc appellationis uocabulum esse inditũ. Modo enim ab Arithmetica discedit ad Geometricã; modo ab hac ad illã rursus accedit: modo

modo utriq; indissolubiliter coniuncta uidet: modo ab utraq; discedit. Atq; his modis dissimilitudo quæ est inter Arithmeticam & Geometricam proportionalitatem, ab Harmonica iucunda uariatione moderatur. Non enim uideo, quid Harmonica habeat, quod ad concentus Musicos pertineat, quod Arithmetica non habeat æquali commoditate.

¶ Inuentio proportionalitatis Harmonicæ trium terminorum, secundum proportionem quam uolueris diuisam esse per medium Harmonicum.

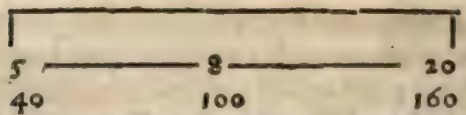
Pone duos numeros secundum proportionem quam uolueris esse diuisam per medium Harmonicum, & constitue inter eos medium Arithmeticale (id est, adde eos, & aggregati dimidium recipe). Constituta uero hoc modo progressione Arithmetica, multiplicatione terminorum eius procreabis sic: Multiplica primum in secundum, deinde primum in tertium, et demum secundum in tertium. Hac breui facilique regula ex qualibet progressione Arithmetica trium terminorum, producitur progressio Harmonica trium terminorum. Vt ex hac Arithmetica 1.2.3. fit hæc Harmonica 2. 3. 6. Item ex hac Arithmetica 3.4.5. fit hæc Harmonica 12.15. 20. Item ex hac Arithmetica progressione 2. 5. 8. fit hæc Harmonica 10.16.40. & sic de alijs.

Pictura regulæ de inuentione Arithmeticæ ex Harmonica proportionalitate.

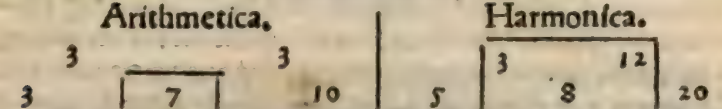


Eodem autem modo, quo ex Arithmetica progressione fit Harmonica, fit rursum ex Harmonica progressione, Arithmetica. Vt ex hac Harmonica 2.3.6. fit hæc Arithmetica 6.12.18. & sic de alijs.

Inuentio Harmonicæ ex Arithmetica.



Cum uero medium Geometricum in se multiplicatum tantũ faciat, quantum extrema inter se multiplicata, facit medium Arithmeticum plus, & tanto plus facit, quãtum fit ex multiplicatione differentiarum inter se: medium uero Harmonicum tanto minus facit in se multiplicatum, quàm extrema inter se, quantum facit ipsa differentiarum multiplicatio inter se. Sic Geometrica pulchra ratione uidetur medium quoddam esse inter Arithmeticam & Harmonicam.



Habet autem Arithmetica progressio differentias inter se æquales, & proportiones terminorum inter se inæquales. Geometrica uero habet differentias inter se inæquales, & proportiones terminorũ inter se æquales. Harmonica autẽ neq; æquales habet differentias, neq; æquales proportiones terminorum.

¶ Vide autem miram trium proportionalitatum coniunctionem.

Quoties Geometrica proportionalitas quatuor terminorũ, receperit numerum intermedium, qui fuerit medium Arithmeticale inter extremos, necesse erit reliquum intermediorum esse medium Harmonicum inter eosdem extremos. Sic, uice uersa, si recipiat medium Harmonicum, necessario recipiet etiam medium Arithmeticum. Talis autem proportionalitas Geometrica necessario erit contigua: exemplum, 6. 8. 9. 12.

¶ Vtrum progressio Harmouica possit extendi ultra tres terminos.

Certum est hanc progressionem, 2. 3. 6. & alias infinitas progressiones Harmonicas trium terminorum, non posse ulte

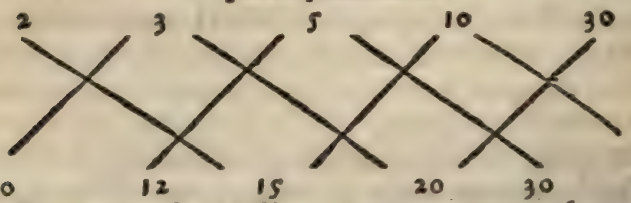
rius extendi. Nihilominus tamen certum est hanc Harmonicã 3. 4. 6. & alias infinitas, posse extendi ultra tres terminos. Et possibilitatis huius poterat, eos qui hoc negant, admonere saltem cubi consideratio: qui cum habeat sex superficies, & octo angulos solidos, duodecim latera, & uigintiquatuor angulos superficiales, pulchre nobis Harmonicam quatuor terminorũ proponit hanc 6. 8. 12. 24.

Item hocipsum admonere potuit scalæ Musicalis inspectio: nam in descensu scalæ inuenies Harmonicam progressionem quatuor terminorum non semel sed sæpius: scilicet dd. aa. d. D. Item cc. g. c. C. Item aa. e. a. A. Item g. d. G. rut.

Denicq; ex qualibet progressione Arithmetica poteris progressionem Harmonicam producere habentem tot terminos, quot ipsa Arithmetica terminos habet. Sic autem operaberis.

Terminos tuæ Arithmeticæ progressionis inter se omnes multiplica: deinde productum diuide per singulos terminos tuæ Arithmeticæ, incipiens à maximo usque ad minimum. Vt ex hac Arithmetica, 1. 2. 3. 4. 5. 6. fit hæc Harmonica, 10. 12. 15. 20. 30. 60. Et rursum ex qualibet Harmonica, eodẽ modo, fit Arithmetica.

Probatio pulchra continuationis Harmonicæ per æquationes.



Hoc est, quantum facit differentia 2 in 15, tantum facit differentia 3 in 10: & quantum facit differentia 3 in 20, tantum facit differentia 5 in 12: & quantum facit differentia 5 in 30, tantũ facit differentia 10 in 15. & sic deinceps. Item quãtum faciunt 2. 15. 10. 60. inter se multiplicati, tantum faciunt 10. 3. 20. 30. inter se multiplicati.

Alia

Alia probatio continuationis Harmonicæ.

In progressione Harmonica multorum terminorum, erunt etiam Harmonicæ proportionales, termini locorum parium inter se, item termini locorum imparium inter se, &c. Similia horũ fiunt etiam in Arithmeticis & Geometricis ꝓgressionib.

Exemplum de Harmonica.

Prima Harmonica progressio.

60 70 84 105 140 210 420.

Secunda progressio Harmonica.

60 84 140 420.

vel 30 Tertia Harmonica progressio.

70 105 210

Quarta Harmonica progressio.

60 105 420.

Regula inueniendi extremum maius per medium & extremum minus.

Multiplica duos tuos numeros inter se, & productum diuide per differẽtiam amborum. Vt ex 60 & 105, inuenio 420: item ex 70 & 105, inuenio 210: item ex 60 & 84, inuenio 140: & ex 84 & 140, inuenio 420. Item ex 60 & 70 inuenio 84: multiplico enim 60 in 70, & facio 4200. hoc diuido per 50, id est, per differentiam inter 60 & 10 differentiam amborum.

Regula qua ex maiore extremo & medio inuenitur extremum minus.

Multiplica duos tuos numeros inter se, & productum diuide per aggregatum ex maiore numero tuo, & differentia inter ambos tuos numeros,

Progressio Harmonica non habet finem regrediendo.

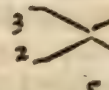
Progressio Arithmetica non habet finem progrediendo.

Progressio Geometrica non habet finem progrediendo & regrediendo.

Hæc autem non ſunt intelligenda de numeris integris ſolis, ſed (ut fieri ſolet in proportionum & proportionalitatum tractatione) etiam de numeris fractis ſeu minutijs.

¶ Sequitur alia uariatio medij comprehendentis tres ſpecies proportionalitatum, quarum nomina & exemplа hic uides.

Contraharmonica.



5

Similis Geometricæ prior. | Similis Geometricæ posterior.

2/2 × 1/4 5 | 5 3/4 × 2/6

Aequationes quas hic uides signari, non multiplicatione sed diuisione fiunt. Ponunt autem singulæ differentiam maiorem inter terminos minores. In prima uero uariatione ponebantur minores differentiæ inter minores terminos.

Primo, ea est proportio 3 ad 1, quæ est 6 ad 2. id est, maioris extremi ad minus extremum.

Secundo, ea est proportio 2 ad 1, quæ est 4 ad 2. id est, medij ad minus extremum.

Tertio, ea est proportio 3 ad 2, quæ est 6 ad 4. id est, maioris extremi ad medium.

¶ De proportionalitate Contraharmonica.

PRoportionalitas Contraharmonica, est dispositio trium numerorum secundum proportionalitatē contiguam, qua proportio prioris differentiæ ad differentiam posteriorem, eadem est cum proportione maioris extremi ad minus extremū: ut 3, 2, 5, 6.

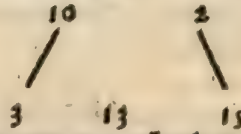
¶ Inuentio proportionalitatis Contraharmonicæ.

Contraharmonica proportionalitas fit ex Harmonica proportionalitate trium terminorum. Nam commutatis differentijs in pportionalitate Harmonica, statim uidebis medij mutationem inter priora extrema: ut ex 1. 2. fit 2. 1.

3. 4. 6. | 3. 5. 6.

Sic rursum ex Cõtraharmonica, fit Harmonica, eodem modo, uidelicet commutatione differentiarum.

Sic autẽ ſignantur æquationes, quæ fiunt ex multiplicatione terminorum & differentiarum.



Inter quoſcũq; duos numeros facile inuenitur medium Contraharmonicum rationale, integrum uel fractum, quemadmodum inter quoſcunq; duos numeros inuenitur etiam medium Harmonicum rationale integrum uel fractum. Et inter quoſcunq; duos numeros inuenitur medium Arithmeticum rationale integrum (ut dum numeri fuerint ambo pares uel ambo impares) uel fractum. Sed non inuenitur medium Geometricũ rationale inter quoſcunq; numeros duos.

¶ Diſſimilitudines.

Progreſſiones Geometricæ, Arithmeticæ, & Harmonicæ, ſi fuerint continuæ proportionales ſecundum ſpeciem ſuam, fuerintq; duo termini primi rationales, impoſſibile erit ut numerus irrationalis alicui earum continuetur. At in Contraharmonica cõtinuatur irrationalis numerus duobus rationalibus immediate poſitis, ut hic 5. 6. $\sqrt{8}$ 14 + 3. imò irrationalis numerus continuatur Cõtraharmonicæ tribus rationalibus immediate poſitis, ut hic 2. 5. 6. $\sqrt{8}$ 14 + 3.

In progreſſionibus Arithmeticis, Geometricis, & Harmonicis trium terminorum, ſi inter medium & extrema utrinq; ponantur duo media alia ſecundum ſpeciem illius proportionalitatis, tunc fiunt quinq; termini continue proportionales ſecundum ſpeciem ,pportionalitatis illius. Sed in proportionalitate Contraharmonica diuerſum inuenimus, ut in hac Contraharmonica, 4. 10. 12. Si inter mediũ & extrema ſtatuas duo media Cõtraharmonica, ſic ſtabunt numeri quinq;, 4. $8\frac{2}{7}$. 10. $11\frac{1}{11}$. 12.

Et tres numeri priores, uidelicet 4. $8\frac{2}{7}$. 10. sunt Contraharmonice proportionales. Item tres posteriores, uidelicet $10. 11\frac{1}{11}. 12.$ quemadmodum tres illi locorum imparium, 4. 10. 12. Sed tres medij non sunt proportionales Contraharmonice, uidelicet $8\frac{2}{7}. 10. 11\frac{1}{11}$. Quare dispositio illa quinq; numerorum nõ facit progressionem Harmonicam continuam.

Quando autẽ ponuntur quinq; termini Contraharmonice proportionales continue, tunc termini locorum imparium non erunt ad inuicem proportionales Contraharmonice: ut hic, $110 + \sqrt{\frac{8}{9}}\,6244. 220. 244. 264. \sqrt{\frac{8}{9}}\,22304 + 132$. tres priores termini sunt Contraharmonici, & tres medij, & tres ultimi. Ergo habes hic Contraharmonicam quinq; terminorum continue proportionalem: & tamen primus, tertius, & quintus, non faciunt ad inuicem proportionalitatem Contraharmonicam, quod ualde miror, in superioribus enim proportionalitatibus res aliter habet.

Regula inueniendi extremum maius ex minore extremo & medio.

Posito medio & extremo minore, multiplica differẽtiam eorum in extremum minus, & hoc productum adde ad quadratũ medij dimidiati: & radici quadratæ illius aggregati, adde medium dimidiatum. Vt uolo inuenire extremum maius ad illos duos numeros 24. 34, ita ut fiat proportionalitas Contraharmonica: medium est 34, eius dimidium est 17. huius quadratũ facit 289. Ad hoc quadratũ addo 240: tantum enim fit ex differentia 10 in minus extremum 24. Est igitur aggregatum 529. Huius radix est 23. ad hanc addo 17 (id est, dimidiũ medij seu numeri 34) fiunt 40. Quare sic stat proportionalitas Contraharmonica inuenta, 24. 34. 40.

Regula inueniendi extremum minus per medium & extremum maius.

Posito medio & extremo maiore, multiplica differẽtiam eorum in extremũ maius, & hoc productum subtrahe à quadrato medij

medij dimidiati, & radici quadratæ illius relicti, adde medium dimidiatum, tunc habebis extremum minus.

Hæc regula requirit magnos numeros cum paruis differentijs, ut tuipse facile senties in operationibus tuis.

De proportionalitate priore simili Geometricæ.

PRoportionalitas similis Geometricæ prior, est dispositio trium terminorum, in qua proportio prioris differentiæ ad posteriorē, æquat̃ ꝓportioni medij ad extremū minus, ut $_2{}^2{}_4{}^1{}_5$.

Regula inuentionis proportionalitatis huius.

Duobus numeris positis quibuscunq; , multiplica maiorem in se, & producto huic adde quod fit ex differentia in minorē, & hoc aggregatum diuide per maiorem, tunc habebis extremum maius ad priores duos numeros positos. Vt ex his duobus 290. 580, fit ille tertius 725 : item ex his duobus 580. 725, fit ille 841 : & ex his duobus 725 & 841, fit ille 941. Atq; ita habebis hanc progressionem proportionalitatis huius continuam 290. 580. 725. 841. 941.

Aequationes autem quas faciunt termini cum suis differentijs multiplicati, sic signantur.

290 145 116 100

290 580 725 841 941.

Hoc est, quantum faciunt 290 in 290, tantum faciunt 145 in 580: & tantum etiam faciunt 116 in 725, & etiam 100 in 841.

Quemadmodum autem medium Geometricū non semper est rationale inter rationalia extrema : sic medium proportionalitatis huius, non semper est rationale, dum extrema fuerint rationalia. Vt inter duos illos numeros 8 & 14, mediat ille irrationalis $\sqrt{\frac{8}{9}}0+3$ secundum proportionalitatem hanc.

Regula inueniendi medium inter extrema data.

Positis extremis, adde ad quadratum dimidiatæ differentiæ eorum

eorum, minoris extremi quadratum: & radici quadratæ de illo aggregato, adde dimidium differẽtiæ numerorum positorum. Vt uolo medium ponere inter 10 & 25, est differentia eorũ 15, cuius dimidiũ est $\frac{15}{2}$: huius quadratum est $\frac{225}{4}$, huic addo 100 (id est, minoris extremi quadratum) facit $\frac{625}{4}$. cuius radix facit $\frac{25}{2}$, cui addo $\frac{15}{2}$ (id est, dimidium differentiæ extremorum) fiunt 20. Sic ergo stat exemplum, 10. 5.

10. 20. 25.

Regula inueniendi extremum minus ex maiore extremo & medio.

Pone numeros tuos, & hoc quod fit ex differentia eorum in minorem, subtrahe à quadrato quod fit ex dimidio minoris in se, & radicem quadratam illius relicti adde ad dimidium minoris, tunc habebis extremum minus ad duos positos priores: ut ex 25 & 29, fit 20. Item ex 20 & 25, fit 10, &c.

De proportionalitate posteriore simili Geometricæ.

Proportionalitas similis Geometricæ posterior, est dispositio trium terminorum, in qua proportio prioris differentiæ ad posteriorem, æquatur proportioni maioris extremi ad medium; ut 3. 2.

1. 4. 6.

Regula inueniendi extremum minus ex duobus numeris datis.

Recipe duos numeros, quorum differentia non sit maior ipso minore: multiplica minorem in se, & ab hoc producto subtrahe quod fit ex multiplicatione differentiæ in maiorem, & relictum hoc diuide per minorem, tunc habebis extremum minus. Vt ex 3520 & 3960, fit 3025. Sic ex 3025 & 3520, fit 2449. Et sic ex 2449 & 3025, fit adhuc alius.

Sic autem signantur æquationes, quas faciunt termini cum differentijs suis multiplicati.

576 495 440

2449 3025 3520 3960.

Quēadmodum prior progrediens per terminos rationales, nunquam recipit irrationalem, sed regrediens recipit tales: sic hæc posterior proportionalitas nunquam recipit irrationalem numerum regrediendo, sed progrediendo recipit, ut hic, 1.4.6. $\sqrt{8}$ 21 + 3.

Regula progrediendi, hoc est, inueniendi extremum maius ad duos terminos præcedentes.

Pone tuos numeros, & hoc quod fit ex differentia eorum in maiorem, adde ad quadratum dimidij ipsius maioris, & ad radicem quadratam illius aggregati, adde dimidiū ipsius maioris, tunc habebis extremum maius: ut ex 55 & 64, facies 72.

Sed quemadmodum prior proportionalitas inter duos numeros rationales nonnunq; recipit irrationalem (quemadmodum Geometrica etiam solet) ita et hæc, ut hic 4 $\sqrt{8}$ 109 — 3.10.

Regula inueniendi medium inter extrema proportionalitatis huius.

Pone numeros tuos, & quadratum dimidiatæ differentiæ eorum, adde quadrato maioris, & à radice aggregati huius subtrahe dimidium differentiæ tuorum numerorum; ut inter 5 & 12 inuenies 9.

Sequitur tertia uariatio proportionalitatum.

De proportionalitate simili Contraharmonicæ priori.

PRoportionalitas similis Cōtraharmonicæ prior, est dispositio trium numerorum habentium differentias inæquales, quæ ambæ ad priorem differentiam relatæ, faciant eam proportionē, quam facit extremū maius ad extremū minus, ut hic

6. 4. | 4. 16.

15. 21. 25. | 5. 9. 25.

Addidi in descriptione proportionalitatis huius, particulam de inæqualitate differentiarum, propter Arithmeticas illas trium terminorum, quarum extrema sunt sub proportione dupla: ut est hæc 6. 9. 12. & similes, quas particula illa addita, ab hac specie excludit.

Regula inuentionis huius proportionalitatis.

Pone duos numeros, quorum differentia non coincidat cum numero minore, Adde differentiam eorum ad maiorem, & hoc aggregatum multiplica per minorē, & productum diuide per maiorem, tunc habebis medium.

Quando differentia duorum numerorum, quos recipis, fuerit maior numero minore, tunc peruenit minor differentia inter minores terminos. Quando uero differentia eorum fuerit minor minore numero recepto, tunc peruenit maior differentia inter minores terminos.

Exemplum primi, ut ex his duobus numeris $_2{}^3{}_5$. produces hoc exemplum, $_{10}{}^6{}_{16}{}^9{}_{25}$.

Exemplum secundi, ut ex his duobus numeris $_8{}^2{}_{10}$. producitur hoc exemplum, $_{80}{}^{16}{}_{96}{}^4{}_{100}$.

Hoc autem de uariatione uide.

In prima uariatione ponitur differentia minor semper inter terminos minores.

In secunda uariatione, ponuntur semper differētiæ maiores inter terminos minores.

In speciebus tertiæ uariationis, ponūt singulæ species modo minorem differentiam, modo maiorem differentiam, inter terminos minores.

Regula inueniendi maius extremum huius proportionalitatis.

Quadratum minoris numeri diuide per illam differentiam quæ est inter minorem numerum & differentiam amborum, tunc habebis extremum maius huius proportionalitatis.

Regula

Regula inueniendi minus extremum.

A quadrato maioris numeri, subtrahe hoc quod fit ex multiplicatione eorum inter se, & relicti radicem quadratã subtrahe ab ipso numero maiore. Vt ex 63 64 inuenies 56, & ex 63 & 56 inuenies 42 : & sic de alijs.

De proportionalitate, simili Contraharmonicæ, posteriore.

Proportionalitas similis Contraharmonicæ posterior, est dispositio trium numerorum, habentium differentias inæquales, quæ ambæ ad posteriorem differẽtiam relatæ, faciunt eam proportionem, quam facit extremum maius ad extremum minus : ut hic,

4. 6.	16. 4.
15. 19. 25.	5. 21. 25.

Quemadmodum ex Harmonica trium terminorum, fit proportionalitas Contraharmonica trium terminorum, & rursum ex Contraharmonica fit Harmonica, sola uidelicet commutatione differentiarum inter se : Sic sola commutatione differentiarum, commutant sua exempla inuicem, hæ duæ proportionalitates, quæ sunt similes Contraharmonicæ. Sic enim uides duo illa exẽpla paulo superius posita, esse transsumpta ex præcedentis speciei exemplis, &c. Nihilominus tamen proprias regulas pro proportionalitate hac ponam.

Regula inueniendi medium.

Pone numeros, quorum differentia non coincidat cum numero minore. A quadrato maioris subtrahe quod fit ex differentia multiplicata in minorem, & relictum diuide per maiorẽ, tunc habebis medium.

Regula inueniendi extremum maius.

Pone duos numeros, & subtrahe quadratũ minoris numeri, à quadrato dimidiatæ summæ amborum, & radicem relicti huius, adde ad summam dimidiatam ex ambobus numeris illis positis, tunc habebis extremum maius.

Regula inueniendi extremum minus.

Pone duos numeros, & hoc quod fit ex differentia in maiorem, subtrahe à quadrato dimidij maioris, & radicem relicti huius adde ad dimidium maioris, uel subtrahe eam ab illo dimidio, tunc habebis extremum minus.

Quòd autem regula iubet ultimo membro addere uel subtrahere, fit ex duplici dispositione differentiarum. Quando ergo exemplum ponit minorem differentiam inter minores terminos, tunc fit additio. Quando uero maior differentia ponitur inter minores terminos, tunc fit subtractio.

Ex regulis illis tribus, facile intelligis, quàm similis sit hæc proportionalitas proportionalitati Contraharmonicæ.

De proportionalitatibus duabus quæ sunt similes illi priori Geometricæ simili.

IN secunda uariatione sunt duæ proportionalitatum species similes Geometricæ proportionalitati. Harum priori similes sunt duæ illæ species quæ iam sequuntur.

Harum prior, est dispositio trium terminorum habentium differentias inæquales, quæ ambæ relatæ ad priorem differentiam, faciunt eam proportionem, quam facit medium ad extremum minus, ut hic

2. 1.	6. 9.
4. 6. 7.	4. 10. 19.

Inuentio extremi maioris regula principalis.

Pone duos numeros, quorum differentia non coincidat cum numero minore. Minorem multiplica in se, & huic producto adde quod fit ex multiplicatione differentiæ in maiorem, & aggregatum diuide per minorem, tunc habebis extremũ maius.

Quando igitur uis ut exemplum tuum ponat minorem differentiam inter minores terminos, tunc recipe duos numeros, quorum differentia sit maior numero minore: nam si differentia sit minor numero minore, tunc uidebis in exemplo poni maiorem differentiam inter terminos minores.

Sed

Sed in illa ꝓportionalitate quæ hanc immediate præcedit, aliud est: uidelicet, quando uis habere exẽpla, quæ ponant differentiam minorem inter minores terminos, tunc tuorum duorũ numerorum differentia, erit minor quàm sit numerus receptus minor: & si differentia sit maior, tunc uidebis etiam maiorem differentiam poni inter terminos minores.

Regula inueniendi medium.

Pone duos numeros, & differentiam eorum multiplica in minorem, & productum adde ad quadratum dimidij minoris, & huius aggregati radicem quadratam adde ad dimidium minoris, tunc habebis medium.

Regula inueniendi extremum minus.

Pone duos numeros, adde illos ad se, & à quadrato dimidij illius aggregati subtrahe quadratum minoris, & radicem quadratam illius relicti, subtrahe à dimidio illius aggregati quod fit ex additione amborum numerorum positorum: ut ex 42 & 43 fit 36, deinde ex 36 & 42 fit 24. Et sic oritur hæc proportionalitas, 24. 36. 42. 43.

¶ De proportionalitate posteriore quæ est similis simili Geometricæ priori.

Posterior illa proportionalitae, quam Boëtius ultimam facit, est dispositio trium terminorum, habentium differẽtias inæquales, quæ ambæ simul relatæ ad posteriorem differentiam, faciunt eam proportionem quam facit medium ad extremum minus: ut hic,

1.	2.		3.	2.	6
2.	3.	5.	2.	5.	7.

Regula extremi maioris, ex minore extremo & medio inuento.

Positis duobus numeris, quorum differentia non coincidat cum numero minore, adde eos, tunc habebis extremum maius.

Regula extremi minoris ex maiore extremo & medio inuento.

Positis duobus numeris quorum differentia non coincidat cum numero minore, subtrahe minorem à maiore, tunc habebis extremum minus.

Regula medij ex extremo maiore & minore inuento.

Positis duobus numeris quorum differentia non coincidat cum numero minore, subtrahe minorem à maiore, tunc habebis medium.

Regula continuandi omnes proportionalitates huius speciei in infinitum.

Posita proportionalitate aliqua huius speciei, adde semper duos terminos maiores ad se, atq; ad eum modum progredere ut hic uides. 11. 1. 12. 13. 25.

1. 12. 13. 25. 38. 63. &c.

Hæc est omnium ultima species proportionalitatū quas Arithmetici ponunt, facilem (ut uides) habens pgrediendi modum in infinitum, quemadmodum Arithmeticæ progressiones & Geometricæ, & sic respondent ultima primis.

¶ Videtur autem sufficientia requirere adhuc duas species proportionalitatum.

Vnam uidelicet, quæ ambarum differentiarū proportionem ad differentiam priorem, æquet, proportioni maioris extremi, ad medium. Sed talem dispositionem trium numerorum non inuenies ex tota uniuersitate numerorū: oporteret enim ut duo numeri priores haberent differentiam æqualem maiori eorum, quod est impossibile. Vnde si cifrā pro numero primo reputes, respondebūt postea proportionalitati illi quilibet numeri duo, ut ex his satis senties exemplis.

1. 1.	2. 1.	2. 4.
0. 1. 2.	0. 2. 3.	0. 2. 6.

Deinde alteram speciem proportionalitatum uidetur requirere

rere ſufficientia proportionalitatū, eam uidelicet, quæ proportionem ambarum differētiarum ſimul ſumptarum, ad differentiam poſteriorem, æquet proportioni maioris extremi ad medium. Sed talem etiam uidemus neglectā, imò reiectam, à Boëtio & alijs: & meritò. Malo enim illa ſe continent intra fines ſuos, ſed alijs ſe immiſcet ſpeciebus, ut ex iſtis exemplis & ſimilibus uidemus.

3. 6.	5. 10.
9. 12. 18.	15. 20. 30.

Cum enim ſint Harmonicæ, nihilominus tamen reſpondent proportionalitati quam iam deſcripſi.

¶ De his iam ſatis dixi, & in ſuperioribus etiam uarias poſui progreſſiones, inter quas maxime miror has duas.

$1\frac{1}{3}.\ 2\frac{2}{7}.\ 3\frac{3}{7}.\ 4\frac{4}{9}.\ 5\frac{5}{11}.$ &c.

$1\frac{7}{8}.\ 2\frac{11}{12}.\ 3\frac{15}{16}.\ 4\frac{19}{20}.\ 5\frac{23}{24}.$ &c.

Hæ neq; ſunt Arithmeticæ neq; Geometricæ &c. & tamen uides eas progredi iuxta Arithmeticarum progreſſionum uiam. Pulcherrime aũt et optime ſignant in uniuerſa ſpecie proportionum multiplicium nullam inueniri proportiõem, ſub qua dari poſſint trianguli orthogonij latera duo, rectum angulum continentia, quæ latus recipiant tertium, figuram orthogonij claudens ſub rationali numero. Item ſignant in uniuerſa ſpecie proportionum multiplicium ſuperparticularium nullam inueniri proportionem, ſub qua poſſit fieri hoc quod ſuperius dixi. Item ſignant in uniuerſa ſpecie proportionum ſuperparticularium, unam ſolummodo inueniri proportionē quæ hoc poſſit. Item ſignant unam ſolummodo proportionem inueniri in uniuerſa ſpecie proportionum ſuperpartientium, quæ hoc præſtet quod dixi. Item ſignāt infinitas ꝓportiones inueniri ſub ſpecie proportionũ multiplicium ſuperpartientiũ, quæ hoc poſſint ꝙd dixi. Et quòd illæ proportiones certo ordine inueniantur eſſe repoſitæ: ſcilicet in dupla ſuppartiente ſunt duæ, in tripla quoq; ſuperpartiẽte ſunt duæ, & in quadrupla ſuppartiente ſunt duæ, & ſic deinceps in infinitum.

De progressione Astronomica, & usu eius. Caput VIII.

QVOD proportionalitates & progressiones non sint ociosæ aut steriles speculationes, uolui paucis admonere in capite præcedēti: sed hoc capite oportet me rei huius exemplum ponere aliquod egregium, id quod me præstitisse nemo poterit negare, si Astronomicam progressionem pro exemplo & testimonio rei huius euocatam expoſuero.

Recepta est Astronomica progressio ex Geometrica progressione illa, quæ ab unitate incipit, & per proportiones sexagecuplas continue progreditur in minus, ut eam hic uides.

1. $\frac{1}{60.}$ $\frac{1}{3600.}$ $\frac{1}{216000.}$ $\frac{1}{12960000.}$ $\frac{1}{777600000.}$

Et illa superior Geometrica minutiarū uulgarium progressio, quadam Astronomorum eximia industria transfigurata est in hanc sequētem progressionem minutorū Physicalium: sic enim uocant minutias Astronomicas.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.

Idem autē significant termini illi minutiarum Physicalium, in progressione hac Astronomica, quod termini minutiarum uulgarium in illa superiori Geometrica. Primo enim ponitur unitas cum suprapoſita sibi cifra: hæc unitatem significat integrā, contrahendam uel ad tempus horæ, uel ad motum gradus &c. Et quòd ei cifra superponitur, signum est, nullam inesse termino huius loci fractionem. Sic dum in usu progressio illa fuerit, habueritq; suæ contractionis denominationem, ut hic

Grad. Min. 2. 3. 4.
1. 1. 1. 1. 1.

aut hic,

Hor. Min. 2. 3. 4.
1. 1. 1. 1. 1.

tunc multiplicatio & diuisio in illo loco primo, non aliam denominationis notam agnoscunt, quàm o. Sicut in secundo nullam aliam agnoscunt notam quàm unitatis, ut paulo inferius per exempla ostendam.

Itaq; primus locus progressionis Astronomicæ unitatem habet. Secundus locus habet minutum unum, hoc est, fragmen unitatis diuisæ in partes sexaginta inter se æquales: & uocatur hæc fractio prima. Vnde fractiones sub hac denominatione Min. uocantur minuta prima. Deinde quæ sub hac denominatione ² fuerint inuenta, uocantur minuta secunda: sunt enim secundariæ diuisionis fragmẽta, uidelicet qua unum minutum primum denuo diuisum esse inuenitur in sexaginta alias particulas. Et in hunc modum reliquas diuisiones intellige, ex quibus habemus minuta tertia, quarta, quinta, &c. Sed solemus minuta prima simpliciter uocare Minuta, & secunda minuta solemus simpliciter uocare Secunda, &c, sic enim magis explicate & simplicius loquimur & intelligimur.

Facile autem uides, ut numerus ille 60. id est sexagenarius, limes sit totius negotij huiusmodi fractionum, quẽadmodum 10. id est denarius, limes est calculationum uulgarium. Hinc fit ut quælibet denominatio denominans minutias Physicales, quemlibet numerum ab unitate usq; ad sexagenarium possit recipere: sicut in sequenti repræsentatione uides poni non unitates sed numeros.

Hor.	Min.	².	³.	&c,
6.	20.	40.	59.	

Atq; ita per hæc habemus modum plenum & perfectum repræsentandi minutias Physicas.

Quemadmodum uero termini in Astronomica pgressione, modo simpliciori repræsentantur & pronunciantur quàm termini progressionis illius Geometricæ, quæ respondet Astronomicæ in ualore terminorum: ita facilliorem multiplicationem & diuisionẽ habent termini Astronomicæ progressionis, quàm

termini illius Geometricæ progressionis. Item facilior tem commodiorem q; modũ additionis & subtractionis habent hæ præ illis, ut hoc quod est in Astronomica $\frac{1}{60}$ & $\frac{1}{60}$, in Geometrica est $\frac{1}{7776000000}$ & $\frac{1}{46656000000}$, quarum multiplicatio inter se facit $\frac{1}{362797056000000000000000}$, cum $\frac{1}{60}$ in $\frac{1}{60}$ faciat $\frac{1}{3600}$. & sic de alijs operationum speciebus.

Vide autem ut non solum commoditatis gratia, sed etiam necessitatis causa, commutata sit Geometrica in Astronomicã repræsentationem. Quidenim facturus esset tabularum Astronomicarũ fabricator (ut cætera transeam) si conaretur ponere terminos iuxta Geometricæ progressionis repræsentationem.

Vide autem quàm faciles sint species operationum secundum repræsentationem Astronomicæ progressionis.

¶ Algorithmus Minutiarum Physicalium simplicium.

MInutias Physicales eas uoco (docendi gratia) simplices, quæ solæ ponuntur sub uno simplice denominatore, ut $\frac{3}{60}$ repræsentat mihi duo tertia. Sed usu hoc non fit, ut denominator aliquis ponatur absque præcedentium denominatorum positione; scilicet usu duo tertia sic repræsentantur,

	Hor. 0.	Min. 0.	$\frac{2}{60}$. 0.	$\frac{3}{60}$. 2.
uel sic,	Gra. 0.	Min. 0.	$\frac{2}{60}$. 0.	$\frac{3}{60}$. 2.
uel sic,	0.	$\frac{1}{60}$.	$\frac{2}{60}$.	$\frac{3}{60}$.
	0.	0.	0.	2.

Et hoc modo pulchre fit additio, subtractio, multiplicatio, aut diuisio. Sed sine me simplicium fractionum tradere Algorithmum simpliciter.

1. Additio adeo facilis est, ut ferè coincidat cum repræsentatione. Vt duo secũda addita quatuor quintis, faciunt $\frac{2}{60}$ & $\frac{5}{60}$. Item quatuor tertia & septem tertia, faciunt $\frac{3}{60}$. id est, undecim tertia, &c.

2. Subtractio fere nihil aliud esse uidetur quàm deletio minutiarum repræsentatarũ. Vt positis $\frac{2}{60}$ & $\frac{5}{60}$, si subtrahas duo secun-

secunda, remanent quatuor quinta. Item tria quinta à quatuor quintis, manet quintum unum.

Certe tanta simplicitate non perficiuntur terminorum progressionis Geometricæ additiones & subtractiones, ut mirum sit & iucundum cernere, easdem res sub diuersis figuris tantam diuersitatē consequi. Sed uideamus reliquas operationū species.

3. Multiplicatio. Adde denominatores, tūc habes summæ tuæ producēdæ denominatorem. Numeratores autem inter se multiplicantur, sicut Algorithmus uulgaris docet: ut $\frac{2}{4}$ in $\frac{4}{6}$ faciunt $\frac{6}{24}$, sic $\frac{1}{3}$ in $\frac{5}{8}$ faciunt $\frac{5}{24}$. Pono autem minut. 3 sub denominante unitate, ut clarius uideas producti denominatorem tanquā ex causa, &c. Sic $\frac{0}{4}$ in $\frac{mi.}{7}$ faciunt $\frac{mi.}{28}$. uides hic 4 integra in septem minuta esse multiplicata. Item $\frac{0}{4}$ in $\frac{3}{7}$ facit $\frac{3}{28}$. nam cifra additione sua nihil mutat, sicut unitas nihil mutat dū multiplicat: at dum additur, certe mutat & mutatur, ut hic $\frac{1}{8}$ in se facit $\frac{mi.\ 2}{1\ 4}$. Item $\frac{mi.}{8}$ in se cubice facit $\frac{mi.\ 2}{8\ 32}$.

4. Diuisio. Subtrahe denominatorem minorem à maiore, tunc relinquitur denominator tui relicti. Numeratores autem diuide sicut uulgaris Algorithmus docet: ut $\frac{6}{24}$ diuisa per $\frac{5}{6}$ relinquunt $\frac{2}{4}$. Sic $\frac{6}{24}$ diuisa per $\frac{mi.}{3}$ relinquunt $\frac{5}{8}$. Item $\frac{3}{28}$ diuisa per $\frac{inte.}{7}$ faciunt $\frac{3}{4}$.

5. Radicum extractio quadrata ponit ex denominatore dimidium. Vt $\frac{2}{36}$, facit radicem quadratam hanc $\frac{mi.}{6}$. Sic radix quadrata de $\frac{mi.}{15}$ facit $\frac{mi.}{30}$. Quando enim minutia de qua radicem quæris, nō steterit sub denominatore paris numeri, tunc reduc eam ad talem: ut $\frac{mi.}{15}$ faciunt $\frac{2}{900}$, cuius radix quadrata est $\frac{mi.}{15}$.

Sic dum radicem cubicam quæris, uide ut minutiam reducas ad denominatorem diuisibilem ternario: ut radix cubica ex $\frac{mi.\ 2}{7\ 30}$ facit $\frac{3}{30}$. Reductio enim facit $\frac{3}{27000}$, cuius radix cubica facit $\frac{3}{30}$.

Sic radix zensizensica extrahitur sub denominatore diuisibili per 4: & radix surdesolida sub denominatore diuisibili per 5. & sic de reliquis.

¶ Algorithmus minutiarum Physicalium generalis.

SI ea quæ in superioribus huius capitis regulis recte intelligantur, nihil erit opus pro generali Algorithmo minutiarũ Physicalium, nisi exemplis.

¶ Exemplum Additionis.

Integra.	Min.	2ᵃ.	3ᵃ.	4ᵃ.	5ᵃ.	6ᵃ.	7ᵃ.
2.	0.	0.	50.	40.	36.	28.	50.
0.	30.	0.	9.	20.	50.	0.	10.
2.	30.	1.	0.	1.	26.	29.	0.

Dum ex duobus numeris additis, excreuerit numerus sexagenario maior, tunc excessus ille supra sexagenariũ scribitur: sexagenarius autem abit in unitatem addendam aggregato sequentium addendorũ uersus sinistram. Vides ut eadem ratione hic incipiamus â dextris, addere, subtrahere atq; multiplicare, qua hoc fit in Algorithmo uulgari, ut â dextris incipiamus &c.

¶ Exemplum Subtractionis.

Integ.	Min.	2ᵃ.	3ᵃ.	4ᵃ.	5ᵃ.	6ᵃ.	7ᵃ.
2.	30.	1.	0.	1.	26.	29.	0.
2.	0.	0.	50.	40.	36.	28.	50.
0.	30.	0.	9.	20.	50.	0.	10.

Primo subtraho 50 septima, quibus supraponitur cifra, ideo mutuo accipio sextum unum, quod facit 60 septima, â quibus subtraho 50 septima illa, & manent 10 septima. Deinde subtraho 28 sexta â totidem sextis (nam unum sextum abijt in septima) & nihil remanet. Deinde 36 quinta non possunt subtrahi â 26 quintis: ideo iterum mutuo accipio uidelicet unum quartum quod facit 60 quinta, fiunt ergo 86 quinta, â quibus iam subtraho 26 quinta, tunc remanẽt 50 quinta. Deinde cum uolo subtrahere 40 quarta, nihil inuenio nisi unum quartum quod prius fuit expeditum. Et in loco tertiorum etiam nihil inuenio, ideo mutuo accipio unum secundum, quod reponit 59 tertia & 60 quarta, &c.

Exemplum

Exemplum Multiplicationis.

Integra.	Minut.	2ᵃ.	3ᵃ.	4ᵃ.	5ᵃ.	6ᵃ.	
2.	5.	10.	4.				Multiplicanda.
6.	3.	8.	7.				Multiplicantia.
			14.	36.	10.	28.	
		16.	41.	20.	32.		
	6.	15.	30.	12.			
12.	31.	0.	24.				
12.	37.	32.	50.	8.	42.	28.	

Primo multiplico tertia 7 in tertia 4, facit sexta 28, quæ ponantur sub suo denominatore, id est sub 6ᵃ. Et sic multiplicabis terti illa 7 in singulas minutias multiplicãdas. Et ordo ipse non sinet te facile errare post primam multiplicationem.

De numero limitante nõ opus est ut te moneam, nosti enim satis quid faciendum sit: ut dum multiplicas secunda 8 in secunda 10, fiunt 80 quarta. At tu pones 20 quarta, nam 60 quarta abeunt in unum tertium, &c.

Exemplum Diuisionis.

Integra.	Minut.	2ᵃ.	3ᵃ.	locus quotientis.
2.	0.			

Inte.	Min.	2ᵃ.	3ᵃ.	4ᵃ.	5ᵃ.	6ᵃ.
		12.	37.	32.	50.	8. 42. 28.
		6.	3.	8.	7.	diuisor.
					2	figura quotientis
		12.	6.	16.	14.	multiplicans.
			31.	16.	36.	residuum.

Sequor autem hoc loco illum meum modum diuidendi, quẽ in primo capite tradidi sub tribus his literis Q. M. S, quarum significationem in eo loco poteris quærere.

Secundo ponitur exemplum sic.

Integ.	Min.	2ᵃ.	3ᵃ.	locus quotientis,
2.	5.			

Int. Mi. 2ª. 3ª. 4ª. 5ª. 6ª.

0. 32. 16. 36. 8. 42. 28.
6. 3. 8. 7.
5 numerus quotientis.
30. 15. 40. 35.
1. 0. 55. 33. residuum.

Et hoc modo post quamlibet innouationem diuisoris, mouetur ipse, donec compleatur diuisio. Sic etiam in diuisione quæ fit iuxta Algorithmum uulgarem, mouetur diuisor, donec prima figura eius stet sub prima dividendi.

Tertio exemplum sic ponitur.

Integ.	Min.	2ª.	3ª.	locus quotientis.
2.	5.	10.		

Int. Mi. 2ª. 3ª. 4ª. 5ª. 6ª.

0. 1. 0. 55. 33. 43. 28.
6. 3. 8. 7. diuisor.
10 numerus quotientis.
1. 0. 32. 22. 16.
24. 12. 32. residuum.

Hoc loco, dum primo quæris, quoties diuisor habeat in suo suprapositio, tunc resolue min. 1, ut uideas 6 haberi in 60 secundis decies.

Quarta & ultima huius exempli positio.

Inte.	Minut.	2ª.	3ª.	locus quotientis.
2.	5.	10.	4.	

Int. Min. 2ª. 3ª. 4ª. 5ª. 6ª.

0. 0. 0. 24 12. 32. 28.
6. 3. 8. 7.
4
24. 12. 32. 28.

Vides completam esse diuisionem nullo residuo remanente: quotientem autem completum uides in suo loco, &c.

De

De tabulis Astronomicis.

CAmpum exercitij latissimum subministrant nobis tabulæ resolutæ, quas Schonerus fidelissime correctas nobis utiles fecit. Poteris autem exempla additionis colligere quotquot libuerit iuxta propositionem eius primam. Et subtractionis exempla colligere poteris innumerabilia ex propositione eius secunda: item iuxta tertiam, quartam, & quintã. Multiplicationis etiam exempla & diuisionis infinita, uel ex solis tabulis mediorum motuum colligenda, paucis monstrabo; ut

Ponamus motum Solis medium in triginta horis perficere gradum unũ, minuta tredecim, secunda 55 præcise: hunc enim motum tabula ponit. Volo autem ex motu illo inuenire motum diei unius præcise, tunc sic pono exemplum ad regulam De Tri.

Hor.	Grad.	Minut.	2ª.	Hor.
30	1	13	55	24

Vel sic ponitur.

Hor.	Grad.	Min.	2ª.	Hor.
5	1	13	55	4

Habes in huiusmodi exemplo quolibet, & multiplicationis & diuisionis exemplum, ut satis manifestum est.

Proueniunt autem ex regula De Tri præcise

Grad.	Minut.	2ª.
0	59	8.

& tabula respondet calculationi huic.

Item ex priore motu Solis medio, quem ponit tabula facere in 30 horis, uolo inuenire motum 30 minutorum unius horæ. Sic stabit exemplum.

Hor.	Grad.	Min.	2ª.	Minut.
30	1	13	55.	30.

Vel

Vel sic ponitur.

Hor.	Grad.	Min.	2ᵃ.	Min.
1	1	13	55.	1

Proueniunt autem ex hac operatione.

Grad.	Min.	2ᵃ.	3ᵃ.
0.	1	13	55.

Et ex hoc exemplo facile intelliges, qua ratione fiat, ut tabulæ mediorum motuum pro horis datæ, satisfaciant etiam pro fractionibus horarum quibuscunq;. Sic enim eodem modo inuenies motum 30 secundorum unius horæ facere præcise.

Grad.	Min.	2ᵃ.	3ᵃ.	4ᵃ.
0.	0.	1.	13.	55.

& motum 30 tertiorum unius horæ, facere

Grad.	Min.	2ᵃ.	3ᵃ.	4ᵃ.	5ᵃ.
0.	0.	0.	1.	13.	55.

Si autem contingat, ut operatio tua non respondeat tabulæ præcise, disces quo consilio author tabulæ declinet ad minus, uel ad maius respiciat. Vt dum uolo ex motu diei unius, inuenire motum unius horæ, inuenio præcise

Grad.	Minut.	2ᵃ.	3ᵃ.
0.	2.	27.	50.

Tabula autem ponit uni horæ solummodo

Grad.	Min.	2ᵃ.
0.	2.	28.

Hoc igitur fuit authoris consilium: quia enim tertia ponere uoluit, satius esse statuit si superfluant tertia 10, quàm si deficiant tertia 50.

Constat uero numerum per regulam De Tri inuentum, esse propinquiorem ueritati ipsius rei, quàm sit numerus ille quem ponit tabula. Nam secundum motum illum quem tabula ponit, uni anni solum proueniunt

Dies	Hora	Min.	
364.	20.	45.	&c.

Sed

Sed secundum numerum per regulam De Tri inuentam, proueniunt uni anno

Dies	Hor.	Min.	
365.	6.	37.	&c.

Sic autem stat exemplum ad regulam De tri.

Grad.	Min.	2ª.	3ª.	Hor.	Grad.
0.	2.	27.	50	1	360

Diuisor facit tertia 8870, & diuidendus facit tertia 77760000: proueniunt ergo ex diuisione illa horæ 8766. Et residuum diuisionis est 5580, hoc residuum resolutum per 60, facit productum, quod diuiditur per priorem diuisorem: & sic proueniunt 37 minut. &c.

Sic uero stat exemplum pro numero tabulæ.

Grad.	Min.	2ª.	Hor.	Grad.
0.	2.	28.	1	360

Diuisor facit secunda 148, diuidendus facit secunda 1296000: proueniunt ergo ex diuisione illa horæ 8756. hoc est, dies 364. hor. 20. Remanserunt autem ex diuisione horæ 112, quæ resolutæ in minuta, atq; ita si diuidantur per priorem diuisorem, ui delicet 148, faciunt min. 45. &c.

Itaq; annus bisextilis potius sumitur iuxta numerum operationis meæ, quàm iuxta numerum tabulæ.

Deinde uides, ut numerus operationis meæ plus tribuat anno, quàm bisextilis annus reportet: reportat enim bisextilis pro quolibet anno 6 horas præcise. At motus secundum operationem meam prædictam uni anno tribuit,

Dies.	Hor.	Min.	2ª.	3ª.	4ª.	5ª.	6ª.	7ª.	8ª.	9ª.	10ª.	11ª.	12ª.	13ª.
365.	6.	37.	44.	42.	45.	3.	2.	38.	13.	10.	53.	26.	18.	48.

14ª.	15ª.	16ª.	17ª.	18ª.	19ª.	20ª.	&c.
17.	51.	28.	36.	47.	53.	30.	

Videmus etiam hoc loco quid fecerit Nicolaus de Cusa pro

correctiõe Calendarij. Cum eñ uidisset motui huic unius horæ

Grad.	Minut.	2ˇ.	3ˇ.
0	2	27.	50.

addendum aliquid, & additionem unius tertij excedere mensuram, eò quòd diuisor adauctus uno tertio integro, plus adimat anno quàm par sit, inuenit subtrahendas esse partes unius tertij 7059 denominatas sub hoc numero 43829: hoc est, $\frac{7059}{43829}$ unius tertij subtrahendas esse inuenit ab uno tertio, & relictum huius subtractionis, hoc est $\frac{16770}{43829}$ unius tertij, censuit esse addendum ad motum quo una hora perficit

Grad.	Minut.	2ˇ.	3ˇ.
0.	2.	27.	50.

Sic enim calculationis ratio persuadet mihi hoc de facto eius diuinare, qui libros eius diu non uiderim. Adimit autem tantillum momenti illud, de anno omnes illas fractiones quas paulo superius posui, cũ quinta parte unius horæ. Hinc fit ut anno solari remaneant præcise

Dies	Hor.	Minut.
365.	5.	48.

Et hunc numerum scio Nicolaum de Cusa posuisse.

Satis nunc uides ex ijs quæ posui, ut non solum exempla exercitij pro Algorithmo minutiarum Physicalium sumere possis infinita, sed etiam uides qua ratione experientias Astronomicas facere possis innumerabiles.

Habet etiam regula De Tri inuersa suum usum in Astronomicis huiusmodi calculationibus, id quod exẽplo aliquo oportebit me hoc loco significare.

Ponamus, exempli causa, festum natiuitatis Christi ab Apostolis fuisse institutum, idq; factum esse mox eo anno quo Christus passus est, uidelicet anno domini 34. Ponamus etiam solstitium hyemale incepisse esse in die Natiuitatis domini, hoc est 25 die Decembris: anno autem domini 1474 solstitium hyemale incepisse esse 13 die Decembris, id est in festo Luciæ.

His

His ita positis, uolo ingrere quantū fallat bisextilis noster. Sic stabit exemplum ad regulam De Tri inuersam.

An.	Hor.	Annus		Min.
4.	6.	120.	facit	12.

Sic aūt intelligendum est exemplum. Horæ 6 corrigunt annos 4. Quantum ergo temporis corrigit annos 120? Sic uero corrigunt 6 horæ annos 4, quòd sex horæ quolibet anno deperirēt de supputatione Astronomorum, nisi bisextilis hoc tempus repararet. Faciūt igitur 6 horæ in quatuor annis diem unum, qui quarto anno semper intercalatur, ut notum est. Deberent autē recipi sex horæ, minus aliquantulo temporis. Quæro ergo, quantum sit illud modicum quod debuerat à sex horis esse subtractum? Hic ego iam posui Solstitium hyemale recessisse per dies 12 integros intra annos 1440 (à die enim 13 Decembris usq; ad 25 Decembris sunt dies 12, & ab anno 34 usq; ad annū 1474 sunt anni 1440). Sic ergo colligo primo p regulā de Tri.

Dies	An.	Dies		Annos
12	1440	1	facit	120

Deinde sic colligo per regulam De Tri inuersam:

An.	Hor.	An.		Min.
4	6	120	facit	12

Deberent ergo subtracta esse 12 minuta de 6 horis illis, ita ut 5 horæ & minuta 48 supputarentur ultra dies 365: id quod pulchre fieret, si semper in anno centesimo uigesimo intermitterē unus bisextilis, ut sicut annus quartus semper est bisextilis, ita trigesimus bisextilis, nunquam esset bisextilis.

De Musicis progressionibus, Cap. IX.

NVNC demum de Musicis progressionibus dicam, hoc est, de dispositione numerorum iuxta scalas Musicales positorum. Ponunt autē Musici primo scalam Musicæ ueræ: deinde ponunt scalam Mu-

ſicæ fictæ. Videbimus ergo de utriuſq; ſcalæ diſpoſitione.

De progreſſione numerorum iuxta ſcalam Muſicæ ueræ.

QVi uoluerit diſponere progreſſionem iuxta ſcalam Muſicæ ueræ, incipiat à proportione dupla. Hæc autem proportio omnium proportionum prima eſt, ſi ortum earum ex numeris conſideres. Sic enim termini eius proprij inter numeros minimi ſunt. Binarius enim relatus ad unitatem duplam proportionem conſtituit, ſub qua interuallum ipſius diapaſon inuenitur, ut hic uides:

Gſolreut 1
ſut 2
} Diapaſon.

Eſt autem hoc interuallum ſcalæ perfectiſſimum, complicãs omnia reliqua interualla, ita ut quicquid ultra ipſum inuenitur in ſcala, nihil aliud eſſe cenſeatur quàm repetitio eorum quæ intra ipſum ſint poſita. Sic enim uoces hominum, & inſtrumenta Muſicæ, iucundo aurium iudicio, naturæ numerorum reſpondent.

Iam ſi utercq; terminorum dupletur, inter duplatos terminos cadet ternarius, diuidens Diapaſon in Diapente & Diateſſaron. Sunt autem duo illa interualla inuentionis metra, ut quibus omnia utriuſq; ſcalæ interualla inuenias: cõmata inſuper atq; reciſa, &c. Mira autem diuiſio, ut proportio quæ in ſua ſpecie omnium eſt minima, diuidatur in ꝓportiones duas, quæ in ſpecie ſua ſint omnium maximæ, & quantum attinet ad Scalam, ſint ꝓfectiſſimi interualli, præcipuæ partes diuiſionis &c. Sic autem ſtat interuallum hoc diuiſum.

G 2
} Diapente.
C 3
} Diateſſaron.
ſ 4

Reliqua interualla omnia utriuſq; Scalæ (ut dixi) inuenies per Diapente & Diateſſaron. In quam rem ſunt quatuor regulæ

gulæ: duæ uidelicet de intensione utriusq; metri, & duæ de remissione utriusq;. Omnia enim hæc inueniuntur uel per intensionem, uel per remissionem diapente aut diatessaron.

Prima regula de intensione Diapente.

Multiplica singulos numeros clauium tuarum per 3, deinde numerum clauis à quo intēdis multiplica per 2, & productum diuide per 3, tunc prouenit numerus clauis tuæ quē quærebas.

Secunda regula de remissione Diapente.

Multiplica singulos numeros clauium tuarum per 2, deinde numerum clauis à quo remittis multiplica per 3, & productum diuide per 2, tunc prouenit numerus clauis tuæ inter reliquos.

Tertia regula de intensione Diatessaron.

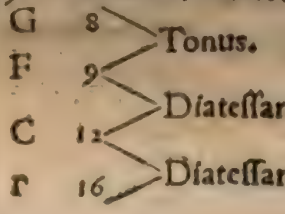
Multiplica singulos numeros clauium tuarum per 4, deinde numerum clauis à quo intendis multiplica per 3, & productum diuide per 4, tunc prouenit numerus clauis tuæ quē quærebas.

Quarta regula de remissione Diatessaron.

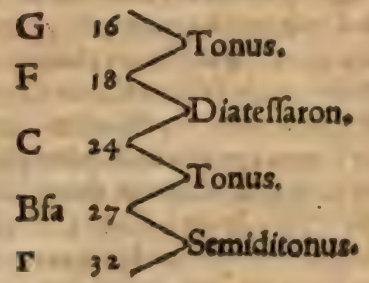
Multiplica singulos numeros clauium tuarum per 3, deinde illum numerum clauis à quo remittis, multiplica per 4, & productum diuide per 3, tunc prouenit numerus clauis tuæ quem quærebas.

Harum regularum exempla copiosè uidebis.

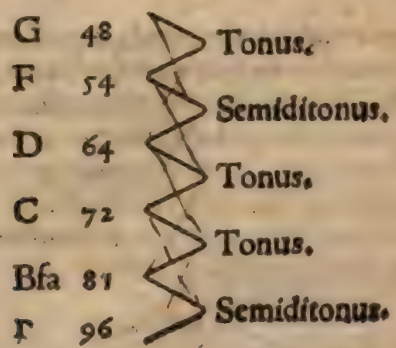
A numero inuento in ꝓxima dispositione, id est à numero impari, intende Diatessaron (sic enim uides esse faciendum: nihil enim faceres remittendo diatessaron, ut satis uides ex ipsa interualli diuisione. intendendo autem diapente, transilires G. remittendo uero diapente, caderes infra Γ.) Intensione autem illa, diatessaron, inuenitur numerus clauis illius F, facitq; numerus inuentus 9. Vnde sic stat diuisio.



Iam à numero impari, remitte diapente, tunc inuenitur numerus B rotundi (quod non ponitur in scala, nisi enim descensus fiat ultra r, non est in usu) numerus autem B rotundi inuentus facit 27. Vnde sic stabit amodo clauium dispositio.



Oportet iam ut à r intendas diapente, tunc inuenies D habere numerum hunc 64, ut uides hic.



A numero

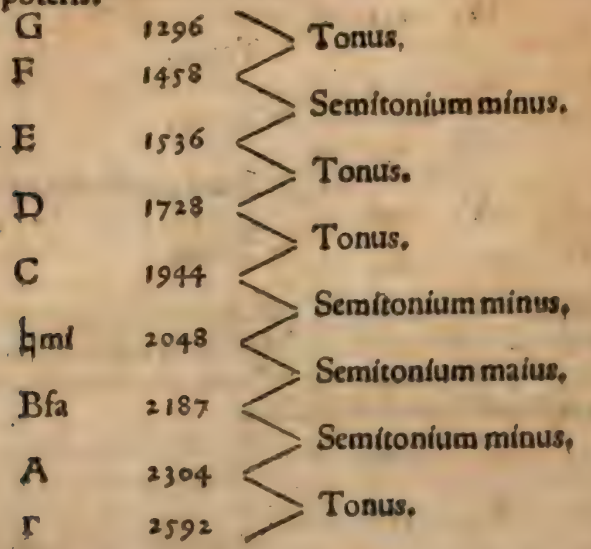
A numero inuento, remitte diateſſaron (remittendo enim diapente nihil ageres &c̄.) tunc inuenies numerum clauis illius A, qui eſt 256. ut uides in ſequenti diſpoſitione.

G	144	Tonus.
F	162	Semiditonus.
D	192	Tonus.
C	216	Tonus.
Bfa	243	Semitonium minus
A	256	Tonus.
r	288	

A numero inuento, ſeu à claue A, intende diapente (nihil enim faceres intendendo diateſſaron, quia incideres in clauem D, quæ prius eſt inuenta) tunc inuenies numerum clauis E, qui eſt 512. ut habet ſequens diſpoſitio.

G	432	Tonus.
F	486	Semitonium minus.
E	512	Tonus.
D	576	Tonus.
C	648	Tonus.
Bfa	729	Semitonium minus.
A	768	Tonus.
r	864	

A clauе inuenta, id eſt ab E, remitte diateſſaron, tunc inue-nies clauem ♭mi, habentem numerum hunc 2048: atq; tunc habes diapaſon cum ſingulis clauibus & tetrachordis, comple tamq; progreſſionem Muſicam, quam potes protendere in in-finitum producendo diapaſon ex diapaſon. Et fit illa extenſio ſeu progreſſio ſolummodo per duplationē, ut ex ſcala pulchre uidere poteris.



Iam ſi commutentur claues capitales ſeu graues, in excellen tes ſeu geminantes, tunc nihil aliud reſtat, niſi ut duplatis ſingu lis numeris illis, facias ex eis diapaſon acutarum clauium: & deinde ex diapaſon acutarum clauium, facias diapaſon grauiū clauium, ſeu capitalium literarum, id quod fit ſola duplatione, ut dixi. Quibus peractis, poteris delere gg & ff excellētes, item Bfa, tunc ſtabit ſcala completa ſic, in minimis ſeu in propriis ſuis terminis.

ee.

ee.	1536	Tonus.
dd.	1728	Tonus.
cc.	1944	Semitonium minus.
♭♭.	2048	Semitonium maius.
bb.	2187	Semitonium minus.
aa.	2304	Tonus.
g.	2592	Tonus.
f.	2916	Semitonium minus.
e.	3072	Tonus.
d.	3456	Tonus.
c.	3888	Semitonium minus.
♮.	4096	Semitonium maius.
b.	4374	Semitonium minus.
a.	4608	Tonus.
G.	5184	Tonus.
F.	5832	Semitonium minus.
E.	6144	Tonus.
D.	6912	Tonus.
C.	7776	Semitonium minus.
♮.	8192	Tonus.
A.	9216	Tonus.
r.	10368	

Si autem uolueris descendere infra rut, tunc oportet B rotundum seruari etiam in grauibus, ea necessitate qua b rotundum in acutioribus ponitur, & bb in excellentibus. Sic enim rescinditur putamen illud quod aures offendit, scilicet semitonium maius abscinditur de tritono. Natura autem numerorum, & ratio sonorum, semper diapason gignit ex diapason, ut dictum est.

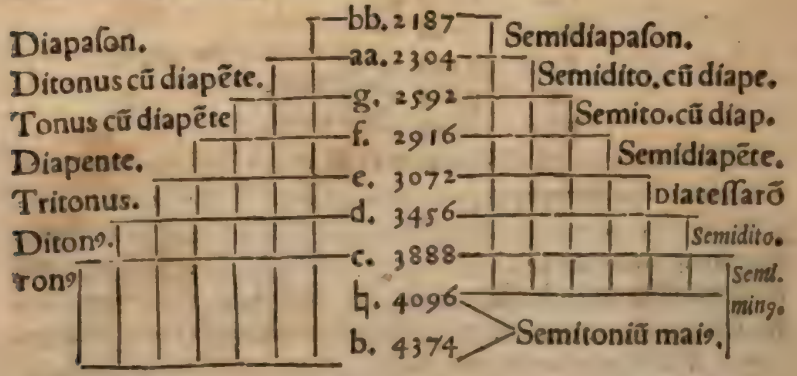
De probanda progressione illa Musica, quam uides clauibus appositam.

Si uelis scire, an tonus sit inter ee & dd, id est inter 1536 & 1728, tunc recipe minimos numeros illius proportionis, uidelicet 8 & 9. Diuide ergo minorem per minorem, & maiorem per

maiorem: & si idem numerus ꝓueniat, probata res erit, ut 1536 per 8 facit 192. & tantū facit etiam 1728 per 9. Vel multiplica minorem numerum scalæ, per maiorem numerum proportionis: & maiorem scalæ, per minorem proportionis.

Quemadmodum uero tonus per 8 & 9 probatur: sic semitonium maius per 2048 & 2187 probatur. Et semitonium minus per 243 & 256. Et semiditonus per 27 & 32. Et ditonus per 64 & 81. Diatessaron per 3 & 4 probatur. Tritonus per 512 & 729. Semidiapēte per 729 & 1024. Diapente per 2 & 3. Semitonus cum diapente per 81 & 128. Tonus cum diapente per 16 & 27. Semiditonus cum diapente per 9 & 16. Ditonus cum diapente per 128 & 243. Semidiapason per 2187 & 4096. Diapason per 1 & 2 probatur.

Vide autem ut intra Diapason, cuius termini sunt bb. & b. ipsius diapason interualla optimo ordine dispositа inueniantᵉ, sicut hæc sequens figura indicat.



Sic intellige. De bb ad b est diapason, de bb ad ♮ est semidiapason, de aa ad b est ditonus cum diapente, de aa ad ♮ est semiditonus cum diapente. Et sic de alijs.

De

De progressione quæ fit iuxta scalam Musicæ fictæ.

PRogressio quæ fit iuxta scalam Musicæ fictæ, eadem prorsus habet q̃ superior illa Musicæ ueræ scala: scilicet, Scala Musicæ ueræ, progreditur iuxta progressionem tetrachordarũ in clauichordio, ubi semper duos integros tonos sequitur semitonium minus, & ne tritonus obstet, inuenitur tonus suo loco diuisus in semitonium minus & semitonium maius, ut satis est significatum, atq; illa est progressio Musica proprie.

Habet igitur ꝓgressio Musica, iuxta scalam fictam, easdem proportiones omnino, sed ita ut subiaceant ulteriori diuisioni: itaq; uidelicet ut nullus tonus remaneat, qui non diuidatur in semitonium minus & semitonium maius, sicut uides factum in sequenti hac diapason diuisione.

gg.	165888	Semitonium maius.
	177147	Semitonium minus.
ff.	186624	Semitonium minus.
ee.	196608	Semitonium maius.
	209952	Semitonium minus.
dd.	221184	Semitonium maius.
	236196	Semitonium minus.
cc.	248832	Semitonium minus.
♮♮.	262144	Semitonium maius.
bb.	279936	Semitonium minus.
aa.	294912	Semitonium maius.
	314928	Semitonium minus.
g.	331776	

Poteris iam ex his excellentibus seu geminantis clauibus, seu clauium numeris, totam Scalam facile complere, uidelicet singulos numeros duplando, ut superius indicatum est. Hæc autem diuisio huius diapason facta est ut superior, uidelicet per diapente & diatessaron. Et ex illa superiori est facta, scilicet à numero impari, quem uides positum cum Bfa, facta est intensio ipsius diatessaron, &c. Et sic deinceps semper fit,

ut ab impari incipias: ubicq; autem habebis unum imparem solum. Item hoc semper fit de inceps, ut diatessaron intendatur & nunquam remittatur: diapente uero remittatur, & nunquã intendatur. His igitur regulis usus, non poteris errare.

Vides hic etiam qua ratione Musici FA canant, sub clauibus, quarum dictiones FA non continent. Item qua ratione MI non admittatur in singulis clauibus, quẽadmodum FA admittit̃ &c.

Item uides qua ratione Musica ficta, dicatur ficta. Neq; em̃ ita intelligi debet, quasi opponatur Musicæ ueræ, tanq; fictio rei, quæ non extet: sed quòd ficta Musica, ultra scalam communem, aliam requirat diuisionem diapason, atq; aliam scalæ dispositionem. Itaq; si syllabas seu uoces clauium respicias, fictio esse uidetur: at si rationem numerorum spectes, res est & ars, quæ Musicis regulis nequaquam aduersatur, tanquam esset fictio rei non existentis.

Vides etiam ex ratione numerorum, tonum non esse tono duriorem aut molliorem, neq; ullum aliud interuallum alij interuallo: quod numerorum ratio iudicat sibi esse æquale, nisi forte duritiem uel mollitiem iudices penes attenuationẽ uocis. Ratio uero hæc numerorum, graue & acutum iudicat. Sicut autem alia ratione numerorum, iudicamus inter uoces longas & breues: ita alia ratione numerorum iudicamus inter uocem grandem & attenuatam, & nihil horum est quod non habeat rationem suam ex numeris. Satis autem constat graciliores chordas cytharæ, nedum acutiores grossioribus reddere sonos, sed etiam magis tenues. Huius autem digressionis occasionem præstitit mihi Musicorum diuisio illa, qua sex uoces Musicales diuidunt in tres diatessaron, hoc modo.

la	♮ dur.
sol	natur.
fa	♭ mol.
mi	♮ dur.
re	natur.
ut	♭ mol.

Vocant autem ſemitonij minoris uocem acutiorem, mollem: grauiorem uero uocem eius, uocant duram. Et quia nulla clauis dictio, quæ la habet, admittit uocem fa aut ut, cum tamē admittat uocem mi. Item nulla dictio quæ uocem ut habet, admittit uocem mi aut la, cum tamē admittat fa. Hac ratione cenſuerunt la eſſe uocem duram, eò quòd uideatur quandam cognationem habere cum uoce mi, quemadmodum uox ut uidetur eſſe cognata uoci fa. Sic ſol & re, naturales uoces uocant: hæ enim neq; ♮duralium neq; ♭mollium amicitiam uitant, quanquā ſol magis inclinet ſe ad ♭molles. Licet enim nunquam commiſceatur uoci mi, commiſcetur tamen uoci la: ſic re nunquam commiſcetur uoci fa, at uoci ut cōmiſcetur. Vides certe ut hæc ſpeculatio Muſicorum non uerſetur circa rationes numerorum, ſed circa ſyllabas dictionum ipſius ſcalæ, &c.

Alia progreſſio. id eſt, alia diuiſio diapaſon in commata & ſemitonia minora.

gg.	424673 28	Comma.
	43046721	Semitonium minus.
	45349632	Semitonium minus.
ff.	47775744	Semitonium minus.
ee.	50331648	Comma.
	51018336	Semitonium minus.
	53747712	Semitonium minus.
dd.	56623104	Comma.
	57395628	Semitonium minus.
	60466176	Semitonium minus.
cc.	63700992	Semitonium minus.
♮♮.	67108864	Comma.
	68024448	Semitonium minus.
bb.	71663616	Semitonium minus.
aa.	75497472	Comma.
	76527504	Semitonium minus.
	80621568	Semitonium minus.
g.	84934656	

Potes etiam & hanc progressionem commatum & semitoniorum minorum extendere, usq; ad rut, per duplationem singulorum numerorum.

Est autem Comma differentia qua semitonium maius superat semitonium minus.

Posses iam etiam facere progressionem Recisorum & Commatum. Sunt autem triplicia recisa: quædam sunt prima, quædam sunt secunda, & quædam tertia. Est autem recisum primū differentia semitonij minoris supra comma, ut

1342177 28.
129140163.

Et recisum secundum est differentia, qua recisum primum superat comma, ut 1899942885796928.
1852997966631841.

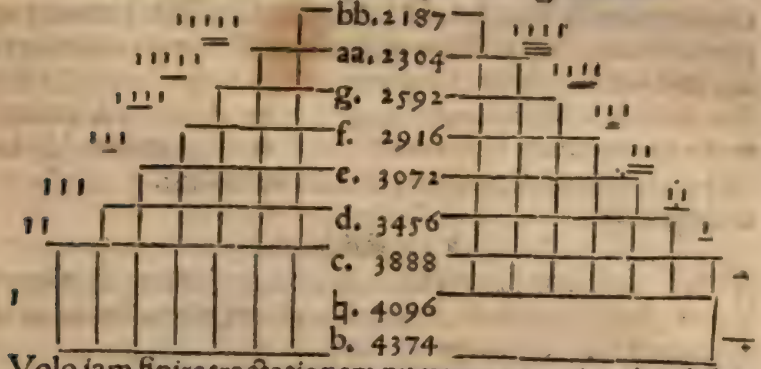
Recisum tertium, est differentia, qua recisum secundum superat comma, ut 996117255708699787264.
984759092384792212881.

Ex his patet, quòd adhuc alias ꝓgressiones Musicas possent poni, uidelicet commatum & semitoniorum: item commatum & recisorum primorum: item commatum & recisorum secundorum: item commatum & recisorum tertiorum.

Et habent hæ omnes unum & eundem modum inuentionis, scilicet progressio commatum & semitoniorū recipitur à progressione semitoniorū minorum & maiorū, & sumitur principium à numero impari, & remittitur diapente, ut facile uides. Diapente aūt nunq; intenditur, nisi dum progressio tonorum & semitoniorū inquiritur, i. dum scala Musicæ ueræ construit. Sic diatessaron nunquā remittitur, nisi dum illa tonorū & semitoniorum progressio inquiritur. Item à numero pari nunquam fit inchoatio, nisi in illa prima progressione tonorum & semitoniorum. Item facile uidebis ubiq;, quando remittendum sit & quando intendendum, ut nihil sit ulterius quod in huiusmodi operationibus possit desiderari.

Exercitium

¶ Exercitium pulcherrimum ex scala Musicali & Algorithmo proportionum hac sequenti pictura significatur.



Volo iam finire tractationem numerorum rationaliū absolutorum, hac iucunda inuentione, propositionum talium, quibus quidam libros fecerūt: quorū exemplo si ludere uellem, multos libros faciliter scribere possem. Occasionem huius mihi dedit collatio terminorū progressionis Astronomicæ, et terminorum illius Geometricæ, ex qua prodijt pgressio Astronomica, sicut superius ostendi. Nam quanta facilitate, modus operandi, per minuta Astronomica, superat modū operandi per Algorithmū cōmunem, tanta facilitate superat modus operandi, quē dabo, modum operādi illum quem superius dedi, uidelicet eum qui fit per Algorithmum proportionum.

Pro repræsentatione aūt huius meī Algorithmī, scito me tonum sic signare, ı uidelicet unitatis notula: quare ditonū sic signabis ı ı, & tritonū triū unitatū notulis sic ı ı ı. Semitoniū uero minus sic –: quare semiditonꝰ sic signabit ı –, & diatessarō sic ı ı –, & diapente sic ı ı ı –, & diapason sic ı ı ı ı. Comma autem cifræ notulaꝫ habebit: quare semitonium maius (quod constat semitonio minore & commate) sic signabitur ō.

Quia uero Musici etiam loquuntur de proportionibus quibusdam irrationalib. ut de schismate & diaschismate, & nōnullis alijs. Volo etiā illarum repsentationē indicare, s. schisma (q̄d

uocant commatis dimidium) sic signo ◡: diaschisma uero sic ¬. Est autem diaschisma semitonij minoris dimidium. Quare dimidium toni sic signabitur ⊐: est enim dimidiatus tonus, proportio irrationalis, cõstans ex schismate & semitonio minore. Sic dimidium semitonij maioris ita signandum uenit ⊐: constat enim dimidium semitonij maioris ex schismate & diaschismate. Et dimidium unius diapason sic erit signandum $\frac{\sqcup\sqcup}{\smile}$, constituitur enim ex diatessaron & tono dimidiato.
& sic de alijs.

De Additione.

DE additione proportionum, extant Iordani & aliorum quoq; uirorum doctorum hominum, propositiones plures, uti est hæc Iordani propositio.

Compertum est consonantiam ipsius diatessaron continere quinq; dieses & duo commata. Vocatur autem diesis, semitonium minus.

Quinq; semitonia minora sic disponuntur.

256.	256.	256.	256.	256.
243.	243.	243.	243.	243.

Duo uero commata sic disponuntur.

531441.	531441.
524288.	524288.

Et iuxta, Algorithmi proportionũ, regulam, quæ de additione datur, laborioſa multiplicatione, hanc tandem diatessaron proportionem efficies, uidelicet

3105345593882454848896256.
2329009195411841136721 92.

Iam uide quanta facilitate quanto'q; compendio ex quinq; semitonijs minoribus duobus'q; commatibus fiat diatessaron. Semitonia enim quinq; cum duobus commatibus sic signanda tradidi ≣: duo autem semitonia minora cum uno commate, faciunt $\frac{\smile\smile}{}$ unum tonũ. Vnde facile uides ex $\frac{\equiv}{\smile\smile}$ fieri $\frac{\sqcup\sqcup}{}$, & uice uersa &c.

Alia

Alia Iordani propositio.

Duplæ interuallum, ex duabus maximis proportionibus superparticularibus, coniungitur. Hoc est, interuallum ipsius diapason, constat ex interuallo sesquialtero & sesquitertio: ut ex 1 1 & 1 1 1 fit 1 1 1 1 1.

Iam uide, quàm facile sit ponere propositiones huiusmodi innumerabiles: ut,

Diatessaron constat ex tonis duobus, & semitonio minore, ut 1 1.

Diapente constat ex diatessaron & tono, siue ex tribus tonis & uno semitonio minore, ut 1 1 1.

Diapason constat ex tonis quinq; & semitonijs minoribus duobus, siue ex semitonijs minoribus duodecim, et commatibus quinq;.

Schisma additū ad semidiapente, facit dimidium unius diapason: ut ad 1 1 facit 1 1.

Et sic de alijs infinitis.

De Subractione.

Extant etiam ꝓpositiones Iordani de subtractione, ut est illa: Sesquitertium interuallum, demptum à sesquialtero, relinquit sesquioctauum interuallum, ut 1 1 ab 1 1 1 facit 1.

Item illa: Subtractione facta consonantiæ unius diapente, à consonantia unius diapason, relinquitur consonantia ipsius diatessaron: ut 1 1 1 ab 1 1 1 1 facit 1 1.

Est & hic facile Iordanū imitari, atq; ita proponere. Sesquioctauum interuallum, subtractum ab interuallo sesquitertio, relinquit semiditoni interuallum: ut 1 ab 1 1 facit 1.

Item sic: Tonus subtractus à semiditono, relinquit semitoniū minus: ut 1 ab 1 facit —.

Item sic: Semitonium minus si subtrahatur à tono, relinquit semitonium maius: ut — ab o facit o.

Item sic: Semitoniū minus subtractum à semitonio maiore, relinquit comma: ut — ab o relinquit o.

Item sic: Dimidium toni unius, subtractum à dimidio unius diapason, relinquit diatessaron: ut ū ab 𝅗𝅥 facit 𝅗𝅥𝅗𝅥.

In his omnibus consentiunt scalæ Musicales, Algorithmo proportionum, atque huic meo Algorithmo, iucundo certe & admirando consensu.

Item: Tertia pars toni, subtracta à summa duarū tertiarū unius semitonij minoris, & unius diaschismatis, atq; tertia parte diaschismatis, & unius schismatis cum parte tertia unius schismatis, relinquit toni partem tertiam. Et sic de alijs infinitis pulchrisq; exemplis.

De Multiplicatione propositiones.

Prima. Semiditonus cum schismate & diaschismate, multiplicata per 4, faciunt bisdiapente.

Multiplicanda sic signant 𝅗𝅥.

Multiplica quodlibet horum seorsum per 4, tunc fiunt 𝅗𝅥𝅗𝅥𝅗𝅥𝅗𝅥 & 𝅗𝅥 & 𝅗𝅥 & 𝅗𝅥, scilicet quatuor semitonia minora cum quatuor schismatibus, faciūt duos tonos, qui sumpti cum quatuor tonis, & quatuor diaschismatibus. i. duobus semitonijs minoribus, faciunt bisdiapente, ut habet propositio.

Secunda. Semitonium minus cum schismate, multiplicata per 6, faciunt tritonum.

Multiplicanda sic signantur 𝅗𝅥.

Tertia. Semidiapente cum schismate, multiplicata per 4, faciunt bisdiapason.

Multiplicanda sic signantur 𝅗𝅥.

Et sic de alijs.

De Diuisione.

1. Si diuidatur bisdiapente per 4, tunc prouenit semiditonus cum schismate & diaschismate: atq; ita probatur ꝓpositio illa prima, quæ paulo superius data est de multiplicatione.

Diuidenda sic signantur 𝅗𝅥.

Toni 6 seorsum diuisi per 4, faciunt 1 ½ ton, hoc est 𝅗𝅥. Deinde

à semi.

2 semi. min. diuisa per 4, faciunt ½ semi. min. hoc est ¬.

2. Si tritonus diuidatur per 6, tunc producitur semitonium minus cum schismate. hoc est ½ ton. facit ⊽.

3. Si bisdiapason diuidatur per 4, tunc prouenit semidiapente cum schismate. Primo, decem toni per 4 diuisi, faciūt 2½ ton. hoc est $\frac{1\,1}{\cup}$. Deinde reliquum. i. 4 semi. min. diuisa per 4, faciunt −, hoc est semitonium minus. Summa omnium facit $\frac{1\,1}{\cup}$. Et sic de alijs similibus.

Multiplicatio per minutias.

Si semidiapente multiplicatur per ¾, tunc producitur semidi tonus cum semi. minore, schismate & diaschismate, hoc est $\frac{1}{\cup\cup}$.

Multiplicanda sic signantur $\frac{1\,1}{=}$.

Primo. 2 ton. multiplica per numeratorem minutiæ. i. per 3. facit 6 ton. qui diuisi per denominatorem, id est per 4, faciunt 1½ ton. hoc est $\frac{1}{\cup}$.

Secundo, 2 semiton. mino. multiplica per numeratorem, & productū diuide per denominatorē, facit 1½ semi. mi. hoc est ⊽.

Proba multiplicatione producti, per ¾.

Primo, multiplicatio producti (hoc est $\frac{1}{\cup\cup}$) per 4, facit 4 to. & 8 semi. min. & 4 diaschismata, & quatuor ˇ schismata: Hæc omnia simul addita, faciunt 6 tonos & 6 semitonia minora. Hæc igitur diuisa per 3, faciunt 2 tonos & 2 semitonia minora, hoc est $\frac{1\,1}{=}$ seu semidiapente.

Ex his patet duas tertias unius semitonij minoris, cum uno diaschismate, atq; una parte tertia unius diaschismatis, & uno schismate, atq; tertia parte unius schismatis, constituere duas partes tertias unius toni. Patet sic: 4 toni diuisi per 3, item 8 semitonia min. diuisa per 3, item 4 diaschismata diuisa per 3, item 4 schismata diuisa per 3, faciunt (ut paulo superius probaui) $\frac{1\,1}{=}$. Si autem à quotentibus istis subtrahas 1⅓ ton. cum duobus semi. mi. relinquuntur ⅔ semit. min. & ⅔ diaschismatis, & ⅔ schismatis. Et hæc oīa æquantur 2 tertijs unius toni. Patet.

Si enim $\frac{2}{3}$ toni addantur ad $1\frac{1}{3}$ toni, tunc integrantur 2 toni, qui cum duobus semitonijs minoribus faciant semidiapente. Vel ita probabis calculando. Recipe numeratores quotientum pro integris, iuxta uniuscuiusq; minutiæ denominationem uul garem: scilicet recipe 2 semitonia minora, & 4 diaschismata, cum 4 schismatibus. Hæc simul addita faciunt 2 tonos, & illos iam diuide per 3. hoc est, per denominatorē quotientum com munem. Atq; ita proueniunt $\frac{2}{3}$ toni, ex quotiētibus prædictis ad se additis.

¶ Diuisio per minutias.

Proportio diapason cum diapente diuisa per $1\frac{1}{2}$, facit diapa son minus una octaua parte semitonij minoris.

Hic diuidendi sunt 8 toni & 3 semi. min. per $\frac{8}{7}$. seu (qđ idem est) 8 toni & 3 semi. min. multiplicanda sunt per $\frac{7}{8}$, facit opera tio hæc 5 tonos & $\frac{15}{8}$ semi. min. Vides hic satis ut desit $\frac{1}{8}$ semit. min. à perfectione unius diapason. Istis igitur modis, propor tiones, irrationalium terminorum, irrationalesq;, per rationa les numeros pulchra ratione supputantur.

¶ De quæstione, an tonus possit dimidiari.

ILli qui contendunt, tonum, & similium modorum propor tiones (uidelicet diatessaron, diapente, diapason, &c.) non posse dimidiari, ducti authoritate Iordani & aliorum quorun dam hominum eruditorum, considerent eosdem uiros quorum authoritate nituntur, nō frustra ponere schisma atq; diaschisma. Qui aūt ponit schisma, hoc est, commatis dimidium, ille certe, eo ipso facto, ponit etiam toni dimidium, cum schisma sumptū cum semitonio minore uere sit toni dimidium. Patet. Nam duo schismata faciunt unum comma: comma uero sumptum cum duobus semitonijs minoribus, complet tonum integrum. Vt ~ & ~ faciunt 1, hoc est, tonum.

Sic autem ponitur dimidiatio cōmatis & positio schismatū.

5 2 4 2 8 8
$\sqrt[8]{}$ 2 7 8 6 2 8 1 3 9 0 0 8 > Schisma ~
5 3 1 4 4 1 > Schisma ~

Et toni dimidiatio præcisè ponitur sic:

8 — Semitonium minus cum schismate ⁻
√872
9 — Semitonium minus cum schismate ⁻

Probabis autem dimidiationem hanc esse præcisam, per duplationem partium: cum necesse sit utrancq; partium, duplatione sui, reddere tonum præcisè.

Sic proportio $\frac{8}{\sqrt{872}}$ duplata, facit $\frac{64}{72}$ seu $\frac{8.}{9.}$

Item proportio $\frac{\sqrt{872}}{9}$ duplata, facit $\frac{72}{81}$ seu $\frac{8.}{9.}$

Sic etiam qui toni ponit dimidium, necessario admittit diapason dimidiationem, cum diapason constet ex duobus semitonijs minoribus & quinq; tonis, ut ' ' ' ' ' ' '. Sic autem ponitur dimidiatio ipsius diapason.

1 — Semidiapente cum schismate. ' '
√82
2 — Semidapente cum schismate, ' '

Deinde qui ponit diaschisma (hoc est, semitonij minoris dimidium) is certe conuincitur admittere dimidiationem ipsius diatessaron. Sic autem sumitur dimidiatio semitonij minoris, positis diaschismatibus.

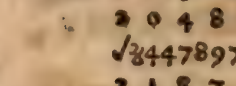
2 4 3 — Diaschisma. ⁻
√862208
2 5 6 — Diaschisma. ⁻

Et diatessaron dimidiatio ponitur sic:

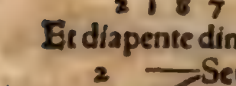
3 — Tonus cum diaschismate. '⁻
√812
4 — Tonus cum diaschismate. '⁻

Sic similiter sequitur dimidiatio ipsius diapente, positionem schismatis & diaschismatis. Item dimidiatio semitonij maioris eandem positionem sequitur.

Sic autem ponitur dimidiatio semitonij maioris:



Et diapente dimidiatio ponitur sic:



Singula hæc probantur additione partium ad se, seu (quod idem est) duplatione partis alterius.

Sunt autem dimidiationes illæ certiores, quàm ut aliquis eas possit negare. Nec Iordanus, aut Stapulensis, uel ullus hominũ doctorum, aliquid aliud circa hanc quæstionem negauit, quàm quòd tonus in duo æqualia diuidi possit, certo et constituto (ut ipsi loquuntur) numero, hoc est numero rationali. Non autem negant tonum posse diuidi per numerũ incertum, & qui nulla unitatum aggregatione sit constitutus, id est, per numerũ irrationalem. Et quia quælibet pars dimidiationum prædictarum constat ex termino certo seu rationali, & ex termino incerto & incognito, seu irrationali: ideo partes etiam illæ singulæ, sunt proportiones incertæ & incognitæ seu irrationales. Sed de numeris irrationalibus & proportionibus irrationalibus suo loco plura docebo, ut de Musicis rebus hæc dicta sufficiant.

De numeris uulgariter denominatis, & de praxi Italica. Cap. x.

NVMERI uulgariter denominati, sunt numeri contracti ad res naturales uel artificiales, recipientes suas denominationes à rebus suæ contractionis, quæ quidẽ denominationes nulla lege proportionali sibi inuicẽ cohærẽt: ut 18 fl. 3 ligna. 4 tont &ẽ Vltima autem particula descriptionis huius, posita est propter numero-

numeros Cossicos, & minuta Physicalia. Horum em denominationes certa lege proportionali sibijnuicem sunt colligatæ: ideo inter numeros uulgariter denominatos non recensentur numeri Cossici & minuta Physicalia.

De Additione & Subtractione numerorum uulgariter denominatorum.

QVemadmodum minutiæ absolutæ à denominationibus uulgaribus, non adduntur ad se, nec subtrahũtur ad inuicem, nisi æquales habeant denominatores: ita numeri uulgariter denominati, non adduntur ad se, neq; subtrahuntur ab inuicẽ, nisi prius fuerint reducti ad eandem denoiationem. Si autem numeri habeãt easdẽ denominationes, tunc (ad similitudinẽ additionum minutiarũ absolutarũ) colligunt numeri in unius numeri summã, & illi summæ adijcitur denoiatio cõmunis, sicuti notum est omnibus hominibus: ut 10 arbores & 16 arbores, facunt 26 arbores.

De reductione denominationum.

Si numeri uulgariter denominati habeant denoiationes reducibiles: ut 900 grossi March. & 400 gros. Saxonici (quorũdam aũt numerorũ denominationes sunt irreducibiles, ut 10 grana tritici, & 16 equi aut asini) recipe de quolibet numero unitatẽ cum denominatione sui numeri (ut 1 gros. Mar. & 1 gr. Sax.) & uide quæ sit proportio ualoris inter utrunq; (ut quia 1 gros. March. ualet 8 denariolis, & 1 gr. Sax. ualet 12 ℔ eiusdem ualoris, ideo est inter utrunq; grossum proportio sesquialtera) proportionemq; inuentã, stantemq; in minimis suis terminis, atq; in formã minutiæ absolutæ redactam, iuxta exigentiam denominationis reducendæ (ut si reducendi sint Marchionici, sic stabit minutia $\frac{3}{2}$, si uero Saxonici ad Marchionicos sint reducendi sic stabit $\frac{1}{2}$) multiplica in numerũ reducẽdum, tunc producitur numerus reductus: ut 900 gro. March. multiplicati in $\frac{3}{2}$, fiunt 600 gros. Saxon. æquati 900 grossis Marchionicis. Sic 400 Saxon. multiplicati in $\frac{3}{2}$, fiunt (sub ualore priori) 600 March.

Itaq;

Itaq; si addere uelis 900 gros. March. ad 400 gros. Saxonicos, reducto prius altero numerorum adde, uidelicet addendi erunt uel 600 Saxon. ad 400 Saxon. uel 900 March. ad 600 March. scilicet 900 March. ad 400 Saxon. faciunt, uel 1000 Saxon. uel 1500 March. Sic 400 Sax. subtracti à 1500 March, relinquunt uel 900 March. uel 600 Saxon.

In similibus similiter operaberis. Vt 32 flor. Rhenenses, ad 4200 gros. Saxon. additi, faciunt uel 232 flor. uel 4872 gros. Proportio enim inuenta, & ad minutiam redacta, sic stabit $\frac{21}{1}$, uel sic $\frac{1}{21}$: facit enim 1 flo. 21 gros. Itaq; proportio inter 1 fl. & 1 gr. est proportio numeri 21 ad unitatem.

De Multiplicatione numerorum uulgariter denominatorum.

NVmerus uulgariter denominatus, nõ potest multiplicari per alium numerum uulgariter denominatum, nisi alter eorum suam denoiationem deponat, & fiat abstractus. Abstractus autem numerus, quemlibet denominatum numerum multiplicare potest: ut 12 flor. per 10 multiplicati, faciunt 120 flo. Et sic semper recipit summa producta, denominationem, multiplicati uel multiplicantis. Sed 12 flo. per 10 fl. non multiplicantur, nec per 10 gros. &c. quia multiplicatio requirit, ut totũ in totum multiplicetur, ita uidelicet ut non solum numerus in numerum, sed etiam denominatio in denominationem multiplicetur, ut patet in numeris Cossicis et minutijs quibuscunq;. Denominationes autem uulgares non sibi inuicem cohærent sub proportionalitatis alicuius lege, sicut cossicæ denominationes: ideo inter se non possunt multiplicari, sicut cossicæ denominationes inter se multiplicãtur. Quid uero fiat per regulam De Tri, suo loco dicam paulo inferius.

De diuisione numerorum uulgariter denominatorum.

LIcet numerus uulgariter denominatus non possit multiplicare alium numerum uulgariter denominatũ (siue ambo habeant

habeant diuersas denominationes, siue habeant eandem) alter tamen per alterum diuidi potest, modo ambo eandem habeant denominationem. Quando autem diuersas habent denominationes, tunc, ante diuisionem, debet fieri reductio; ut sint diuidendi 462 gro. Saxon. per 4 flor. Rhenenses. Reducendi sunt, uel 4 flo. ut fiant 84 gro. uel 462 gr. reducēdi sunt ut fiant 22 fl. Siue autem 462 gro. diuidantur per 84 gros. siue 22 flor. diuidantur per 4 flor. producitur quotiens ille $5\frac{1}{2}$. scilicet numerus absolutus seu abstractus producitur. Quando enim numerus denominatus uulgariter, diuiditur per numerum uulgariter denominatum, tunc altera denominatio alteram tollit, tanquam æqualis æqualem; & sic necesse est, ut quotiens quoq; pueniat sine denominatione illa. Quando autem numerus uulgariter denominatus, diuiditur per numerum abstractum, tunc necesse est ut quotiens seruet denominationem numeri diuisi; quando enim numerus uulgariter denominatus diuiditur per numerū abstractum, tunc numerus diuidendus diuiditur in tot particulas inter se æquales, quot diuisor habuerit unitates. Et sic quæritur, quanta sit quælibet pars rei sic diuisæ. Vnde necesse est, ut quælibet pars seruet denoīationem rei suæ integræ. At quādo numerum uulgariter denominatum, diuidit alius numerus uulgariter denominatus, tunc quæritur, quotiens numerus ille diuidens habeatur in diuidendo; unde ad quæstionē illam cadit responsio aduerbialis; ut 9 gro. inuenio contineri sub 36 gros. quater, quam responsionē exprimo per numerum quotientis. Habes igitur iam aliam rationem, quare hoc casu producatur quotiens absq; denominatione numeri diuidēdi. Adde tertiam rationem. Cum multiplicatio probet diuisionem, necesse est ut aut diuisor (quādo diuiditur numerus uulgarit̄ denominatus) aut quotiens, sit numerus abstractus, ut possit fieri multiplicatio quotientis in diuisorem. Quando ergo diuisor denominat̄ uulgarit̄, tunc quotiēs necessario erit absolutus seu abstractus. Hoc loco uide, ut omnia quæ dicta sunt de denominatis nume

ris, habeant etiam locum in minutijs absolutis seu abstractis propter denominatores earum: sed sufficiat hæc monuisse. Numerus denoiatus uulgarit nunq; diuidit numerũ abstractũ.

De Minutijs uulgariter denominatis.

MInutia uulgariter denominata, oritur ex diuisione numeri uulgariter denominati, per numerum abstractum, ipsumq; diuidendum non numerantem. Vt dum diuido 15 fl per 8, quia 8 non numerat 15, ideo ex diuisione illa oritur minutia: & quia diuisor absolutus diuidit denominatum, necesse est minutiam prouenientem esse denominatam, scilicet ex diuisione 15 fl per 8, nascitur 1 $\frac{7}{8}$ flor. Ex causa igitur iam dicta fit, ut denominator minutiæ uulgariter denominatæ semper habeatur pro numero abstracto, atq; ita denominatio uulgaris pertineat ad numeratorem solummodo.

De Algorithmo minutiarum uulgariter denominatarum.

ALgorithmus minutiarum uulgariter denominatarũ constat ex regulis Algorithmi minutiarum abstractarum, & Algorithmi integrorum uulgariter denominatorum: ut nihil noui ueniat hoc loco docendum, sed tantum exemplis quibusdam regulæ illæ ueniant rememorandæ.

Exemplum additionis primum.

$\frac{2}{3}$ flor. ad $\frac{5}{7}$ flor. facit 1 $\frac{8}{21}$ floren.

Exemplum additionis secundum.

$\frac{2}{3}$ March. ad $\frac{1}{3}$ Saxon. gro. facit 1 $\frac{2}{3}$ Marchio. grosi. uel facit 1 $\frac{1}{9}$ Saxon. grosi.

Primo fiat reductio denominationũ uulgarium antequàm fiat reductio denominatorum minutiarum, quãdo occurrerint exempla requirentia duplicem illam reductionem: ut in sequenti exemplo, $\frac{2}{3}$ March. ad $\frac{3}{4}$ Saxon. facit 1 $\frac{10}{24}$ March. grosi. uel facit 1 $\frac{7}{18}$ Saxon. grosi.

Probatur: Reduc 1 $\frac{7}{18}$ Saxon. ad March. tunc uidebis summam additionis sub denominatione Marchionicæ monetæ.

Vel

Vel reduc 1 19/24 March. tunc uidebis summam additionis, sub denominatione Saxonicæ monetæ.

Obserua etiam, ut reductio illa denominationum uulgariū, nitatur regula de Tri: ut,

Mar.	Sax.	March.	Saxon.
3	2	2/3	facit 4/9

Item:

Saxo.	Mar.	Saxon.	March.
2	3	1/4	facit 2/8

¶ Exemplum subtractionis.

2/3 Mar. ab 1 7/36 Saxon. relinquunt 3/4 Sax. uel 1 1/8 March. gros.

Aliud.

3/4 Saxo. ab 1 19/24 March. relinquunt 2/3 March. uel 4/9 Sax. gros. Et sic de similibus.

¶ Exemplum multiplicationis.

1 7/36 Saxon. gros. per 1 1/2. facit 1 19/24 Saxon. gros.

Exemplum aliud.

1 19/24 Marchion. per 2/3. facit 1 7/36 March. gros.

¶ Exemplum diuisionis primum.

2/8 flor. per 1/4 gro. faciunt 9.

Reduco primo 9/8 ℔ ad 288/8 gr. atq; ita diuido 288/8 gros. per 1/4 gros, uel diuido 9/8 ℔ per 1/8 ℔.

Exemplum diuisionis secundum.

1 7/36 gros. per 2/3. faciunt 1 19/24 gros.

¶ De usu numerorum uulgariter denominatorum sub regula De Tri.

DE regula De Tri uidere poteris ea, quæ superius dixi cap. sexto. Hoc autem hic uolo docere solūmodo, quod paulo superius promisi; uidelicet, ut denominationes numerorū multiplicandorum se non impediant sub regula de Tri, repetamq;, ut ex tribus numeris denominatis producatur quartus.

Primo igitur ponatur numerus quæstionis 3/4 parte dextra, ut sit in ordine tertius. Est autem numerus quæstionis ille,

qui in pronunciatione exempli, sequitur huiusmodi aliquod uocabulorũ, quanti, quantum, quot, quoties, quamdiu &c.

Secundo ponitur numerus diuidens à parte sinistra, ut sit in ordine primus. Est autem numerus diuidens ille, qui eandem denominationem habuerit cum numero quæstionis: uel si eandem non habuerit omnino, tamen talem habebit quæ reducatur ad eandem.

Tertio ponitur numerus reliquus in medio, ut in ordine eorum sit secundus.

Intelligitur aũt numerus diuidens, diuidere numerum quæstionis: & cum eadem sit denominatio uulgaris in utroq; fit ut denominatio unius tollat denominationem alterius, per legem diuisionis, fitq; per hunc modum, ut proueniat quotiens abstractus, qui tandem possit multiplicare terminum secundum, uulgariter denominatum, atq; ita producere terminum quartum, habentem denominationem termini secundi.

¶ Exemplum.

Septem libræ croci emuntur pro 40 florenis, quantum ergo croci emo pro duodecim grossis. Sic stat exẽplum ad regulam, reductis grossis ad florenos.

ß	℔	ß	
40	7	12	facit $\frac{3}{10}$ lib.

Vel sic stat, reductis florenis ad grossos.

gros.	℔	gros.	
840	7	12	facit $\frac{3}{10}$ lib.

¶ Aliud exemplum.

Septem lib. croci pro 40 florenis, quanti emuntur 11 libræ. Sic stat exemplum hoc.

℔	ß	℔	
7	40	11	facit 62 $\frac{6}{7}$ flor.

¶ Exemplum de minutijs.

Pro 62 $\frac{6}{7}$ flor. emo 11 libras croci, quantum faciunt libræ 7.

Sic

Sic stat exemplum hoc ad regulam.

℔	ʃ	℔	
$\frac{11}{1}$	$\frac{440}{7}$	$\frac{7}{1}$	facit 40 flor.

Quando enim minutia fuerit inuenta circa terminum unum, tunc omnia integra franguntur. Vt 62 frangũtur in septimas, (id est, in denominatorem minutiæ sibi adiunctæ) fractaq; integra illa, adduntur minutiæ sibi adiunctæ: atque ita ex $62\frac{6}{7}$ fiunt $\frac{440}{7}$. Reliqui uero numeri duo exempli illius franguntur per solam unitatem suppositam utriq;, eò quòd nulla illis sit minutia adiuncta. Sic operare.

Terminos minutiæ diuidentis, seu primæ, commuta, id est, ex numeratore fac denominatorem, & ex denominatore fac numeratorem. Deinde multiplica singulos numeros superne positos, inter se, & similiter singulos numeros inferne positos inter se multiplica: ut in sequenti dispositione uides.

℔	ʃ	℔	
$\frac{1}{11}$	$\frac{440}{7}$	$\frac{7}{1}$	facit $\frac{3080}{77}$ flor.

Iam ex minutia facta, facito integra, facit 40 flor.

¶ Exemplum de terminis ex integris diuersis compositis.

Quanti emuntur 7 libræ croci, si 11 libræ emuntur pro 62 floren. & 18 gros.

Primo sic stat pars exempli.

℔	ʃ	℔	
11	62	7	fac. 39 fl. $9\frac{7}{11}$ gro.

Pars exempli secunda.

℔	gros.	℔	
11	18	7	facit $11\frac{7}{11}$ gro.

Duo illa producta partium exempli, addita ad se, faciunt 40 fl.

¶ Quæstio pulchra.

Dum 11 libræ emuntur pro 62 flor. & 18 gros. tunc emuntur 7 libræ pro 40 florenis: quæritur iam, quot grossi pro uno

floreno sint recepti. Sic operare.

Multiplica quartum terminum, per primum, & secundum terminum per tertium, tunc fiunt producta illa duo: primum 440 ℔, secundum 434 ℔ & 126 gro. Iam subtrahe florenos ab inuicem, uidelicet 434 ab 440 remanent 6. Et per hunc numerum diuide 126 gro. facit 21 gros. & tot grossi recepti sunt pro uno floreno. In similibus similiter operaberis.

Multis autem modis contingit operatio compendiosa circa regulam De Tri: ut hic,

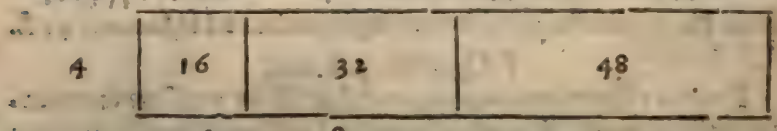
℔	℔	℔	
11	$\frac{440}{7}$	7	facit 40 ℔.

Diuido $\frac{440}{7}$ per 11, fiunt $\frac{40}{7}$. Deinde tollit septenarius unus septenarium alterum, eò quòd unus sit denominator multiplicandæ minutiæ, & alter sit tanquam numerator multiplicãtis: atq; ita remanet quartus terminus, uidelicet 40 ℔.

¶ Praxis Italica.

PRaxis illa quam ab Italis ad nos deuolutã esse arbitramur, est ingeniosa quædam inuẽtio, quarti termini regulæ De Tri, ex tribus terminis, mediante distractione uaria earundem terminorum, distractarumq; particularum proportionatione, atq; denominationũ uulgariũ translatione. Versatur itaq; praxis hæc potissimum in his tribus, uidelicet in distractione terminorum regulæ de Tri, in distractorũ proportionatione, & in denominationum uulgarium trãslatione: ut in exemplis sequentibus clare uidebimus.

1. Ratio distractionis sumitur iuxta Euclidis propositionem primam, libri secundi: quæ docet, ut 4 multiplicata in 4,



&

& in 8, & in 12 separatim, faciant, quantum 4 multiplicata in summam factam ex 4 & 8 & 12, hoc est in 24. & similia.

2. Proportionatio autem particularū distractionis factæ, fit per inuentionē æquationis inter particulam unam illius distractionis, & numerum aliquem, uel minutiam aliquam, alterius denominationis uulgaris. Vt (exēpli gratia) dum inuenio 7 grossos æquari huic minutiæ $\frac{1}{3}$ ℔ &c.

3. Translatio denominationum facilime fit. Nam denominatio tertij termini regulæ De Tri, semper intelligitur esse deleta per primi termini denominationem: imò ambæ se mutuo interimunt, ut facile sit transferre denominationem secūdi termini, super terminum tertium, &c.

Sed uideamus hæc ex sequentibus exemplis.

Exemplum primum de moneta Principum Saxoniæ, uno floreno faciente 21 gro. & uno grosso faciente 12 denariolos.

VLna una uenditur pro 15 grossis & 10 denariolis & uno obulo, quanti uenduntur 48 ulnæ de panno eodem ℭ

ulna	℔	grō.	den.	ulnæ
1	0	15	$10\frac{1}{2}$	48
		7	6	locus distractarū
		7	3	particularum.
		1	$1\frac{1}{2}$	
	16			
	16			
	2	6		locus productorum.
	1	3		
		12		
		6		
facit	36 ℔	6 gros.		Summa productorum.

Primo distraho quindecim grossos in 7 & 7 & 1 grossos.

Ratio

Ratio huius distractionis est hæc: quòd 1 florenus facit 21 gro. unde fit ut 7 gro. æquentur uni tertiæ parti floreni unius, atq; ita statim teneo caput proportionationis in hoc exẽplo requirendæ &c. Quia 7 gros. æquantur $\frac{1}{3}$ fl, ideo loco 7 grossorum recipio $\frac{1}{3}$ fl, translataq; denominatione florenorum supra terminum tertium (id est, supra numerũ 48) multiplico 48 fl per $\frac{1}{3}$. facit 16 fl. Et tantum facit etiam secundus septenarius distractionis. Et 1 (quæ est tertia particula distractionis, cum sit septima pars septenarij) facit pruductum, quod sit septima pars producti 1 prouenientis ex septenario: itaq; pro producto unius grossi, recipio septimam partem de 16 flo. uidelicet 2 fl & 6 gr.

distractio intelligit autã permutationem denominationis rei in denominationẽ fractionismerẽte seu alterius rei de 7 grossis florenisaxonicis restat pars vnig florenigi faciunt vnũ tertiũ florenisaxonicis igit cũ dicit per vnũ tertiumultiplica 48 florenos dicit per vnũ tertiũ quod est 7 grossi sit hoc 7 in 48 . 336 . diuide per 21 grossos qui faciunt vnum florenũ faciens igit 16 florenos

Sequitur distractio denariolorum.

Denariolos $10\frac{1}{2}$ distraxi in 6 & 3 & $1\frac{1}{2}$ dena. respiciens ad ultimam particulam distractorum grossorum, id est ad unum grossum, cuius dimidium facit 6 denarios, & dimidiũ de 6 denarijs facit 3 ß, & huius dimidium facit $1\frac{1}{2}$ ß. Atq; ita fit ut reliqua operatio huius exempli compleatur continuis dimidiationib. scilicet, dimidium de 2 flor. & 6 gros. facit 1 fl & 3 gros. huius dimidium (cum 1 fl & 3 gros. faciant 24 gro.) facit 12 grossos, cuius dimidium facit 6 gros.

Tandem fit additio productorum, scilicet grossi 6. 3. 12. 6. faciunt 1 fl & 6 gros. Scribo igitur 6 gro. & reseruo 1 florenum addendum ad reliquos, &c.

in distractione denariorũ facit autã ꝙd modo dixit 10. denarios $\frac{1}{2}$ ipse facit destributionẽ ꝙd patio in primis cũ dicit 10 denarios $\frac{1}{2}$ cũ nõ faciant vnũ grossũ distractio. 5. denarios qui faciũt dimidiũ grossi et in alia parte 5. denarios qui faciũt dimidiũ grossi qui faciũt vnũ denarium cũ dimidio et sic facta est permutatio denominationis intelligit permutationẽ denominationis

Secunda dispositio superioris exempli.

In hac sequenti dispositione uides distractum esse terminum tertiũ, translata super eum denominatione gro. Et quia 21 gr. faciunt 1 fl, satis ex priore dispositione eiusq; declaratione discere potes, cur 48 gros. distraxerim in 21, & 21, & 3, & 3 gros. Pro 21 gros. recipio 1 flor. eumq; multiplico per 15, facit 15 fl. facit ergo particula distractionis tertia, id est 3 gro. septimam partem de 15 fl (cum 3 sit septima pars de 21) hoc est, 2 flore. & 3 grossos, &c.

et ipsũ 3. iterũ capit dimidiũ quod

cũ dimidio et sic facta est permutatio denominationis nã ipsum

ulna	℔	gro.	℥	ulnæ
1	0	15	10½	48
				21
				21
				3
				3
	15			
	15			
	2	3		
	2	3		
	2			
facit	36 ℔	6 gros.		

Completis autẽ productis ex particulis distractionis in 15, sequunt 10½ den. multiplicandi per 48. Transfer denominationem den. ad 48, & fiunt 4 gro. Transfer rursum denominationem gros. ad 10½, faciunt 10½ gro. hoc est ½ flor. qui multiplicatus per 4, facit 2 ℔, uidelicet ultimum productum.

Tertia dispositio primi exempli.

ulna	℔	gro.	℥	ulnæ
1	0	15	10½	48
		10	6	42
		5	3	6
			1½	
	20			
	10			
	1			
	0	10	6	
	0	5	3	
	3	0	0	
	1	10	6	
			9	
facit	36 ℔	6 gro.	0 ℥	

Primo distraxi tertium terminum in 42 & 6. Nam denominatione grossorum translata supra 42, fiunt 2 ℔: qui multiplicati in 10 faciunt 20 ℔, & in 5 faciunt 10 ℔. Deinde 6 dena. faciunt ½ gro. qui multiplicatus per 42 facit 1 ℔. Ergo 3 den. in 42, faciunt ½ ℔, id est 10 gro. & 6 ß: & 1½ facit 5 gr. & 3 den. & sic expedita sunt 42. Restat ut 6 etiam multiplicentur in singulas particulas distractionis secundi termini. Faciunt autem 10 gr. 6 den. ½ flo. qui multiplicatus per 6, facit 3 ℔: ergo 5 gr. 3 ß multiplicati per 6, faciunt 1 flo. 10 gro. 6 ß. Restat multiplicatio 6 in 1½ dena. facit 9 ß. Ex his satis uides cur secundum terminum sic distraxerim, uidelicet in 10 & 5 gro. & 6, 3, 1½ ß.

Quarta dispositio exempli primi.

ulna	℔	gros.	ß	ulnæ
1	0	15	10½	48
		7	6	42
		7	3	6
		1	1½	
	14			
	14			
	2			
	2			
	2			
	1			
	0	10	6	
		5	3	
		6	0	
		4	0	
		1	6	
			9	
facit	36 ℔	6 gros.	0 ß.	

In hac dispositione distraxi 48 (ea ratione quã circa superiorem dispositionẽ exposui) in 42 & 6, Multiplico ergo 42, id est

2 ℔

2 ℔, in 7 & 7 & 1. Secũdo multiplico 7 gro. id est $\frac{1}{3}$ ℔, in 6, facit 2 ℔: & iterũ idem facio propter 7 bis posita. Tertio multiplico 42 in 6. 3. 1 $\frac{1}{2}$ den. scilicet 6 ß faciunt $\frac{1}{2}$ gro. qui multiplicatus per 42, facit 1 flor. Ergo 3 faciunt 10 gros. 6 den. hoc est $\frac{1}{2}$ flor. & 1 $\frac{1}{2}$ facit 5 gro. 3 ß. Quarto multiplico 1 gr. per 6, facit 6 gro. ergo 6 den. (id est $\frac{1}{2}$ gro.) facit 3 gros. & 3 den. faciunt 1 gros. 6 den. & 1 $\frac{1}{2}$ facit 9 den.

Quinta dispositio primi exempli.

ulna	℔	gro.	ß	ulnæ
1	0	15	10 $\frac{1}{2}$	48
		8	6	42
		4	3	6
		2	1 $\frac{1}{2}$	
		1		
	16			
	8			
	4			
	2			
	1			
	0	10	6	
	•	5	3	
	2	6	•	
	1	3	•	
		12	0	
		6	•	
		3	0	
		1	6	
			9	
facit	36 ℔	6 gros.	0 ß.	

Vides hic terminũ secundum distractum in septem terminos continue proportionales. Multiplicantur aũt 42, hoc est 2 flo. in singulos. Deinde etiam 6 in singulos multiplicantur, &c.

¶ Dispositio sexta primi exempli.

ulna	ff	gro.	ß	ulnæ
1	0	15	$10\frac{1}{2}$	48
		8	6	
		4	3	
		2	$1\frac{1}{2}$	
		1		
		6		
		12		
	1	3		
	2	6		
	4	12		
	9	3		
	18	6		
facit	36 ff	6 gros.		

Minima particula distractionis est $1\frac{1}{2}$ dena. Transfer denominationē den. ad 48, fiunt 4 gro. quos multiplica per $1\frac{1}{2}$, fiunt 6 gro. & hoc recipe pro primo producto. Deinde progredere ita, ut tua progressio habeat terminos septem, (sunt enim septem particulæ distractionis) dispositos secundum progressionem Geometricam duplæ proportionalitatis. Pro 24 gro. ponitur 1 ff, & 3 gros. Sic pro 8 ff & 24 gros. ponuntur 9 ff & 3 grossi.

¶ Sequitur exemplum probans ipsum exemplum primum.

Vides ut 36 flor. distracti sint in 24 & 12 flor. Deinde 6 gro. distracti sunt in dena. 48 & 24. In utraq; cū distractione oportuit me respicere ad diuisorem, qui est 48. Itaq; 24 flo. diuisi per 48, faciunt $\frac{1}{2}$ flor. hoc est, 10 gros. & 6 dena. Ergo 12 flor. faciunt 5 gros. & 3 dena. Sic 48 denarij diuisi per 48, faciunt 1 den. ergo 24 dena, faciunt $\frac{1}{2}$ dena.

ulnæ

ulnæ	℔	gro.	ß	ulna
48	36	6	0	1
	24		48	
	12		24	
		10	6	
		5	3	
			1	
			½	
facit		15 gro.	10½ den.	

Exemplum aliud probans exemplum primum.

ulnæ	℔	gro.	ß	ulna	
48	36	6	0	1	
		9			
		4	6	12	8
		2	3	6	4
			1	3	
			½		
facit		15 gro.	10½ den.		

Primo, in hac dispositione, translata est denominatio flore. ad terminum tertium: ideo uides 1 flor. distractum esse in gro. 12. 6. 3. Vnde 12 gro. diuisi per 48, faciunt ¼ gro. & hæc minutia multiplicata per 36, facit 9 gro. Qui dimidiati (propter secundam distractionis particulam) faciunt 4 gr. & 6 den. unde ulterior dimidiatio facit 2 gr. & 3 ß. atq; ita expeditos habeo 36 ℔.

Sequuntur 6 gros. in secundo termino exempli. Transfero igitur denominationem gro. ad terminū tertium, & sic fit 1 gr. (loco unius ulnæ) itaq; iam distraho 1 gros. in 8 & 4 denar. Diuisi aūt 8 dena. per 48 faciunt ⅙ den. & hæc minutia multiplicata per 6 (uidelicet per illum senarium qui stat in secundo termino exempli) facit 1 den. Ergo 4 (id est, secunda particula huius distractionis secundæ) facit ⅔ dena.

Exemplum secundum de moneta ducis Vuirtenbergen. uno floreno faciente 28 solidos, & uno solido faciente sex denariolos.

VNa libra croci pro 5 florenis, 22 solidis, 5 denar. Quanti 36 libræ?

Prima dispositio exempli secundi.

℔	ﬂ	ſ	₰	℔
1	5	22	5	36
	2	14	3	
	2	7	1½	
	1	1	½	
	72			
	72			
	36			
	18			
	9			
	0	36		
		18		
		9		
		3		
facit	209 ﬂ	10 ſ.		

Primo distraxi 5 florenos in 2. 2. 1 floren. Secundo distraxi 22 solid. in 14. 7. 1 solidos: faciunt enim 14 solidi ½ flor. Vnde pro 14 solidis, multiplicatur ½ ﬂ in 36, facit 18 ﬂ: ergo 7 solidi faciunt 9 florenos. item 1 solid. in 36, facit 36 solidos. Tertio distraxi 5 denarios in 3. 1½. ½ dena. Quia enim 3 dena. faciunt ½ soli. facile est uidere ut ex multiplicatione ½ sol. in 36, producantur 18 solidi. Deinde 1½ est dimidium ex 3: ergo 1½ den. facit 9 solidos, & ½ facit 3 solidos, est enim ½ tertia pars ex 1½.

Secunda

¶ Secunda dispositio secundi exempli.

℔	ʃ	ʃ	§	℔
1	5	22	5	36
				28
				7
				1
	180			
	22			
	5	14		
		22		
		30		
facit	209 ʃ	10 ʃ.		

Distractio tertij termini solummodo respicit illos 22 solid. qui intra terminum secundum huius exempli inueniuntur. Transfertur aũt denominatio solidorum de 22 ad 36; unde 28 solidi faciunt 1 ʃ, qui multiplicatus per 22 facit 22 ʃ. Quare 7 solidi faciunt partem quartã illius producti, id est 5 ʃ & 14 ʃ. sed 1 solidus simpliciter multiplicatur in 22, facitq; 22 solidos. Sic primo omniũ multiplicati sunt 5 ʃ in 36 simpliciter, et facti sunt 180 ʃ. Nouissime uero multiplicati sunt 5 den. in 36, scilicet trãslata denominatione denariolorum ad 36, fiunt 6 solidi, qui multiplicati per 5 faciunt 30 solidos.

¶ Tertia dispositio secundi exempli.

Primo 5 floreni in 36 multiplicati, faciunt 180 ʃ. Et ultimo, 5 dena. multiplicati in 36, faciunt 30 solidos, ut in superiori dispositione ostendi. Manẽt igitur 22 solidi multiplicandi in 36. Distraxi autem 22 solidos illos in particulas progredientes secundum progressionem duplæ proportionalitatis, scilicet in 1. 2. 4. 8. 16 solidos: eos uero terminos qui superfluunt, uirgula signaui, uidelicet 1 & 8. Reliqui faciunt 22 solidos, si ad le addantur.

℔	ʃ	ʃ	℥	℔
1	5	22	5	36
		ſ		
		2		
		4		
		8		
		16		
	180			
	ſ	8		
	2	16		
	5	4		
	ſ5	8		
	20	16		
		30		
facit	209 ʃ	10 ʃ		

Multiplicata autem prima particula, uidelicet 1 ſolid. in 36. facit 36 ſolidos, id eſt 1 flor. & 8 ſolid. quare duo ſolidi faciunt duplum prioris producti. Progredere itaq; donec habeas termi nos progreſſionis duplæ quinq;, iuxta quinq; particulas diſtra ctionis. Et ſicut particulæ, prima atq; quarta, ſignatæ ſunt uir gula: ita ſignanda ſunt etiam producta earum, uidelicet pri mum productum & quartum ſignari debent uirgula, ne cum aliis productis colligantur in ſummam aggregationis.

¶ Quarta diſpoſitio exempli ſecundi.

Hanc diſpoſitionem ſatis intelliges ex tertia diſpoſitione hu ius exempli ſecundi. Translata autem denominatione ſolidorū ſupra primam particulam diſtractionis termini tertij, efficitur 1 flor. qui multiplicatus in 16. 8. 4. 2. ſ. facit 16. 8. 4. 2. ſ flo. Sic 8 etiā debet multiplicari in ſingulas particulas illas: & dum 8 in 16 ſolidos multiplicantur (id eſt, in primam particulam) debent 16 diſtrahi in 14 & 2 ſolid. faciunt enim 14 ſoli. ½ flore.

Et

℔	ℛ	ʃ	℥	℔
1	5	22	5	36
		2 16 14		28
		8		8
		4		
		2		
		1		
	180			
	16			
	8			
	4			
	2			
	1			
	4	16		
	2	8		
	1	4		
		16		
		8		
		30		
facit	209 ℛ	10 ʃ.		

Et sic uides, ut 8 in 14 (id est in ½ ℛ) faciant 4 ℛ. Deinde 8 in 2 soli, faciunt 16 solidos. Sic ergo multiplicatio 8 in 8, facit 2 ℛ 8 ʃ. Et sic deinceps pergendum est per dimidiationem. Vnde illae particulae 2 & 14, quae stant in loco distractorum circa 16, posita sunt propter secundam particulam distracti termini tertij, uidelicet ut uideas qua ratione 8 debeant multiplicari in 16. Notum est autem ut 5 ℛ in 36, faciant illos 180 florenos, quos uides poni à principio productorum. Item ut 5 ℥ in 36, faciant illos 30 solidos, qui ultimi sunt inter producta.

Sequitur exemplum probans exemplum secundum, & maxime dispositionem primam eiusdem exempli.

℔	ﬂ	ﬀ	ß	℔
36	209	10	0	1
	9	36		
	18	18		
	36	9		
	72	3		
	72			
		7		
		14		
	1	0		
	2	0		
	2	0		
		1	0	
			3	
			1½	
			½	
facit	5 ﬂ	22 ﬀ	5 ß	

Primo in distrahendis 209 flor. respexi ad diuisorem: unde 9 ﬂ diuisi per 36, faciunt ¼ ﬂ, hoc est 7 solid. Ergo 18 ﬂ faciunt 14 soli. & 36 ﬂ faciunt 1 floren. & 72 flore. faciunt 2 flore. &c. Sic 36 soli. faciunt 1 solid. & 18 solidi faciunt ½ soli. id est 3 de. & 9 solidi faciunt 1 ½ den. & 3 soli. faciunt ½ dena.

Facit aũt distractorum summa, sub 209 flo. inuenta, solum modo 207 ﬂ. Nã duo floreni resoluti sunt in denariolos, qui cũ 10 ß, sub qbus ponunt̃, sumpti sunt atq; distracti, ut satis uides.

☞ Alia dispositio exempli probantis exẽplum secundũ.

In sequenti dispositione, transfertur denominatio flor. supra terminũ tertium, ut loco 1 ℔ intelligas poni 1 ﬂ: & distrahitur ille primo in 18. 9. 1 solidos. Diuisi aũt 18 ﬀ per 36, faciunt ½ ﬀ. qui multiplicatus per 209, facit 3 ﬂ, 20 ﬀ, 3 ß. Ergo 9 solidi faciunt dimidium illius producti, uidelicet 1 ﬂ, 24 solid. 1 ½ den. & huius partem nonam, facit 1 soli, uidelicet 5 soli. & 4 ⅝ den.

Secundo

Secundo transfertur etiam denominatio solidorū supra terminum tertium, ut iam 1 soli. poni intelligas in loco unius lib. Qui cum faciat 6 ₰ diuidendos per 36, inuenies modo illo $\frac{1}{6}$ ₰ multiplicari per 10, facere $\frac{4}{6}$ ₰. Vnde sic stabit illa dispositio.

℔	ʃ	₰	₰	℔
36	209	10	0	1
				18 6
				9
				1
	3	20	3	
	1	24	$1\frac{1}{2}$	
		5	$4\frac{5}{6}$	
			$1\frac{2}{6}$	
facit	5 ʃ	22 ₰.	5 ₰.	

¶ Exemplum tertium de moneta Palatini electoris, uno floreno faciente 26 albos, & uno albo faciente 8 ₰.

VNa libra piperis uenditur pro 20 albis & 5 denariolis. Quanti uenduntur 52 libræ?

¶ Exempli prima dispositio.

℔	ʃ	alb.	₰	℔
1	0	20	5	52
		13	4	
		$6\frac{1}{2}$	1	
		$\frac{1}{2}$		
	26			
	13			
	1			
	1			
	0	6	4	
facit	41 ʃ	6 alb.	4 den.	

Albi 13 faciunt ½ flor. qui multiplicatus per 52, facit 26 flo. Ergo dimidium de 13, id est 6 ½, facit 13 flor. Item ½ alb. multiplicatus per 52, facit 26 albos, id est 1 ß. Similiter 4 den. (cum faciant ½ alb.) multiplicati per 52, faciunt 1 ß: ergo 1 den. facit huius producti partem quartam, hoc est 6 alb. 4 §.

Alia dispositio huius tertij exempli.

℔	ß	alb.	§	℔
1	0	20	5	52
			4	26
			1	26
	20			
	26			
	1			
	0	6	4	
facit	41 ß	6 alb.	4 §.	

Denominatio alborum transfertur super tertium terminū, ut 26 albi faciant 1 flor. qui multiplicatus in 20, facit 20 ß &c. Item 4 dena. faciunt ½ alb. qui multiplicatus per 52, facit 1 flo. Ergo 1 dena. facit ¼ flor. uidelicet 6 alb. 4 dena.

Tertia dispositio huius tertij exempli.

℔	ß	alb.	§	℔
1	0	20	5	52
		16		
		8		
		4		
		2		
		1		
		½	id est, 4 dena.	
		¼		
		⅛	id est, 1 dena.	

	32		
	16		
	8		
	4		
	2		
	1		
	0	13	
		6	4
facit	41 ℔	6 alb.	4 ß.

Totus terminus ſecundus, id eſt 20 albi & 5 dena. diſtracti ſunt in terminos octo continuæ proportionalitatis: ergo producta ſub eadem proportionalitate ſtabunt. Transfertur autē denominatio alborum ſupra terminum tertium, & fient ex 52 libris, 52 albi, id eſt 2 ℔ multiplicādi in ſingulas particulas diſtractionis &c. Minutiæ pertinēt ad 5 ß, ut facile uideri poteſt.

℣ Exemplum probans hoc tertium exemplum.

℔	℔	alb.	ß	℔
52	41	6	4	1
	26	52	52	
	13			
		13		
		6	4	
		1	0	
		0	1	
facit		20 alb.	5 ß.	

Diſtractio ubiq; facta eſt intuitu diuiſoris, ſcilicet 26 ℔ diuiſi per 52 faciunt ½ ℔, id eſt 13 albos: ergo 13 ℔ faciunt ¼ flo. id eſt, 6 alb. & 4 ß. Sic 52 albi faciunt 1 alb. & 52 ß faciunt 1 ß. Duo floreni translati ſunt reſolutiq; in 52 albos, & 6 albi facientes 48 dena. collecti ſunt ad 4 dena, facitq; aggregatum illud 52 dena. &c̄.

¶ Alia dispositio exempli probantis hoc tertium exemplum.

℔	ʃ	alb.	ß	℔
52	41	6	4	1
				26
		20	4	
			1	
facit		20 alb.	5 ß.	

Denominatio alborum transfertur supra terminũ tertium, & sic 26 albi (facientes 1 florenum) diuisi per 52, faciunt ½ alb. qui multiplicatus per 41, facit 20 albos & 4 ß. Deinde 6 albi et 4 denarij, qui stant in secundo termino, additi ad se, faciunt 52 den. diuidendi per 52, uidelicet per diuisorem, & inde uenit 1 ß.

¶ Exemplum quartum de moneta Argentinensium, quæ 1 floreno facit 20 blaphardos, & uno blaphardo facit 6 dena.

TRes cadi uini uenduntur pro 21 ʃ & 5 blaphar. & 2 dena. Quanti uenduntur $34\frac{4}{11}$ cadi?

¶ Primum terminum diuide per 3, & etiam tertium terminum, tunc sic stabit exemplum.

cadus	ʃ	blap.	ß	cadi
1	21	5	2	$11\frac{5}{11}$

¶ Deinde recipe tertij termini numeratorem, abiecto denominatore, & sic multiplicatus est tertius terminus per 11. Oportet ergo ut secundum terminum diuidas per 11, ne uidelicet mutetur summa multiplicationis debita. Hoc facto, sic stabit exemplum.

cadus	ʃ	blap.	ß	cadi
1	1	18	4	126

¶ Vnde in dispositiõe praxis Italicæ sic stabit exẽplum hoc.

cadus

cadus	℔	blap.	ß	cadi
1	1	18	4	126
		10	1	
		5		
		2½		
		1		
	126			
	63			
	31	10		
	15	15		
	6	6		
	1	1		
facit	243 ℔	12 blap.		

Distractio facta est per dimidiationes tres. Sunt em̄ 10 bla. dimidium 1 flo. & 5 blap. sunt dimidium 10 blaphar. & 2½ sunt dimidium de 5. Est aũt hæc minutia ½ recepta de distractione 4 den. facit enim ½ blap. denariolos tres. Vnde sub 4 dena. solum uides 1 dena. Reliqua satis patent.

Sequitur exemplum probans.

cadi	℔	blap.	ß	cadus
126	243	12	0	1
	126	126	126	
	63			
	31½			
	15¾			
	1	0		
		10		
		5		
		2	3	
		1	0	
			1	
facit	1 ℔	18 blap.	4 ß	

2

Sunt & hic tres dimidiationes in distractione flor. Particulæ uero illæ 126. 63. 31 ½. 15 ¾, non referunt 243 fl, sed deficiunt 6 ¾ fl. Et illi trãslati sunt ad blaphardos, facientes cũ 12 blap. 147 blaphard. Ex quibus 21 blap. ulterius resoluuntur in 126 denar, quos sub denominatione denariolorum poni uides.

Puto autem per hæc practicam Italicam satis esse explicatam: nam qui mea hæc exempla intelligit, facile poterit ex seipso sibi formare alia exempla quotquot libuerit.

De regulis illis, quæ ad regulam De Tri reducuntur, dicam (Deo uolente) in mea Algebra. Et plura alia de regula De Tri dicam in pluribus locis librorum duorum sequentium.

LIBRI PRIMI DE NVMERIS rationalibus finis.

FALSI.

AD MOECENATEM SVVM D. ADOLphum à Glauburck Francofordiensem patricium, Michael Stifelius. S.

VM nuper Petreius Typographus Norimbergen. totam meam Arithmeticam recepisset, mox postea per literas petijt à me, regulæ Falsi explicationem, ea occasione, quòd liber ille titulum ferret integræ Arithmeticæ. Erant mihi literæ illæ admodum gratæ, propter uiri diligentiam, artes tantopere promouere studentis, ut qui ægreferat titulos librorum magnificos, quibus minus respondeant res contentæ atq; tractatæ in eisdem. Et ego te, mi Adolphe, eo quoq; nomine uehementer ueneror & amo, quòd fucos odias, negotia uero candide facta syncerè colas. Oportebat igitur, ut sic admonitus, de titulo libri rationem redderem, metuens ne & tibi fortassis esse uideretur superbior quàm deceat. Itaq; titulus ille (quem tamen nõ ego libro dedi, sed doctor Milichius) non promittit talem Arithmeticam, in qua omnia inuenias quæ de numeris dicta doctaq; sint, aut quæ de eis inueniri possint ab alijs. Talem Arithmeticam dabit nemo. Sed ideo datus est libro titulus ille, quòd numeros rationales & irrationales tractat, quòd tractat numeros absolutos & relatos, quòd tractat numeros abstractos & contractos, q; tractat numeros denominatos proportionaliter & improportionaliter, quòd docet algorithmos Arithmeticos, Geometricos, Musicos, Astronomicos, & Cossicos: quòd docet Algebræ rationem perfectissimam. Quòd si hæc non sufficiunt, ut commode dici possit Arithmetica integra, hoc uiderit doctor Milichius, qui tanto titulo extulit meum hunc librum. Verum fieri potuit, ut artifex aliquis libris quindecim, aut plus

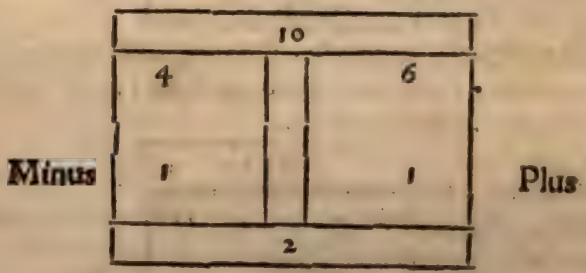
ribus, de Arithmeticæ ſcriptis, non docuerit tanta, quanta ego in libris tribus illis partialibus.

Vt autem ad Petreij poſtulata ueniam, puto ego regulam Falſi, ſeu falſarum poſitionum, inuentam fuiſſe, per paruos numeros, in quæſtionibus facilimis, & cognitis. Sic enim ego aliquando ſolebam inuenire uarias regulas, uariaq; numerorum theoremata: de qua re plura poſſem dare exempla, ſed ſufficiat unum atq; alterum. Vt primum hoc, 2 & 3 faciunt 5, & tantũ facit differentia quadrati de 3 ſupra quadratum de 2: nondum autem habeo theorema quod ponam, recipio ergo 2 & 4, quorum additio facit 6, at quadratum de 4 non excedit quadratum de 2 ſenario, ſed excedit illud duodenario, id eſt, tanto quantum faciunt 2 & 4, multiplicata per differentiam eorum. Et quia eodem modo reſpondent duo numeri prius recepti, ideo ſuſpicor iam me inueniſſe theorema. Sed ut certus ſim de eo, recipio duos alios numeros, uidelicet 2 & 5. Et quia in eis hoc idem inuenio, concludo & dico: Quorumcunq; duorum numerorũ differentia fuerit multiplicata in aggregatum eorũ, producit ipſa differentiam quæ eſt inter quadratum eorum. Aliud exemplum, ut 2. 3. 4. faciunt progreſſionem Arithmeticam. Facit autem multiplicatio medij in ſe, quantum facit multiplicatio extremorum inter ſe, cum additione unius ex differentijs numerorum illorum trium, id eſt, unitatis. Hic nihil adhuc habeo. Pergo ergo recipiens, 2. 4. 6. Hic inuenio multiplicationem medij in ſe, facere quantum multiplicatio extremorum inter ſe facit, cum additione ambarum differentiarum. Cum igitur uideam additionem nõ reſpondere, reſpicio ad multiplicationẽ, & eam reſpondere uideo. Recipio igitur aliam progreſſionẽ, uidelicet 2. 5. 8. Et quia etiam hic reſpondet multiplicatio, concludo, atque inuentam à me propoſitionem ſic pronuncio: Datis tribus numeris ſecundum progreſſionem arithmeticam diſpoſitis, facit multiplicatio medij in ſe, quantũ multiplicatio extremorũ inter ſe, cum multiplicatione differẽtiarum inter ſe. Et ſic de alijs huiuſmodi inuentionibus.

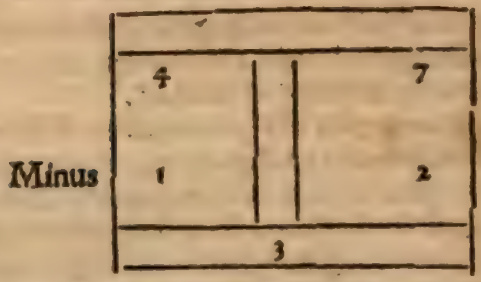
SImili modo (ut ad institutam reuertar tractationem) puto inuentam esse regulam Falsi à primo eius autore. Huius inuentionis audi uel historiam uel fabulam.

Inuenturus author regulã Falsi, dissimulabat se scire numerum illum, à quo 2 subtracta relinquerent 3. Recepit ergo primo 4 loco numeri illius: quem cum examinaret subtrahendo 2, uidit (loco 3) relinqui solummodo 2. Itaq; deficere uidit unitatem, & hunc numerũ, cum defectu illo, separatim annotauit. Deinde recepit 6, quem numerum cum examinaret subtrahendo 2, uidit (loco 3) relinqui 4. Itaq; superfluere uidit unitatem: & sic senarium cum superfluente unitate etiam separatim annotauit. Et sic postea explorauit, qua ratione ex adnotatis numeris produceretur quinarius, qui uidelicet subtractis à se 2, relinqueret 3. Facile autem uidere fuit, qua ratione hoc fieret, scilicet ex aggregatione numerorum receptorum (id est, ex 4 & 6) fiebant 10. Et ex aggregatione falsitatum (id est, ex 1 & 1) fiebant 2. Itaq; ex diuisione 10 per 2, proueniebant 5, id est, numerus qui quærebatur.

Figura positionum prædictarum.

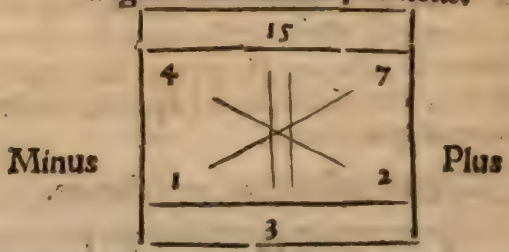


Postea recepit 4 & 7, & per eos simili modo tentauit inuenire quinarium. Et cum uideret figuram huius inuentionis sic stare (ut sequitur) satis uidebat, quòd simplex aggregatio non

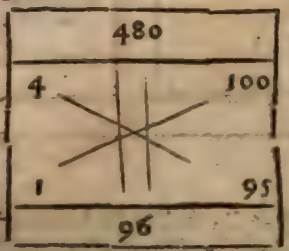


respondéret utrobiq; inuẽtioni priori. Tentauit igitur omnes inueniendi modos possibiles, donec inueniret aggregationem mediante multiplicatione in cruce respondere; scilicet bis 4 & semel 7 (id est, 8 & 7) faciunt 15, quæ diuisa per 3, faciunt 5.

Figura inuentionis prædictæ.

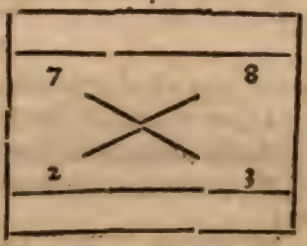


Postea, ut posset concludere, tentauit eiusdem numeri (.l. 5.) inuentionem per 4 & 100: & exibat figura inuentionis, prædicto modo, hæc, respondens rei.



Conclusit ergo inuentiones huiusmodi esse ratas cõstanter, ubi falsitatum altera deficit, seu minus est, altera superfluente,

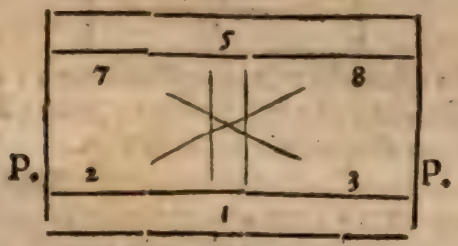
seu plus existente. Deinde conuertit se ad dexteram, tentans inuenire huiusmodi inuentiones, per falsitates, utrobiq; superfluentes. Recepit ergo pro experimento 7 & 8, quibus numeris uoluit inuenire quinarium, modo prædicto: unde figura inuentionis sic exibat.



In qar parte docet quotiescunq; quæ
sunq; numeri aliquē & aliquos alios
in meos iuxta petitā rationē et ex il
lis numeris differentiæ prouenerint
superfluites. i. excedentes tūc debes
operari p subtractionē vt videre
Plus est in exemplo dato et figura
infra posita

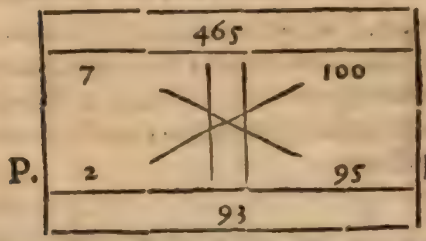
Sed hic cum uideret aggregatione nihil fieri, tentauit rem per subtractionem. Et sic uidit operationem esse bonam, & respondere rei.

Figura operationis huius.

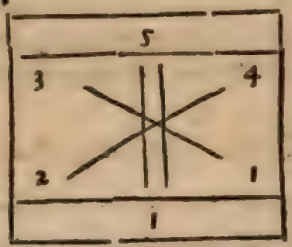


Hoc est, 2 de 3 relinquunt 1 diuisorem: & 3 in 7 multiplicata faciunt 21: & 2 in 8, faciunt 16. At 16 de 21, relinquunt 5 diuidenda per 1 diuisorem.

Postea, ut de inuentione à dextris etiam concluderet, recepit 7 & 100, quibus numeris quinarium produceret, modo prædicto: & exiuit figura inuentionis sic, ut sequitur.



Postea uidens successum se habuisse talem à dextris, uertit se, ut idem experiretur etiam à sinistris. Recepit ergo 3 & 4. id est, numeros quos sciebat allaturos esse falsitates deficiētes utrinq;. Per eos itaq; quæsiuit quinarium producere, sicut prius; & inuenit hanc figuram.



Scilicet 1 de 2 subtracta, relinquit diuisorem 1: & 2 in 4 multiplicata, producunt 8: & 1 in 3, manent 3. Itaq; 3 de 8, relinquūt 5 diuidenda per diuisorem 1. Et sic de alijs.

Post tantos successus in quæstionibus iudicris prædictis, cœpit autor negotium illarum operationum transferre ad obscuras quæstiones, numerorum abstractorum & contractorum. Sentiens igitur immensam latitudinē negocij illius, magnifice lætabatur, reputans se reperisse thesaurum artis incomparabilem. Eas igitur operationes redegit ad regulam, ut sequitur.

Textus regulæ Falsi.

REcipe duos numeros ad placitum, paruos uel magnos, & utrunq; eorum examina, iuxta exempli propositi pronunciationem, ut uideas quanto uterq; eorum fallat, quo minus hoc

hoc exeat quod quæritur. Obseruabis aũt semper & ubicq; utrũ differentia fallens, seu falsitas, plus sit, uel minus eo quod inquiritur. Nam si utrobicq; prouenerit aut minus, aut plus, tunc fit subtractio, & nulla additio. Si autem ex uno numero prouenit plus, & ex altero numero prouenit minus, tunc fit additio, & nulla fit subtractio. Fit autem additio prima (aut subtractio) inter falsitates: scilicet aut una additur alteri, aut una subtrahitur ab altera. Deinde fit multiplicatio in cruce, multiplicante una falsitatum, numerũ positum alterius falsitatis. Quo facto, sequitur additio secunda (aut subtractio) uidelicet productũ unum additur ad alterum, aut subtrahitur ab altero producto, iuxta præcedentia regulæ uerba. Et sic tandem fit diuisio, qua uel aggregatum productorum, uel relictum eorum, diuiditur, uel per aggregatum falsitatum, uel per relictum earum.

nota q̃ accepis numeris ad libitũ si sunt plures uel minus utrobicq; tunc fit additio et non subtractio

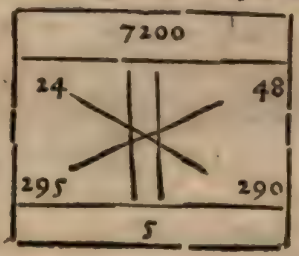
Sequuntur nunc regulæ illius exempla aliqua.

Primum.

¶ Quæratur numerus, à cuius dimidio, subtractæ partes tertia & quarta, relinquant 300.]

Recipio primo 24, qui numerus ideo mihi hoc loco placet, quòd dimidium eius habet partes in pronunciatione nominatas, id est, tertiam & quartam partes, sine fractione aliqua. Laborioſior atq; magis tædiosa est operatio per fracta, quàm per integra, ideo fracta deuito ubi deuitari possunt.

Secundo recipio duplum prioris numeri, id est 48, sic enim expeditius operor: unde figura exempli huius sic stabit.



Primo

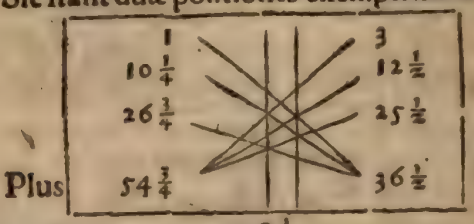
Primo examino primum numerum receptum, id est, 24. cuius dimidiū est 12, de quo pars tertia est 4, & pars quarta est 3. Eas partes aggregatas (id est, 7) subtraho de 12, remanent 5, quæ deberent esse (iuxta pronunciationem exempli) 300. Fallit ergo numerus receptus per 295, & est minus.

Secundo examino alterum receptum numerum, id est, 48. Huius dimidium est 24. Dimidij illius partes tertia & quarta, faciunt 14, quæ subtractæ de 24, relinquunt 10, quæ deberent esse 300. Itaq; numerus ille receptus, fallit per 290, & est etiam minus. Quare subtraho 290 de 295, relinquuntur 5. i. diuisor. Deinde multiplico in cruce, uidelicet 290 in 24, & fiunt 6960: & 295 multiplico in 48, fiuntq; 14160. Subtraho igitur 6960 de 14160, & remanent 7200 diuidenda per 5. Itaq; 1440 est numerus uerus quem quærebam. Nam eius dimidium facit 720, cuius partes tertia & quarta simul faciunt 420, quæ ambæ de 720 subtractæ, relinquunt 300. Et sic ueritas prouenit, & nulla falsitas, hoc loco.

Secundum exemplum.

[Quærantur tres numeri, quorum primus additus ad 73, faciat duplum duorum reliquorum. Secundus, cum 73, faciat triplum duorum reliquorum. Tertius sumptus cum 73, faciat quadruplum duorum reliquorum.]

Sic stant duæ positiones exempli huius.



Satis hic uides, ut $18\frac{1}{4}$ sit unicus diuisor communis: & ut $54\frac{3}{4}$ atq; $36\frac{1}{2}$, sint duo numeri multiplicantes communes, cum sint duæ falsitates. Cum autem ambæ falsitates sint plus, fit ut

diuisor

diuisor communis, nascatur ex subtractione unius ab altera.

Primo autem multiplicatur 1 per $36\frac{1}{2}$, & nihil mutatur de multiplicante, ut notum est. Multiplicantur etiam 3 per $54\frac{1}{4}$, & fiunt $164\frac{1}{4}$. Subtraho igitur $36\frac{1}{2}$ de $164\frac{1}{4}$, & remanent $127\frac{1}{4}$. Relictum hoc diuiditur per diuisorem communem, tunc producitur numerus primus exempli huius, qui est 7.

Secundo multiplicantur $10\frac{1}{4}$ per $36\frac{1}{2}$, fiuntq; $374\frac{1}{8}$. Et $12\frac{1}{2}$ multiplicantur per $54\frac{1}{4}$, & fiunt $684\frac{3}{8}$. Subtraho igitur $374\frac{1}{8}$ de $684\frac{3}{8}$, & remanent $310\frac{1}{4}$. Relictum hoc diuiditur per diuisorem communem, id est, per $18\frac{1}{4}$, tunc producitur numerus exempli secundus, qui est 17.

Tertio multiplicantur $26\frac{1}{4}$ per $36\frac{1}{2}$, fiuntq; $976\frac{1}{8}$. Et $25\frac{1}{2}$ multiplicantur per $54\frac{1}{4}$, fiuntq; $1396\frac{1}{8}$. Subtraho igitur $976\frac{1}{8}$ de $1396\frac{1}{8}$, tunc remanēt $419\frac{3}{4}$. Relictum hoc diuiditur per communem diuisorem, id est, per $18\frac{1}{4}$, tunc producitur numerus exempli tertius, qui est 27.

Primus numerus exempli	7.
Secundus numerus exempli	17.
Tertius numerus exempli	23.

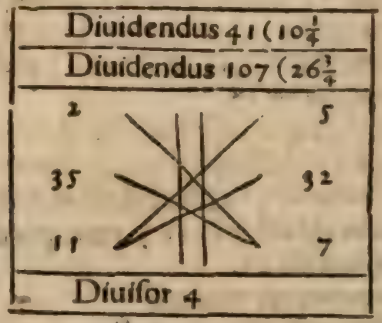
De positionibus exempli duabus superioribus.

Opus est quàm maxime, ut rationem positionum duarum, exempli præsentis, superius positarum, reddam. Habet autem quodlibet exemplum regulæ Falsi duas positiōes regulariter, ut satis uides ex ipso textu regulæ, atq; ex operationibus exemplorum. Operationes autem quæ fiunt per unam positionem, magis fiunt per regulam De tri (formatis arte diuisore & multiplicante) quàm per regulam Falsi. Sed uideamus positiones.

Pro priore positione, placuit primo ponere unitatem, eò q; faciat cum 73 (quem numerū exprimit pronunciatio exempli) numerum parem, cuius subduplus sit numerus integer. Quanq; enim fracta non possint ubiq; uitari, tamen uito eas, ubi sine labore eas uitare possum. Dicit autem pronunciatio exempli, q;

primus numerus debeat cum 73 facere, duplum duorum reliquorum. Itaq; cum 73 & 1 faciant 74, facient (iuxta hæc) duo reliqui 37, id est, dimidium de 74.

Itaq; (iuxta pronunciationem exempli) oportet ut diuidantur 37 in duas partes, quarum prior sumpta cum 73, faciat triplum partis alterius, sumptæ cum unitate. Et sic exemplum nostrum iam præsupponit aliud exemplum partiale, cuius ambæ positiones sic ponuntur.



Minus

Minus

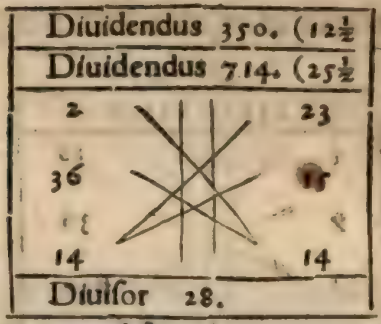
Recepi autem primo 2, eò q; 2 addita ad 73, faciant numerum numerabilem à ternario: & eadem ratione postea recepi 5 &c.

De secunda positione exempli totalis, quæ habet hos tres numeros: 3. 12½. 25½.

Quo consilio autem receperim 3, satis patet ex declaratione primæ positionis, quæ habuit hos numeros 1. 10¼. 26¼. Recepi inquam primo 3, quæ addita ad 73, faciunt 76. cuius pars dimidia facit 38, summam duorum reliquorum, iuxta pronunciationem eiusdem exempli totalis.

Itaq; iuxta pronunciationem eiusdem exempli totalis, oportebit ut diuidantur 38 in duas partes, quarum prior sumpta cum 73, faciat triplum alterius partis, sumptæ cum ternario. Et hoc est iam secundum exemplum partiale, quod exemplum totale præsupponit, cuius ambæ positiones sic figurari possunt.

Diui-

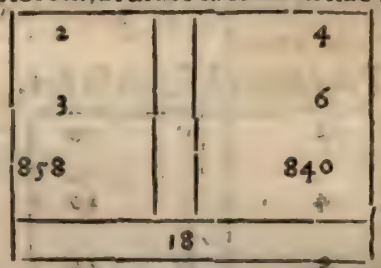


Inuenti quotientes $12\frac{1}{2}$ & $25\frac{1}{2}$, reponuntur ad positionem secundam exempli totalis superius positi. Cætera satis patent ex superioribus.

Sequuntur exempla locupletatæ regulæ Falsi, per Gemmam Frisium: & est inuentum ualde egregium.

QVærantur duo numeri sub proportione sesquialtera, quorum multiplicatio inter se faciat 864.]

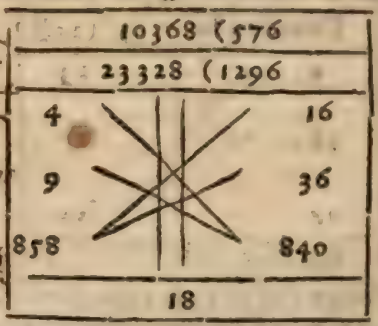
Prima pars regulæ locupletatæ est, ut quæras falsitates iuxta regulam superiorem, ut uides factum in hac figura.



Scilicet 2 in 3 faciunt 6, quæ deberent esse 864: deficiunt ergo 858, &c.

Secunda pars regulæ est, ut (propter multiplicationem numerorum inter se factam) pro receptis numeris, ponantur receptorum numerorum quadrata, manentibus falsitatibus prioribus, cum diuisore ex eis facto, iuxta priorem partem regulæ:

& tunc stabunt numeri ad regulam Falsi sic dispositi.



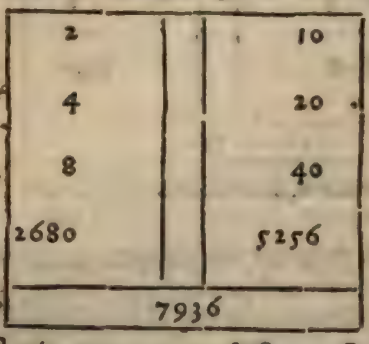
Tertia igitur pars regulæ est, ut inuentis quotientibus, extrahas radicem, uel quadratum (ut hic, ubi multiplicatio inter se duorum numerorum solummodo fit) uel cubicam, ubi multiplicatio trium numerorum fit inter se &c. Vnde cum quotientes, hoc loco, sint 576 & 1296, erunt numeri exempli 24 & 36.

Probatur. Nam ex horum multiplicatione inter se, fiunt 864. iuxta exempli pronunciationem.

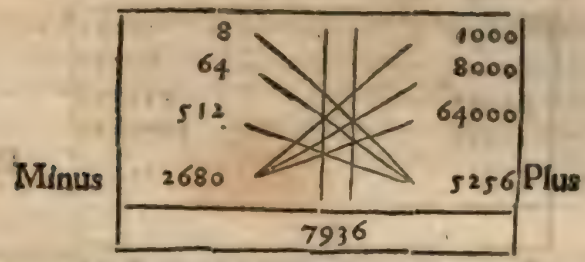
Aliud exemplum.

Quærantur tres numeri sub proportione dupla, qui inter se multiplicati, faciant 2744.]

Prior exempli figura sic stat.



Posterior uero exempli figura sic stat.



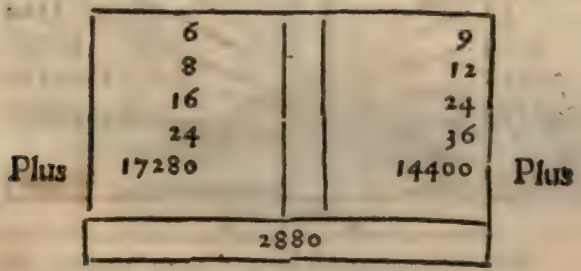
Vides ut hic pro receptis numeris ad positiones, recipiantur cubi eorum. Deinde ex quotientibus inuentis extrahuntur radices cubicæ. Et hæc sic fiunt, quòd numeri tres inter se multiplicantur, iuxta exempli pronunciationem. Numeri sunt, 7. 14. 28.

Aliud exemplum.

¶ Quærantur quatuor numeri, quorum duo minores sint sub proportione sesquitertia: & duo maiores sint sub proportione sesquialtera. Duo uero medij sint sub proportione dupla. Et illi quatuor numeri inter se multiplicati, faciant 1152.]

Hic pro numeris receptis ad positiones, uidebis recipi eorũ zenſizenſos. Et de quotientibus inuentis, extrahentur radices zenſizenſicæ.

Sequitur figura exempli prior.



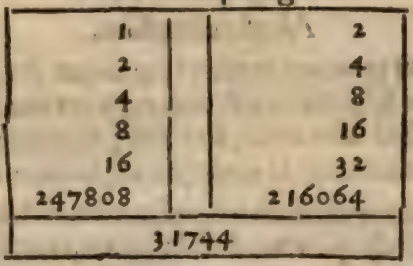
Sequitur figura exempli posterior.

Numeri exempli sunt, 3. 4. 8. 12.

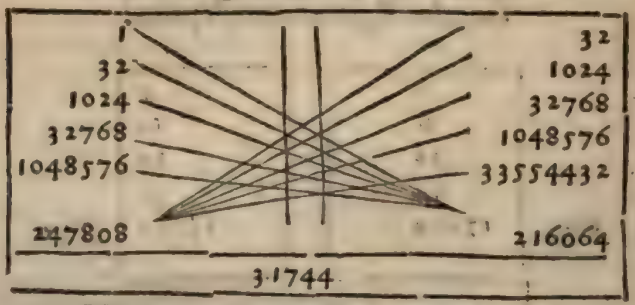
Aliud exemplum locupletatæ regulæ Falsi.

¶ Quærantur quinq; numeri sub proportione dupla, quorũ multiplicatio inter se faciat, 248832.]

Prior exempli figura.



Sequitur figura exempli posterior.



Numeri exempli sunt, 3. 6. 12. 24. 48.

Vides autem ut in hoc exemplo recipiantur surdesolida numerorum

rorum, in priore figura receptorũ. Et radices surdesolidæ quotientum inuentorum, dant numeros exempli præsentis.

Et sic de alijs exemplis in infinitum, quemadmodum infinitas regulas esse intelligimus, ea ratione, qua Christophorus posuit quatuor regulas Algebræ: secundum quas Frisius ille nobis sua mirifica hac adauctione, regulam Falsi dilatauit (ut uides) in immensum.

Hæc modò, pro instituto compendio, de regula Falsi, dicta, ad Petrej requisitionem, sufficiant, donec alia dedero.

De regula Alligationis.

POst regulam Falsi in precio est regula Alligationis, cuius usus solummodo circa numeros cõtractos uersatur. Quæ qualis sit, paucis exemplis abunde satis potest ostendi. Videamus igitur unum aut alterum de ea regula exemplum.

Primum exemplum de regula Alligationis.

VHabeo uina duplicis ualoris. Vna mensura uilioris uini ualet 6 dena. Alterius uero uini mensura una ualet 13 denariolis. Volo aũt habere mensuram unam commixtam ex utroq; uino ualentem 8 denariolis.

Quæstio iam est.

Quantum est recipiendum de utroq; uino?

Regula est, ut primo ponas numeros alligãdos, uno ordine. Deinde ponas illum, ad quẽ fit allegatio, seorsum, ut hic uides.

6. 13. Numeri alligandi.

8. Numerus ad quem fit alligatio.

Numeris autem dispositis modo hoc, differentiæ, inter illum ad quem fit alligatio, & numeros alligandos, recipiuntur, & collocantur permutatim, ut hic uides.

Operatio talis uocatur alligatio.

6		13	Numeri alligandi.
	8		Numerus ad quem fit &c.
5		2	Differentiæ.

Et reliqua perficiuntur per regulam De tri, eo modo quo societates & diuisiones pecuniarum inter socios: scilicet ex aggregatione differentiarum fit diuisor communis, & ex ipsis differentijs separatim positis, fiunt termini secundi, seu multiplicantes &c. sicut hic uides.

	5			$\frac{5}{7}$
7		1	facit	
	2			$\frac{2}{7}$

Hoc est, 7 mensuræ de utroq; uino cõmixtæ, recipiunt 5 mensuras de uino uiliori. Ergo una mensura de utroq; uino commixta, recipit $\frac{5}{7}$ unius mensuræ de uino uiliori.

Item 7 mensuræ commixtæ ex utroq; uino, recipiunt duas mensuras de uino precioſiori. Ergo 1 mensura de utroq; uino ſic commixta, continet $\frac{2}{7}$ unius mensuræ de uino precioſiori.

Probo ſic.

Vna mensura de uiliori uino, facit 6 §. Ergo $\frac{5}{7}$ mensuræ de eodem uino, faciunt $4\frac{2}{7}$ §. Item 1 mensura de uino precioſiori facit 13 §: ergo $\frac{2}{7}$ mensuræ de eodem uino faciunt $3\frac{5}{7}$ §. Faciunt autem (ut probationem uideas) $4\frac{2}{7}$ § & $3\frac{5}{7}$ §, denariolos 8.

Exemplum de triplici uino.

De triplici uino, uolo commiſcere 1 mensuram ualentem 7 §. Primi uini ualet una mensura 4 §. Secundi uini mensura 1 ualet 6 §. Tertij uini 1 mensura ualet 9 §.

Sic ſtat exemplum ad alligationem.

4	6		9	Numeri alligandi.
		7		Numerus ad quem &c.
2	2		1	Differentiæ.
		3		

Sic ſtat ad regulam De tri.

	2			$\frac{1}{3}$
8	2	1	facit	$\frac{1}{4}$
	4			$\frac{1}{2}$

Sic

Sic ſtat ad probationem.

	4	¼		1℔
1	6	⅙	facit	1½℔
	9	½		4½℔

Et ſic de aliȝs regulæ Alligationis operationibus & exemplis, ex iȝs quæ iam ſunt dicta, facile iudicabis. De aliȝs regulis (uidelicet Aequalitatis, Augmenti, Decrementi &c.) uidebis mentionem fieri in Algebra mea.

De regula quadam Hieronymi Cardani.

PONit Hieron. Cardanus regulam quandam, de combinationum modis, rerum quarumcunq; poſitarum, quæ mihi admodum uidetur eſſe iucunda: eamq; uideo eſſe utilem pro iȝs regulis, quas libro primo docui, de inuentione partium aliquotarum, quorumcunq; numerorum. Volo igitur de ea re exemplum ponere pro regula illa.

[Poſitis numeris his quatuor, 2. 3. 5. 7. uolo breuiſſimo compendio inuenire numerum numerorum producendorum ex multiplicatione eorum inter ſe. Hoc eſt, quoties poſſit fieri multiplicatio, nouum numerum producens.]

Regula.

Pone progreſſionem Geometricam duplæ proportionalitatis, incipientem ab unitate, habentem terminos quatuor (eò quòd exemplum poſitum habeat terminos quatuor) & quot unitates fecerint termini progreſſionis illius, redacti in unam ſummam, demptis unitatibus quatuor (eò q̃ progreſſio illa habeat terminos quatuor) tot numeri produci poſſunt ex multiplicatione numerorum horum, 2. 3. 5. 7. inter ſe omnibus modis multiplicatorum, ut ſunt 6. 10. 14. 15. 21. 35. 30. 42. 70. 105. 210. Et hi numeri ſinguli, numerant maximum eorum, id eſt, 210, tanquam partes eius aliquotæ. Vnde ita poteſt exemplum uariari.

[Positis his numeris quatuor, 2. 3. 5. 7. ꝓductóq; maximo numero ꝓueniente ex multiplicatiõe eorũ inter se (qui est 210) uolo compendiose inuenire numerũ partium eius aliquotarũ.]

Regula.

Quot unitates progressio habet geometrica hæc 1. 2. 4, 8. tot habet numerus iste 210, partes aliquotas.

Habet autem progressio hæc, 1. 2. 4. 8. quindecim unitates. Vnde tot partes aliquotas etiam habet numerus iste 210, uidelicet 1. 2. 3. 5. 7. 6. 10. 14. 15. 21. 35. 30. 42. 70. 105.

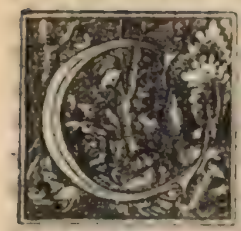
Sic numerus iste, 2310. compositus ex incompositis numeris istis 2. 3. 5. 7. 11. habet partes aliquotas triginta unam, sicut progressio hæc 1. 2. 4. 8. 16. habet triginta unam unitates.

Et sic de alijs.

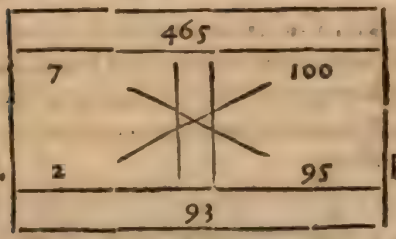
Et ut finiam tandem appendicem hunc, dico esse impossibile, ut Arithmetica talis scribi possit ab homine, quæ omnes huiusmodi regulas & speculationes contineat, ita ut nihil amplius arti illi aliquid egregij superaddi possit.

FINIS.

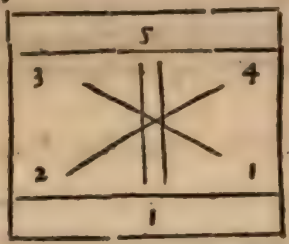
DOCTISSIMO ET HVMANISSIMO uiro domino Iacobo Milichio Medicinæ doctori, suo patrono obseruando, Michael Stifelius salutem dicit.



Credo te credere, uir humanissime, quòd nemini mortaliũ magis gratificari studuerim meo hoc labore, quàm tibi. Satis hoc testatur liber magnus ille, qui occasionem præbuit, ut ista mea Arithmetica tandem æderetur. Illum enim tui gratia scripseram, te neq; iubente neq; rogante, sed sponte mea, quatenus tibi diligentiam meam testatam facerem: qua ex paucis Arithmeticæ præceptis, quæ à te acceperam, tantam potuerim (Deo sic dante) copiam exprimere. Videre enim potes, quãta copia illam unicam regulam tuam de inuentione digitorum, sub extractione radicum cubicarum, adauxerim in lib. primo, cum præter eam nihil haberem, quo iuuari possem ad inuenien das radicum surdesolidarum & bsurdesolidarum extractiones. Videbam quidem Apianum ista scire, sed ille prorsus nihil do cebat de ea re, nisi q̃ puncta signanda significabat. Quid uero nunc promouerim hoc libro secundo, tuo iudicio committo decernendum. Cum autem scriptus fuisset liber ille, cuius iam paulo superius memini, & nihil interim minus cogitarẽ, quàm ut huiusmodi studia mea aliquando proditura essent in lucem, accidit forte, ut dominus doctor Iustus Ionas ad me quadam nocte declinaret in hospitium, uir uidelicet, cuius ego comitatẽ & facilitatem erga inferiores se, satis mirari nequeam, & ego ei (cum hilaris essem super tanto hospite) proderem illum librũ, promisit se operam daturum quatenus typis excusus æderetur, quòd uideret eum esse refertum tam uarijs Algorithmis, bona copia exemplorũ probatis. Id quod ipse postea præstitit egregia sedulitate ac fide. Vnde sicut causam præcipuam & primã,



Postea uidens successum se habuisse talem à dextris, uertit se, ut idem experiretur etiam à sinistris. Recepit ergo 3 & 4. id est, numeros quos sciebat allaturos esse falsitates deficiētes utrinq;. Per eos itaq; quæsiuit quinarium producere, sicut prius: & inuenit hanc figuram.



Scilicet 1 de 2 subtracta, relinquit diuisorem 1: & 2 in 4 multiplicata, producunt 8: & 1 in 3, manent 3. Itaq; 3 de 8, relinquūt 5 diuidenda per diuisorem 1. Et sic de alijs.

Post tantos successus in quæstionibus iudicris prædictis, cœpit autor negotium illarum operationum transferre ad obscuras quæstiones, numerorum abstractorum & contractorum. Sentiens igitur immensam latitudinē negocij illius, magnifice lætabatur, reputans se reperisse thesaurum artis incomparabilem. Eas igitur operationes redegit ad regulam, ut sequitur.

Textus regulæ Falsi.

REcipe duos numeros ad placitum, paruos uel magnos, & utrunq; eorum examina, iuxta exempli propositi pronunciationem, ut uideas quanto uterq; eorum fallat, quo minus

hoc

hoc exeat quod quæritur. Obseruabis aũt semper & ubiq; utrũ differentia fallens, seu falsitas, plus sit, uel minus eo quod inquritur. Nam si utrobiq; prouenerit aut minus, aut plus, tunc fit subtractio, & nulla additio. Si autem ex uno numero prouenit plus, & ex altero numero prouenit minus, tunc fit additio, & nulla fit subtractio. Fit autem additio prima (aut subtractio) inter falsitates: scilicet aut una additur alteri, aut una subtrahitur ab altera. Deinde fit multiplicatio in cruce, multiplicante una falsitatum, numerũ positum alterius falsitatis. Quo facto, sequitur additio secunda (aut subtractio) uidelicet productũ unum additur ad alterum, aut subtrahitur ab altero producto, iuxta præcedentia regulæ uerba. Et sic tandem fit diuisio, qua uel aggregatum productorum, uel relictum eorum, diuiditur, uel per aggregatum falsitatum, uel per relictum earum.

nota q̃ acceptis numeris ad libitũ si sunt plus uel minus ꝛc. tunc fit additio et non subtractio

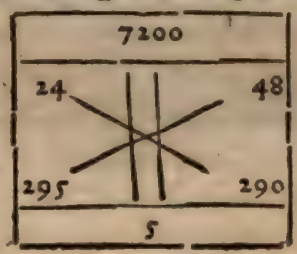
Sequuntur nunc regulæ illius exempla aliqua.

Primum.

[Quæratur numerus, à cuius dimidio, subtractæ partes tertia & quarta, relinquant 300.]

Recipio primo 24, qui numerus ideo mihi hoc loco placet, quòd dimidium eius habet partes in pronunciatione nominatas, id est, tertiam & quartam partes, sine fractione aliqua. Laborioſior atq; magis tædiosa est operatio per fracta, quàm per integra, ideo fracta deuito ubi deuitari possunt.

Secundo recipio duplum prioris numeri, id est 48, sic enim expeditius operor: unde figura exempli huius sic stabit.



Primo

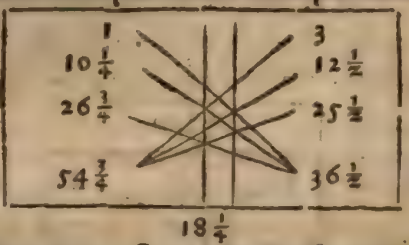
Primo examino primum numerum receptum, id est, 24. cuius dimidiū est 12, de quo pars tertia est 4, & pars quarta est 3. Eas partes aggregatas (id est, 7) subtraho de 12, remanent 5, quæ deberent esse (iuxta pronunciationem exempli) 300. Fallit ergo numerus receptus per 295, & est minus.

Secundo examino alterum receptum numerum, id est, 48. Huius dimidium est 24. Dimidij illius partes tertia & quarta, faciunt 14, quæ subtractæ de 24, relinquunt 10, quæ deberent esse 300. Itaq; numerus ille receptus, fallit per 290, & est etiam minus. Quare subtraho 290 de 295, relinquuntur 5. i. diuisor. Deinde multiplico in cruce, uidelicet 290 in 24, & fiunt 6960: & 295 multiplico in 48, fiuntq; 14160. Subtraho igitur 6960 de 14160, & remanent 7200 diuidenda per 5. Itaq; 1440 est numerus uerus quem quærebam. Nam eius dimidium facit 720, cuius partes tertia & quarta simul faciunt 420, quæ ambæ de 720 subtractæ, relinquunt 300. Et sic ueritas prouenit, & nulla falsitas, hoc loco.

Secundum exemplum.

¶ Quærantur tres numeri, quorum primus additus ad 73, faciat duplum duorum reliquorum. Secundus, cum 73, faciat triplum duorum reliquorum. Tertius sumptus cum 73, faciat quadruplum duorum reliquorum.]

Sic stant duæ positiones exempli huius.



Satis hic uides, ut $18\frac{1}{4}$ sit unicus diuisor communis: & ut $54\frac{3}{4}$ atq; $36\frac{1}{2}$, sint duo numeri multiplicantes communes, cum sint duæ falsitates. Cum autem ambæ falsitates sint plus, fit ut

diuisor

diuisor communis, nascatur ex subtractione unius ab altera.

Primo autem multiplicatur 1 per $36\frac{1}{2}$, & nihil mutatur de multiplicante, ut notum est. Multiplicantur etiam 3 per $54\frac{3}{4}$, & fiunt $164\frac{1}{4}$. Subtraho igitur $36\frac{1}{2}$ de $164\frac{1}{4}$, & remanent $127\frac{1}{4}$. Relictum hoc diuiditur per diuisorem communem, tunc producitur numerus primus exempli huius, qui est 7.

Secundo multiplicantur $10\frac{1}{4}$ per $36\frac{1}{2}$, fiuntq; $374\frac{1}{8}$. Et $12\frac{1}{2}$ multiplicantur per $54\frac{3}{4}$, & fiunt $684\frac{3}{8}$. Subtraho igitur $374\frac{1}{8}$ de $684\frac{3}{8}$, & remanent $310\frac{1}{4}$. Relictum hoc diuiditur per diuisorem communem, id est, per $18\frac{1}{4}$, tunc producitur numerus exempli secundus, qui est 17.

Tertio multiplicantur $26\frac{1}{4}$ per $36\frac{1}{2}$, fiuntq; $976\frac{3}{8}$. Et $25\frac{1}{2}$ multiplicantur per $54\frac{3}{4}$, fiuntq; $1396\frac{1}{8}$. Subtraho igitur $976\frac{3}{8}$ de $1396\frac{1}{8}$, tunc remanēt $419\frac{1}{4}$. Relictum hoc diuiditur per communem diuisorem, id est, per $18\frac{1}{4}$, tunc producitur numerus exempli tertius, qui est 23.

Primus numerus exempli	7.
Secundus numerus exempli	17.
Tertius numerus exempli	23.

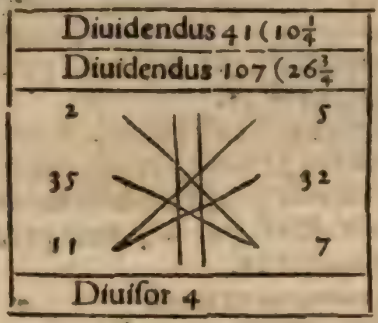
De positionibus exempli duabus superioribus.

Opus est quàm maxime, ut rationem positionum duarum, exempli præsentis, superius positarum, reddam. Habet autem quodlibet exemplum regulæ Falsi duas positiões regulariter, ut satis uides ex ipso textu regulæ, atq; ex operationibus exemplorum. Operationes autem quæ fiunt per unam positionem, magis fiunt per regulam De tri (formatis arte diuisore & multiplicante) quàm per regulam Falsi. Sed uideamus positiones.

Pro priore positione, placuit primo ponere unitatem, eò q; faciat cum 73 (quem numerū exprimit pronunciatio exempli) numerum parem, cuius subduplus sit numerus integer. Quanq; enim fracta non possint ubiq; uitari, tamen uito eas, ubi sine labore eas uitare possum. Dicit autem pronunciatio exempli, q;

primus numerus debeat cum 73 facere, duplum duorum reliquorum. Itaq; cum 73 & 1 faciant 74, facient (iuxta hæc) duo reliqui 37, id est, dimidium de 74.

Itaq; (iuxta pronunciationem exempli) oportet ut diuidantur 37 in duas partes, quarum prior sumpta cum 73, faciat triplum partis alterius, sumptæ cum unitate. Et sic exemplum nostrum iam præsupponit aliud exemplum partiale, cuius ambæ positiones sic ponuntur.



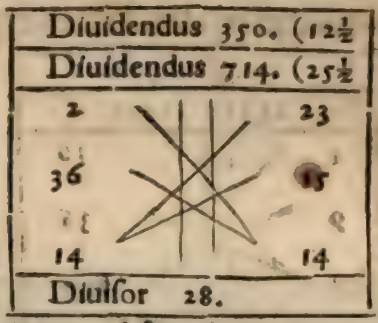
Recepi autem primo 2, eò q; 2 addita ad 73, faciant numerum numerabilem à ternario: & eadem ratione postea recepi 5 &c.

De secunda positione exempli totalis, quæ habet hos tres numeros: 3. 12½. 25½.

Quo consilio autem receperim 3, satis patet ex declaratione primæ positionis, quæ habuit hos numeros 1. 10¼. 26¼. Recepi inquam primo 3, quæ addita ad 73, faciunt 76. cuius pars dimidia facit 38, summam duorum reliquorum, iuxta pronunciationem eiusdem exempli totalis.

Itaq; iuxta pronunciationem eiusdem exempli totalis, oportebit ut diuidantur 38 in duas partes, quarum prior sumpta cum 73, faciat triplum alterius partis, sumptæ cum ternario. Et hoc est iam secundum exemplum partiale, quod exemplum totale præsupponit, cuius ambæ positiones sic figurari possunt.

Diui-

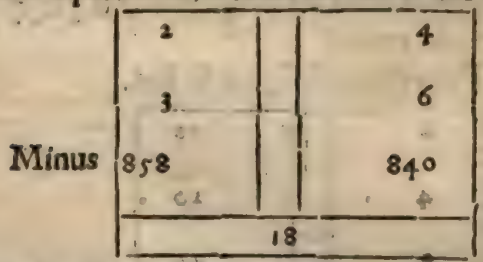


Inuenti quotientes $12\frac{1}{2}$ & $25\frac{1}{2}$, reponuntur ad positionem secundam exempli totalis superius positi. Cætera satis patent ex superioribus.

Sequuntur exempla locupletatæ regulæ Falsi, per Gemmam Frisium: & est inuentum ualde egregium.

QVærantur duo numeri sub proportione sesquialtera, quorum multiplicatio inter se faciat 864.]

Prima pars regulæ locupletatæ est, ut quæras falsitates iuxta regulam superiorem, ut uides factum in hac figura.

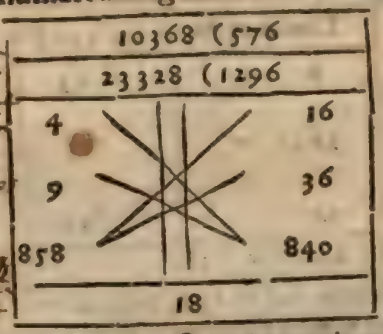


Scilicet 2 in 3 faciunt 6, quæ deberent esse 864; deficiunt ergo 858, &c.

Secunda pars regulæ est, ut (propter multiplicationem numerorum inter se factam) pro receptis numeris, ponantur receptorum numerorum quadrata, manentibus falsitatibus prioribus, cum diuisore ex eis facto, iuxta priorem partem regulæ:

Nota ad inueniendos numeros per uidlz. 10368 et 23328. in quibus in primis
ruptis numeris eos multiplicare inter se et uidere an aliquis numerus fuerit
ibi uel ne et cū numeri inuenti sint 2. et 3. qui iusta in se faciunt solū
6. cū debeant facere 864. item

desint 858. et sic sicuti figura
que ostendit debes & tunc stabunt numeri ad regulam Falsi sic dispositi.



falsitatē signare cū signo minꝰ
deinde quadra numerum priorem
uidlz. 2. item 8. in duo faciunt
4. et etiā hoc 2 in secundū numerū
scz. 3. duo in eum faciunt 6. se-
cundū quadra 4. qui faciunt 16.
et etiā quadra 3. qui faciunt 9. post
numeros Cosa ualent
Minus
quę figura et cū in superiorē fi-
guram dixisti. 4. et 0. coꝛ. atoꝫ unius
sub alio summa eoꝝ faciunt 4. et
6. 10. et etiā desimunt
per 840. quę numerū signa in signo
minꝰ quū subtraxeris a
858 remanebit 18.
qui diuisor communis
erit ipsis igit̃ termi-
tis ad inueniendū nu-
merū debitū iuxta
petitionē propositā oꝝ debes multiplicare 9.
ipsum per 4. efficiet 36
domine ipsum 36 in se faciet 1296. in quem nu-
merum 8. ipsius et faciet
10368 deinde quadra cubico
ipsum 9. nā 9. in 9. faciunt 81.
et 9 in 1. faciunt 9. et 9 in 8 faciunt
72 quos coniuge faciunt 729 deinde
duc 4 in 729 faciunt 2916.
postea duc 8. diuisoris in ipsum et
efficiet 23328 et erit numerus
secundus qui satisfacit
uero quotientes quesiti indeniez si
in subtractis 10368 a 23328
remanebit 1296 qui erit unus
eius deinde duc 36. in 16 et fa-
ciet 576 qui erit numerus iustus et sine ullo radicē ab unoquoq; illoꝝ
ex uno quadratis 36 et ex alio 24. qui erunt numeri quesiti quia
ita sit quoniam multiplicata 24 in 36. et faciūt numerum petitum nam
faciunt 864.

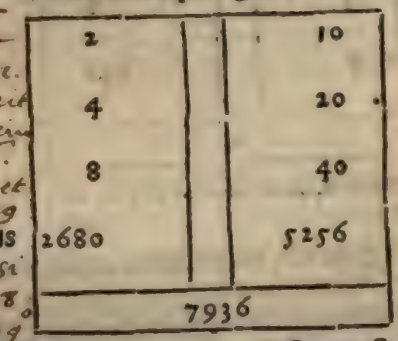
Tertia igitur pars regulæ est, ut inuentis quotientibus, extrahas radicem, uel quadratum (ut hic, ubi multiplicatio inter se duorum numerorum solummodo fit) uel cubicam, ubi multiplicatio trium numerorum fit inter se &c. Vnde cum quotientes, hoc loco, sint 576 & 1296, erunt numeri exempli 24 & 36.

Probatur. Nam ex horum multiplicatione inter se, fiunt 864. iuxta exempli pronunciationem.

Aliud exemplum.

[Quærantur tres numeri sub proportione dupla, qui inter se multiplicati, faciant 2744.]

Prior exempli figura sic stat.

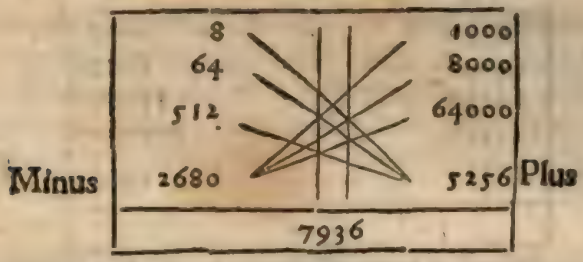


Plus

Minus

Posterior uero exempli figura sic stat.

in 2ª figura accipias tres numeros 2. 4. 8 qui debent facere 24. nō
faciunt nisi 14 ergo itaq; desunt 64. ab altis uel numeris sunt 10. 20. 40
qui faciunt 70 qui [illegible]



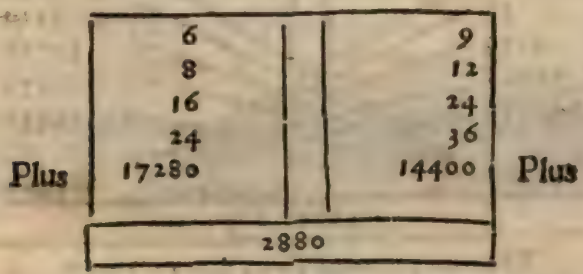
Vides ut hic pro receptis numeris ad positiones, recipiantur cubi eorum. Deinde ex quotientibus inuentis extrahuntur radices cubicæ. Et hæc sic fiunt, quod numeri tres inter se multiplicantur, iuxta exempli pronunciationem. Numeri sunt, 7. 14. 28.

Aliud exemplum.

¶ Quærantur quatuor numeri, quorum duo minores sint sub proportione sesquitertia: & duo maiores sint sub proportione sesquialtera. Duo uero medij sint sub proportione dupla. Et illi quatuor numeri inter se multiplicati, faciant 1152.

Hic pro numeris receptis ad positiones, uidebis recipi eorū zenſizenſos. Et de quotientibus inuentis, extrahentur radices zenſizenſicæ.

Sequitur figura exempli prior.



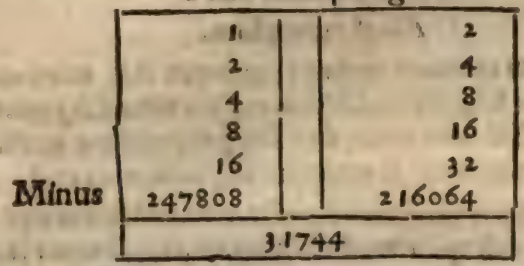
Sequitur figura exempli posterior.

Numeri exempli sunt, 3. 4. 8. 12.

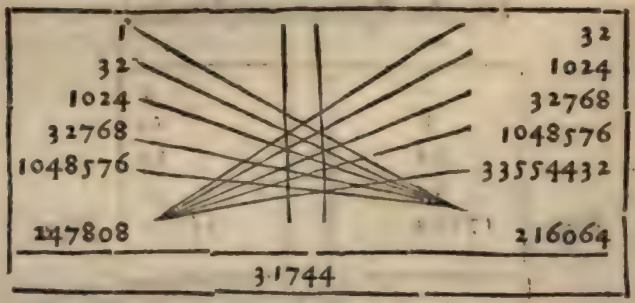
Aliud exemplum locupletatæ regulæ Falsi.

¶ Quærantur quinq; numeri sub proportione dupla, quorũ multiplicatio inter se faciat, 248832.]

Prior exempli figura.



Sequitur figura exempli posterior.



Numeri exempli sunt, 3. 6. 12. 24. 48.

Vides autem ut in hoc exemplo recipiantur surdesolida numerorum

rorum, in priore figura receptorũ. Et radices surdesolidæ quotientum inuentorum, dant numeros exempli præsentis.

Et sic de alijs exemplis in infinitum, quemadmodum infinitas regulas esse intelligimus, ea ratione, qua Christophorus posuit quatuor regulas Algebræ: secundum quas Frisius ille nobis sua mirifica hac adauctione, regulam Falsi dilatauit (ut uides) in immensum.

Hæc modò, pro instituto compendio, de regula Falsi, dicta, ad Petreij requisitionem, sufficiant, donec alia dedero.

De regula Alligationis.

POst regulam Falsi in precio est regula Alligationis, cuius usus solummodo circa numeros cõtractos uersatur. Quæ qualis sit, paucis exemplis abunde satis potest ostendi. Videamus igitur unum aut alterum de ea regula exemplum.

Primum exemplum de regula Alligationis.

VHabeo uina duplicis ualoris. Vna mensura uilioris uini ualet 6 dena. Alterius uero uini mensura una ualet 13 denariolis. Volo aũt habere mensuram unam commixtam ex utroq; uino ualentem 8 denariolis.

Quæstio iam est.

Quantum est recipiendum de utroq; uino?

Regula est, ut primo ponas numeros alligãdos, uno ordine. Deinde ponas illum, ad quẽ fit allegatio, seorsum, ut hic uides.

6. 13. Numeri alligandi.

8. Numerus ad quem fit alligatio.

Numeris autem dispositis modo hoc, differentiæ, inter illum ad quem fit alligatio, & numeros alligandos, recipiuntur, & col locantur permutatim, ut hic uides.

Operatio talis uocatur alligatio.

6		13 Numeri alligandi.
	8	Numerus ad quem fit &c.
5		2 Differentiæ.

Et reliqua perficiuntur per regulam De tri, eo modo quo societates & diuisiones pecuniarum inter socios: scilicet ex aggregatione differentiarum fit diuisor communis, & ex ipsis differentijs separatim positis, fiunt termini secundi, seu multiplicantes &c. sicut hic uides.

	5			$\frac{5}{7}$
7		1	facit	
	2			$\frac{2}{7}$

Hoc est, 7 mensuræ de utroq; uino cõmixtæ, recipiunt 5 mensuras de uino uiliori. Ergo una mensura de utroq; uino commixta, recipit $\frac{5}{7}$ unius mensuræ de uino uiliori.

Item 7 mensuræ commixtæ ex utroq; uino, recipiunt duas mensuras de uino precioſiori. Ergo 1 mensura de utroq; uino ſic commixta, continet $\frac{2}{7}$ unius mensuræ de uino precioſiori.

Probo ſic.

Vna mensura de uiliori uino, facit 6 §. Ergo $\frac{5}{7}$ mensuræ de eodem uino, faciunt $4\frac{2}{7}$ §. Item 1 mensura de uino precioſiori facit 13 §: ergo $\frac{2}{7}$ mensu. de eodem uino faciunt $3\frac{5}{7}$ §. Faciunt autem (ut probationem uideas) $4\frac{2}{7}$ § & $3\frac{5}{7}$ §, denariolos 8.

Exemplum de triplici uino.

De triplici uino, uolo commiſcere 1 mensuram ualentem 7 §. Primi uini ualet una mensura 4 §. Secundi uini mensura 1 ualet 6 §. Tertij uini 1 mensu. ualet 9 §.

Sic ſtat exemplum ad alligationem.

4 6			9	Numeri alligandi.
		7		Numerus ad quem &c.
2 2			1	Differentiæ.
		3		

Sic ſtat ad regulam De tri.

	2			$\frac{1}{4}$
8	2	1	facit	$\frac{1}{4}$
	4			$\frac{1}{2}$

Sic

Sic ſtat ad probationem.

	4	$\frac{1}{2}$		1 ℛ
1	6	$\frac{1}{4}$	facit	$1\frac{1}{2}$ ℛ
	9	$\frac{1}{2}$		$4\frac{1}{2}$ ℛ

Et ſic de aliꝭ regulæ Alligationis operationibus & exemplis, ex iꝭs quæ iam ſunt dicta, facile iudicabis. De aliꝭ regulis (uidelicet Aequalitatis, Augmenti, Decrementi &c.) uidebis mentionem fieri in Algebra mea.

De regula quadam Hieronymi Cardani.

PONit Hieron. Cardanus regulam quandam, de combinationum modis, rerum quarumcunq; poſitarum, quæ mihi admodum uidetur eſſe iucunda: eamq; uideo eſſe utilem pro iꝭ regulis, quas libro primo docui, de inuentione partium aliquotarum, quorumcunq; numerorum. Volo igitur de ea re exemplum ponere pro regula illa.

[Poſitis numeris his quatuor, 2. 3. 5. 7. uolo breuiſſimo compendio inuenire numerum numerorum producendorum ex multiplicatione eorum inter ſe. Hoc eſt, quoties poſſit fieri multiplicatio, nouum numerum producens.]

Regula.

Pone progreſſionem Geometricam duplæ proportionalitatis, incipientem ab unitate, habentem terminos quatuor (eò quòd exemplum poſitum habeat terminos quatuor) & quot unitates fecerint termini progreſſionis illius, redacti in unam ſummam, demptis unitatibus quatuor (eò q̃ progreſſio illa habeat terminos quatuor) tot numeri produci poſſunt ex multiplicatione numerorum horum, 2. 3. 5. 7. inter ſe omnibus modis multiplicatorum, ut ſunt 6. 10. 14. 15. 21. 35. 30. 42. 70. 105. 210. Et hi numeri ſinguli, numerant maximum eorum, id eſt, 210, tanquam partes eius aliquotæ. Vnde ita poteſt exemplum uariari.

¶ Positis his numeris quatuor, 2. 3. 5. 7, ꝓductoq; maximo numero ꝓueniente ex multiplicatiõe eorũ inter se (qui est 210) uolo compendiose inuenire numerũ partium eius aliquotarũ.]

Regula.

Quot unitates progressio habet geometrica hæc 1. 2. 4, 8, tot habet numerus iste 210, partes aliquotas.

Habet autem progressio hæc, 1. 2. 4. 8. quindecim unitates. Vnde tot partes aliquotas etiam habet numerus iste 210, uidelicet 1. 2. 3. 5. 7. 6. 10. 14. 15. 21. 35. 30. 42. 70. 105.

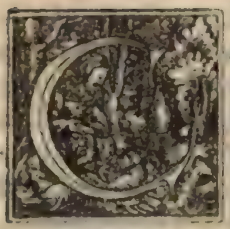
Sic numerus iste, 2310. compositus ex incompositis numeris istis 2. 3. 5. 7. 11. habet partes aliquotas triginta unam, sicut progressio hæc 1. 2. 4. 8. 16. habet triginta unam unitates.

Et sic de alijs.

Et ut finiam tandem appendicem hunc, dico esse impossibile, ut Arithmetica talis scribi possit ab homine, quæ omnes huiusmodi regulas & speculationes contineat, ita ut nihil amplius arti illi aliquid egregij superaddi possit.

FINIS.

DOCTISSIMO ET HVMANISSIMO uiro domino Iacobo Milichio Medicinæ doctori, suo patrono obseruando, Michael Stifelius salutem dicit.



Credo te credere, uir humanissime, quòd nemini mortaliũ magis gratificari studuerim meo hoc labore, quàm tibi. Satis hoc testatur liber magnus ille, qui occasionem præbuit, ut ista mea Arithmetica tandem æderetur. Illum enim tui gratia scripseram, te neq; iubente neq; rogante, sed sponte mea, quatenus tibi diligentiam meam testatam facerem: qua ex paucis Arithmeticæ præceptis, quæ à te acceperam, tantam potuerim (Deo sic dante) copiam exprimere. Videre enim potes, quãta copia illam unicam regu'am tuam de inuentione digitorum, sub extractione radicum cubicarum, adauxerim in lib. primo, cum præter eam nihil haberem, quo iuuari possem ad inuenien das radicum surdesolidarum & bsurdesolidarum extractiones. Videbam quidem Apianum ista scire, sed ille prorsus nihil docebat de ea re, nisi q; puncta signanda signficabat. Quid uero nunc promouerim hoc libro secundo, tuo iudicio committo decernendum. Cum autem scriptus fuisset liber ille, cuius iam paulo superius memini, & nihil interim minus cogitarẽ, quàm ut huiusmodi studia mea aliquando proditura essent in lucem, accidit forte, ut dominus doctor Iustus Ionas ad me quadam nocte declinaret in hospitium, uir uidelicet, cuius ego comitatẽ & facilitatem erga inferiores se, satis mirari nequeam, & ego ei (cum hilaris essem super tanto hospite) proderem illum librũ, promisit se operam daturum quatenus typis excusus æderetur, quòd uideret eum esse refertum tam uarijs Algorithmis, bona copia exemplorũ probatis. Id quod ipse postea præstitit egregia sedulitate ac fide. Vnde sicut causam præcipuam & primã,

quòd ſcripta ſit Arithmetica hæc à me, in te reiicio: ita cauſam quòd typis ſit ædita, reiicio in præfatum dominum Doctorem, qui tunc erat epiſcopus meus. Et cum poſtea opus à Typographis differretur, adeò, ut & ego nihil amplius illud curarem, contentus quòd à Bibliopola quodam, pecuniam mihi pro labore meo promiſſam recepiſſem: accidit uxorem meam aduerſa ualetudine conflictari adeò miſere, ut ad fletum plerunq; commoueret uicinas, quæ eam compaſſionis ſtudio frequentabant. Quam cum ope ſua Chriſtus per pharmaca & conſilia tua reſtituiſſet, & ego debita facere pararem, reſiſtebas, aſſeuerans exiguum officium te mihi præſtitiſſe. Cum autem non perſuaderer, ut exiguum ducerem, curaſſe uxorem cõmodam, fidelem, & in aduerſis conſtantia probatam, cœpi denuo me conferre ad priorem rationẽ gratificandi tibi per Arithmeticã. Illis igitur, qui neq; eam nolebant, neq; uolebant excudere, promiſi me locupletaturum, ut uel ſic detentam tamdiu, de manibus eorum eriperem, quatenus per hanc occaſionem alij cuidam Typographo exhiberetur, qui huiuſmodi artium ſtudia diligentius curaret. Tandem ita ſucceſſit, ut pro uoto talem inuenirem, qui de peregrinis characteribus nihil (ut alij) conquereretur, ſed par negotio, & uellet & poſſet. Et ſic librum ſecundum tandem confidenter adauxi, decimo Euclidis, ut non fruſtrà ad me, & à me ad Petreium, redierit exemplar à captiuitate ſua. Vale feliciter.

MICHAELIS STIFELII ARITHMETICÆ

LIBER SECVNDVS, DE NVmeris irrationalibus.

De essentia numerorum irrationalium. Caput I.

MERITO disputatur de numeris irrationalibus, an ueri sint numeri, an ficti. Quia enim in Geometricis figuris probandis, ubi nos rationales numeri destituunt, irrationales succedūt, probantq; præcise ea, quæ rationales numeri probare non poterant, certe ex demonstrationibus quas nobis exhibent: mouemur & cogimur fateri, eos uere esse, uidelicet ex effectibus eorum, quos sentimus esse reales, certos, atq; constantes.

At alia mouent nos ad diuersam assertionem, ut uidelicet cogamur negare, numeros irrationales esse numeros. Scilicet, ubi eos tentauerimus numerationi subijcere, atq; numeris rationalibus proportionari, inuenimus eos fugere perpetuo, ita ut nullus eorum in seipso præcise apprehendi possit: id quod in resolutiōibus eorū sentimus, ut inferius forte suo loco ostendā. Non autē potest dici numerus uerus, qui talis est ut præcisione careat, & ad numeros ueros nullam cognitam habeat proportionem. Sicut igitur infinitus numerus, nō est numerus: sic irrationalis numerus non est uerus numerus, q̄ lateat sub quadam infinitatis nebula. Sitq; non minus incerta proportio numeri irrationalis ad rationalem numerum, quàm infiniti ad finitum.

Deinde, si numeri irrationales essent numeri ueri, tunc aut essent integri, aut essent fracti. Fractos autem numeros (ut stet distinctio debita) uoco eos, qui constant numeratore & denominatore

minatore, ita ut inter duos aliquos numeros integros & immediatos cadant: ut $8\frac{7}{9}$ seu $\frac{79}{9}$ cadit inter 8 & 9. Neq; enim $\frac{12}{3}$ aut $\frac{12}{4}$ inter fractos numeros recipio, sed inter integros &c̄.

Quòd autem numeri irrationales non sint numeri integri, facile ostenditur. Quilibet enim numerus irrationalis, cadit inter duos aliquos numeros immediatos. Vt $\sqrt{6}$ cadit inter 2 & 3 & $\sqrt{10}$. $\sqrt{11}$. $\sqrt{12}$. $\sqrt{13}$. $\sqrt{14}$. $\sqrt{15}$. cadunt inter 3 & 4. Et sic de alijs. Satis autem constat, ut inter duos numeros integros immediatos, nullus cadat numerus integer, id quod ratio uocabuli manifeste tradit. Ergo nullus numerus irrationalis potest esse numerus integer, cū singuli cadant inter immediatos.

Item nullus numerus irrationalis potest esse numerus fractus. Impossibile enim est, ut ex multiplicatione numeri fracti, in se, fiat numerus integer. Sed numeri irrationales multiplicatione sui in se, faciunt numeros integros: ut $\sqrt{6}$ in se quadrate facit 6, & $\sqrt{c}$ 6 in se cubice facit 6, &c̄. Ergo numeri irrationales non sunt numeri fracti. Antecedens patet. Si enim denominator non numerat numeratorem, multo minus quadratum denominatoris numerabit quadratū numeratoris. Item multo minus cubus denominatoris numerabit cubum numeratoris, ut fiat numerus integer &c. Vnde sicut nullus numerus integer multiplicatione sui in se potest producere numerum fractum, sic nullus numerus fractus multiplicatiōe sui in se potest producere numerum integrum.

Item quilibet numerus fractus, certam habet cognitamq; proportionem ad quemlibet numerū integrum: sed nullus numerus irrationalis habet certam cognitamq; proportionem ad ullum numerū uel integrum uel fractum, ut paulo superius dixi. Ergo numerus irrationalis, sicut nō potest esse numerus integer, sic etiam non potest esse numerus fractus.

Item licet infiniti numeri fracti cadant inter quoslibet duos numeros immediatos, quemadmodum etiam infiniti numeri irrationales cadunt inter quoslibet duos numeros integros immediatos

mediatos. Ex ordinibus tamen utrorumq; facile est uidere, ut nullus eorum ex suo ordine in alterum possit transmigrare. Nihil igitur est, si cogites numerũ aliquem irrationalem posse coincidere cum aliquo numero fracto propter infinitatem fractorum, Sed uideamus ordines quorum mentionem feci.

Ordo fractorum inter 2 & 3.

$2\frac{1}{2}.2\frac{1}{3}.2\frac{2}{3}.2\frac{1}{4}.2\frac{3}{4}.2\frac{1}{5}.2\frac{2}{5}.2\frac{3}{5}.2\frac{4}{5}.2\frac{1}{6}.2\frac{5}{6}.2\frac{1}{7}.2\frac{2}{7}.2\frac{3}{7}.2\frac{4}{7}.2\frac{5}{7}.2\frac{6}{7}$. Et sic deinceps in infinitum.

Ordo medialium cadentium inter 2 & 3.

$\sqrt{\text{ж}}5.\sqrt{\text{ж}}6.\sqrt{\text{ж}}7.\sqrt{\text{ж}}8.\sqrt{\text{ж}}9.\sqrt{\text{ж}}10.\sqrt{\text{ж}}11.\sqrt{\text{ж}}12.\sqrt{\text{ж}}13.\sqrt{\text{ж}}14.\sqrt{\text{ж}}15.\sqrt{\text{ж}}16.\sqrt{\text{ж}}17.\sqrt{\text{ж}}18.\sqrt{\text{ж}}19.\sqrt{\text{ж}}20.\sqrt{\text{ж}}21.\sqrt{\text{ж}}22.\sqrt{\text{ж}}23.\sqrt{\text{ж}}24.\sqrt{\text{ж}}25.\sqrt{\text{ж}}26.\sqrt{\text{ж}\text{ж}}17.\sqrt{\text{ж}\text{ж}}18.\sqrt{\text{ж}\text{ж}}19.\sqrt{\text{ж}\text{ж}}20.\sqrt{\text{ж}\text{ж}}21.\sqrt{\text{ж}\text{ж}}22.\sqrt{\text{ж}\text{ж}}23.\sqrt{\text{ж}\text{ж}}24.\sqrt{\text{ж}\text{ж}}26.$ Et sic deinceps in infinitum.

Non te moueat in ordinibus illis, quòd nulla seruatur uel proportionalitatum uel progressionum lex. Res ordines sic postulant.

Quid Euclides senserit de numeris irrationalibus. Cap. II.

PLANE negat Euclides, propositione quinta sui decimi, numeros irrationales esse numeros. Omnium, inquit, duarum quantitatum communicantium est proportio tanquã numeri ad numerum. Sequitur certe, proportionẽ duarum quantitatum nõ communicantium, non esse tanquam numeri ad numerum. Vt sicut proportio $\sqrt{\text{ж}}24$ ad $\sqrt{\text{ж}}6$, est proportio tanquam numeri ad numerum, uidelicet tanquam 4 ad 2: sic proportio $\sqrt{\text{ж}}24$ ad $\sqrt{\text{ж}}8$, est proportio, tanquam non numeri ad numerum, uidelicet tanquam $\sqrt{\text{ж}}12$ ad 2. Sic $\sqrt{\text{ж}}8$ ad $\sqrt{\text{ж}}24$ est proportio tanquam numeri ad non numerum, uidelicet tanquam

quam 2 ad √8 12. Satis igitur patet, Euclidem negare numeros irrationales esse numeros. Hinc Campanus, qui Euclidem intellexit, asseruit propositionem undecimam secundi libri Euclidis, non posse probari per numeros. Doctior autem fuit Campanus, quàm ut ignorauerit undecimã illam posse probari per numeros irrationales: sed negauit hoc quod Euclides negat, uidelicet quòd numeri irrationales sint numeri.

Nec tamen Euclides uoluit eos omnino esse nihil, cum eis pulchre usus sit, tanquam numerorum imaginibus, præsertim in suo decimo, ubi eos sub duplici cõsideratione tractauit, uidelicet in ꝓpositionibus prioribus, tractauit eos tanq; abstractos, nomine quantitatũ: & in reliquis propositionibus libri illius, tractauit eos tanquam contractos, recto uidelicet & pulchro ordine. Quòd enim Euclides uocabulo quantitatis noluerit lineas, superficies, atque corpora generaliter, hoc loco tractare, sed potius abstractos numeros irrationales, quos postea tractaret contractos, uidetur ipse satis indicare, & primo in definitionibus. Aliter enim loquitur de commensurabilitate & incommensurabilitate quantitatum, atq; aliter de cõmensurabilitate & incommensurabilitate linearum, ut studiose significasse uideatur, lineas non comprehendi sub quãtitatis uocabulo, eo loco. Si autem lineas nõ uult comprehendi sub eo nomine, quid tum uolet? Num copora & superficies? At corporum nullam facit mentionem per totum librum decimum. Et ne quidem superficies curat in decimo tractare, nisi quantum ratio dicendorum de lineis ipsum cogit. In cuius rei signum species superficierum irrationalium, data opera, dissimulat, ac negligit adeò, ut ne illas quidem nominare uoluerit. Sic em̃ propositione LXV. dicit: Si duæ superficies coniungantur, quarum altera sit rationalis, altera uero medialis &c̃. Dicere autem poterat, Si fuerit superficies binomialis &c. Et propositione sequenti, cum dicere potuisset, Si fuerit superficies binomialis tertiæ aut sextæ speciei, sic dixit: Cum coniunctæ fuerint duæ superficies mediales

(has

chas solummodo, id est, mediales, ex irrationalibus nominat) incommensurabiles &c. Sic propositione 103 simili dissimulatione noluit nominare residuales superficies primæ & quartæ speciei. Et sequenti propositione noluit nominare superficies residuales secundæ & quintæ speciei, cum tamē de his speciebus ageret. Et similiter propositione 105 noluit nominare superficies residuales tertiæ & sextæ speciei, ut certo scias eum de superficiebus nihil agere uoluisse in decimo, nisi quantum linearum irrationalium expositio hoc exegisset. Sed de his etiam alibi dicam in locis suis.

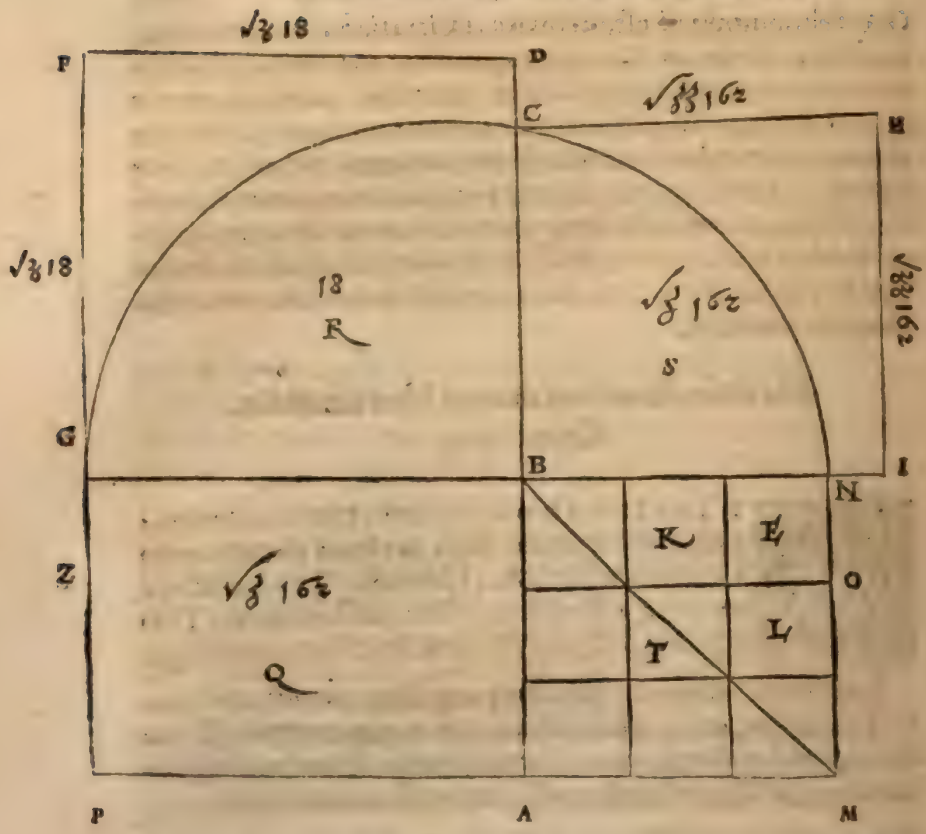
De definitionibus decimi libri Euclidis. Caput III.

AD INTEGRAM tractationem numerorum irrationalium, pertinet liber decimus elementorum Geometriæ Euclidis. Ideo uolo illum huc ad me recipere, suspectamq; illius difficultatem (Deo uolente) purgare, & à definitionibus eius incipe.

In definitionibus autē phrasim propositionum suarum paucis subindicat, easq; nihilominus uice argumenti posuisse uidetur, quòd ordine meminerit quantitatum, linearum, superficierumq;, & à superficiebus ad lineas postea reuersus sit.

Primo meminit quantitatū, dicens: Quantitates quibus fuerit una quantitas eas numerans, cōmensurabiles dicuntur. Vt $\sqrt{8}$ 216, & $\sqrt{8}$ 600, numerat $\sqrt{8}$ 24 &c. Quibus uero non fuerit una quantitas communis eas numerans, dicuntur incommensurabiles. ut $\sqrt{8}$ 18 & $\sqrt{88}$ 162.

Volo hic à principio huius tractationis meæ ponere figurā, (ut pagina uersa uides) in qua omnia quæ de definitionibus dicenda ueniūt, tanquam in speculo quodam inspicere possis.



Quadratum illud modicum, signatum litera E, est mensura communis quadrati lineæ A B, & quadrati lineæ B D. Ergo quadrata nominatarum linearum sunt cõmensurabilia. Numerat autem quadratum E, prædicta illa quadrata, quemadmodum unitas numerat quemlibet numerum rationalem: scilicet dum E numerat quadratum maius, facit 18, & ex minore facit 9. Numerat etiam E triplicatũ, ambo quadrata illa &c. Iam si contrahas (exempli gratia) hanc quantitatem √3 6, ad quadratũ E, faciet

faciet quadratum lineæ A B $\sqrt{\frac{}{}}$ 486 : & quadratum lineæ B D faciet $\sqrt{\frac{}{}}$ 1944. Et scies iam quantitatem $\sqrt{\frac{}{}}$ 6 esse mensuram communem utriusq; quantitatis. Scies etiam $\sqrt{\frac{}{}}$ 54 (id est, triplam ad $\sqrt{\frac{}{}}$ 6) numerare utranq;. Atq; isto modo facile dabis quotquot uoluerís exempla quantitatum commensurabilium.

Hæc ideo dixi, ut intelligas quàm cõmodum sit considerare numeros, modò ut sunt abstracti, modò ut sunt côtracti. Et quamuis res hæc algorithmum requirat, quem inferius ponam capite sexto, nihilominus tamen pergam, ut definitiones reddam perspicuas.

Sic autem iudicabis quantitates esse commensurabiles aut incõmensurabiles. Positis duabus quantitatibus, si ex diuisione unius per alteram, prouenìat quotiens rationalis, tunc quantitates illæ duæ, erunt cõmensurabiles, seu (quod idem est) communicantes. Vt dum diuido $\sqrt{\frac{}{}}$ 72600 per $\sqrt{\frac{}{}}$ 2904, tunc producitur $\sqrt{\frac{}{}}$ 25, id est 5. Sunt ergo quantitates illæ ad inuicem commensurabiles. Sic dum diuido $\sqrt{\frac{}{}}$ 72600 per $\sqrt{\frac{}{}}$ 46464, producitur $\sqrt{\frac{}{}}$ $1\frac{9}{16}$, id est $1\frac{1}{4}$. sunt ergo quantitates illæ etiam commensurabiles. Si uero ex diuisione unius per alteram fiat quotiens irrationalis, erunt duæ quantitates illæ incommensurabiles, seu (quod idem est) non communicantes. Vt dum diuido $\sqrt{\frac{}{}}$ 48 per $\sqrt{\frac{}{}}$ 8, producitur quotiens ille irrationalis $\sqrt{\frac{}{}}$ 6. Ergo quantitates illæ sunt incommensurabiles.

Vt autem inueniendæ sint mensuræ communes, uidebimus circa propositionem tertiam decimi.

¶ Secũdo meminit linearum, dicens: [Linee potentia commensurabiles dicuntur, quarum quadrata numerat vna communis superficies.] Quasi dicat: aliter loquimur de commensurabilitate & incommensurabilitate quantitatum (id est, numerorũ irrationalium) abstractarum: atq; aliter loquimur de eisdem, quando contrahuntur ad lineas. Quando enim loquimur de commensurabilitate quantitatum, tunc nulla utimur determinatiõe distinctionis, sed simpliciter dicimus, duas

quantitates, aut esse commensurabiles, aut incõmensurabiles. Sed quando loquimur de commensurabilitate linearum, tunc utimur aliqua determinatione distinguunte, & non tam simpliciter loquimur. Vt (exempli gratia) lineas A B & B D, superioris figuræ, uocamus commensurabiles, sed non simpliciter, sunt enim in seipsis ad inuicem incommensurabiles, sed uocamus eas commensurabiles potentia. Quia lineæ quarum quadrata numerat una communis superficies (ut quadrata linearum A B & B D, numerat superficies E, item utranq; etiã numerat superficies K E L, scilicet ternarius numerat 9 & 18) dicũtur commensurabiles (etiam si in semetipsis adinuicem sint incommensurabiles) potentia.

Deinde adhuc aliam restrictionem facimus. Cum enim omnes lineæ longitudine rationales, ad inuicem sint commensurabiles potentia & longitudine (ut A B ad A B C &c.) Item multæ lineæ rationales potentia tantum, sint adinuicem commensurabiles potẽtia & longitudine (ut est B D ad B D F, id est, $\sqrt{18}$ ad $\sqrt{72}$. item B D F ad B D F G, id est $\sqrt{72}$ ad $\sqrt{162}$ &c.) Item multæ etiam aliæ lineæ irrationales longitudine & potentia, sint ad inuicem commensurabiles potentia & longitudine (ut est B C ad B C H, id est, $\sqrt{\sqrt{162}}$ ad $\sqrt{\sqrt{2592}}$ &c.) quædam uero in seipsis sint adinuicem incommensurabiles, licet quadrata earum sint commensurabilia (ut sunt lineæ A B & B D, id est 3 & $\sqrt{18}$): ideo quasdam lineas uocamus commensurabiles longitudine & potentia, id est, commensurabiles simpliciter: alias uero uocamus commensurabiles potentia tantum, id est, commensurabiles secundum quid.

Sequitur:

Linee autem potentia incommensurabiles dicuntur, quarum quadrata non numerat vna communis superficies. Vt lineæ superioris figuræ, A B & B C, item B D & B C. Impossibile autem est, ut duæ lineæ potentia incommensurabiles, possint esse longitudine commensurabiles: sicut necesse est, ut duæ lineæ longi-

longitudine cõmensurabiles, sint etiã potẽtia cõmensurabiles.

Omnes uero lineæ tredecim ſpecierum irrationalium, quas ponit Euclides, ſunt potẽtia incommensurabiles, ad quamlibet lineam rationalem: ſicut omnes lineæ potentia tantum rationales, ſunt potentia tantum commensurabiles, ad lineas rationales longitudine.

Vnde ſequitur in Euclide: Que cum ita ſint, manifeſtum eſt, quod cuilibet linee poſite, multe alie linee ſunt incommensurabiles, quedam in longitudine tantum, quedam in longitudine et potentia.

Lineam poſitam uocat eam, qua (ut mox dicet) ratiocinamur. Ea non eſt alia, quàm rationalis longitudine. Omnes aũt lineæ, quæ ad lineam aliquam longitudine rationalem, ſunt commensurabiles potentia tantum (ut ſunt omnes lineæ potentia tantum rationales, ſicut paulo ſuperius dixi) ſunt ad eam incõmensurabiles longitudine tantũ, ut ſatis patet. Et omnes lineæ, quæ ad lineam aliquam longitudine rationalem, ſunt potentia incommensurabiles (ut ſunt omnes lineæ tredecim ſpecierum, ſicut paulo ſuperius dixi) ſunt etiam ad eandem longitudine incommensurabiles. Scilicet poſita linea, ſuperioris figuræ, eſt A B, ad hanc eſt incommensurabilis longitudine linea B D, & linea B D F, & linea B D F G, & linea B D F G B. Et ad eandem poſitam, eſt incommensurabilis in longitudine & potentia, linea B C, & linea B C H, & linea B C H I, & linea B C H I B, & linea G B N: item etiam linea G B I, &c.

Sequitur:

Omnis autem linea poſita, a qua ratiocinamur, vocetur rationalis. Lineeq; ei commensurabiles, dicũtur rationales. Eidem autem incommensurabiles, dicuntur irrationales.

Lineam poſitam uocat eam, à qua incipimus ratiocinationem, quã oportet eſſe rationalem in longitudine. Incipit enim ratiocinatio à ſenſibiliter noto. Nullus autem ſenſus percipit lineã eſſe irrationalem: ſed irrationalis, ex ratiocinatione facta

à rationali, apprehenditur esse talis. Sunt autem ualde uariæ ratiocinationes, à lineis & superficiebus rationalibus, ad irrationales lineas & superficies, quarum unam exempli causa uolo ponere, secũdum figuram priorem. Sit linea posita A B, figuræ superioris: quæ cum diuisa sit in tres partes inter se æquales, ab ea ad diametrum, sic ratiocinor. Lineam A B diuidit hæc particula N O, secundum hunc quotientem 4, & eadem particula N O, diuidit diametrum B M secundum hunc quotientem $\sqrt{\frac{1}{8}}18$. Ergo sicut pro linea A B ponitur numerus 3: sic pro linea B M, seu B D (eædem enim sunt) ponitur quantitas $\sqrt{\frac{1}{8}}18$. Et non poterit linea B D, aliam quantitatem recipere, nisi mutetur diuisio lineæ A B. Nec linea B C (ad quam postea ulterius pergo) potest aliam recipere quantitatẽ, ab hac $\sqrt{\frac{1}{8}\frac{1}{8}}162$, &c. At si mutetur diuisio lineæ positæ, id est, A B, tunc omnia uidebuntur mutari. Vt si A B diuidatur in partes 8, tunc B D habebit hanc quantitatem $\sqrt{\frac{1}{8}}128$: & quadratum eius habebit 128. Linea uero B C habebit hanc quantitatem $\sqrt{\frac{1}{8}\frac{1}{8}}8192$: & quadratum eius habebit $\sqrt{\frac{1}{8}}8192$. & eandem quantitatem habebit etiam superficies contenta sub A B & B G. Atq; ita omnia dependent à diuisione lineæ positæ.

Vbi Euclides postea dicit, quòd lineæ commensurabiles seu communicantes, lineæ positæ, & quæ (causa fundamenti) dicatur rationalis (cum uidelicet talis sit & longitudine & potẽtia) dicantur rationales: eidem autem incommensurabiles, seu non communicantes, dicantur irrationales, ego (secundum ea quæ dixi superius cap. 2.) sic arguo. Linea B D, superioris figuræ, est incommensurabilis lineæ positæ A B (quia nullam habent mensuram communem eas numerantem) ut $\sqrt{\frac{1}{8}}18$ uere est incommensurabilis huic numero 3. Ergo b d non dicitur rationalis, sed irrationalis, & contraria huic, quæ superius dicta sunt (uidelicet quòd huiusmodi quantitatum lineæ dicantur rationales) sunt falsa. Dicit enim Euclides hic, quòd lineæ incommensurabiles lineæ positæ, id est, rationali in longitudine, dicantur irrationales.

tionales. Respondeo (secundum ea quæ superius dixi cap. 2.) licet linea B D incommensurabilis sit longitudine, ipsi lineæ posita B D, non tamen est ei incommensurabilis potentialiter, & hoc sufficit ut ipsa linea B D dicatur rationalis. Illæ autē lineæ, quæ neq; longitudine, neq; potentia commensurabiles sunt, lineæ positæ (sicut sunt B C, & M P) dicuntur solummodo irrationales, apud Euclidem.

¶ Tertio meminit Euclides superficierum non alia ratione, quàm quòd illis utatur ad usum, pro lineis, commodum, atq; ex eis ratiocinetur ad lineas, ut iam dicam. Dicit itaq; : [Omnia quadrata superficies, a qua per hypothesim ratiocinamur, dicitur rationalis. Et superficies ei commensurabiles dicūtur rationales. Eidem autem non communicātes, dicuntur irrationales. Latera vero quæ in illas quadratas superficies possunt, dicuntur irrationalia.]

Propositione decimaquinta sui decimi, inchoat Euclides cursum ratiocinationis suæ principalem, à superficie rationali, contenta sub lineis rationalibus in longitudine, ut suo loco uidebimus. Scilicet (ut & hoc loco etiam hanc rem parum tangamus) sicut lineam quadrati A B N M, superioris figuræ, quam Costam uocant, cogitur uocare rationalem : sic lineā quadrati B D F G etiam uocat rationalem, cum utraq; linearum sit costa quadrati rationalis. Licet autem quadrata illa duo, specie non differant, cum unum æque sit rationale ut alterum, lineæ tamē quadratorum illorum inueniuntur differre specie. Atque ita ex superficiebus duabus rationalibus quadratis, ratiocinatur, & colligit tandem duas species suas rationalium linearum. Deinde sicut lineam B D uocat rationalem, à quadrato suo rationali, cuius est costa, sic lineam B C uocat medialem, à quadrato suo mediali, cuius est costa. Atq; ita ex talibus lineis quadratorum, uidelicet medialium, format sibi Euclides speciem irrationalium linearum primam.

Reliqua in definitionibus faciliora sunt, quàm ut expositiõe egeant

egeant: scilicet quadratum lineæ a b, præsupponitur tali ratiocinationi, quali Euclides omnia inuenit, quæ proposuit, à propositione sui decimi quintadecima usq; in finem libri illius &c

Et superficies, inquit, que illi sunt commensurabiles (ut est quadratum lineæ b d) dicuntur rationales. Eidem autem non commensurabiles (ut est quadratum lineæ b c, item quadratum lineæ m p uel p f, constans ex duobus quadratis rationalibus, figuræ nostræ, & superficie q duplicata) dicuntur irrationales. Latera vero (sic redit à superficiebus ad lineas, ut ostendat se omnia quæ de superficiebus dicit, dicere propter lineas) que in illas quadratas superficies possunt (ut est linea a b, itẽ linea m p) dicuntur irrationalia. Quia sunt, ut oportet, longitudine & potentia irrationalia.

De speciebus numerorum irrationalium. Caput IIII.

VT AVTEM nihil negligam eorum, quæ ad statutam à me tractationem pertinent, uolo (anteq; propositiones Euclidis ad manus recipiam) de speciebus numerorum irrationalium abstractorum agere. Sunt autem quædam species principales, quædam minus principales. De principalibus prius dicam, postea dicam de alijs speciebus.

De speciebus principalibus numerorum irrationalium abstractorum.

Quinq; autem sunt species irrationalium numerorum abstractorum.

PRima species uocatur Simplicium, & hæc continet Mediales. Sunt autem mediales numeri, quædam radices surdæ, numerorum rationalium, & subdiuiduntur in species infinitas.

Prima medialium species continet quadrate mediales, quorum

rum ſignum eſt √ȝ. Hoc enim ſignum, ſi præponatur numero rationali, radicem quadratam non habenti, continuo ex rationali fit medialis quadrate.

Secunda medialium ſpecies cõtinet cubice mediales, horum ſignum eſt √c̃. Quod ſi præponatur numero rationali, radicẽ cubicam nõ habenti, fit ex rationali medialis cubice. ut √c̃ 16. Quãdo autem præponitur numero rationali, habenti radicem cubicam, tunc manet numerus rationalis. ut √c̃ 64, facit 4. Sic quando ſignum medialium quadrate, præponitur numero rationali quadrato, tunc manet numerus aliquis rationalis. ut √ȝ 16, facit 4.

Tertia ſpecies medialium, uocatur zenſizenſice medialium: horum ſignum eſt √ȝȝ. Si hoc ſignum præponatur numero nõ habenti radicem zenſizenſicam, neq; zenſicam, ſeu quadratã, tunc efficitur numerus medialis zenſizenſice. ut √ȝȝ 24. Si autẽ præponatur numero non habenti radicem zenſizenſicam, habenti uero radicem quadratã, tunc efficitur medialis quadrate. ut √ȝȝ 64, facit √ȝ 8. Si uero præponatur numero rationali, habenti radicem zenſizenſicam, tunc manet numerus aliquis rationalis. ut √ȝȝ 1296, facit 6.

Quarta ſpecies medialium, eſt ſurdeſolide medialium: horũ ſignum eſt √ß. Quod ſi numero rationali fuerit præpoſitum, qui non ſit ſurdeſolidus, conſtituitur medialis ſurdeſolide. ut √ß 12. At √ß 32, facit 2, &c.

Quinta ſpecies dicitur medialium zenſicubice: horum ſignũ eſt √ȝc̃. ut √ȝc̃ 12. At √ȝc̃ 36, facit √c̃ 6: & √ȝc̃ 216, facit √ȝ 6: & √c̃ 46656, facit 6.

Sextæ ſpeciei exemplum, eſt √bß 12 : eſt enim medialis bſurdeſolidæ.

Septimæ ſpeciei exemplum √ȝȝȝ 12 : eſt enim numerus medialis zenſizenzenſice.

Octauæ ſpeciei exẽplum √c̃c̃ 12 : eſt eñ cubicubice medial'.

Nonæ ſpeciei exemplum √ȝß 12: eſt eñ zenſurdeſolide med.

Decimæ ſpeciei exẽplum, √cß 12 : eſt eñ cſurdeſolidæ med.
Vndecimæ ſpeciei exemplum, √ȝȝcc 12.
Duodecimæ ſpeciei exemplum, √dß. Et ſic de alijs.
Ex ijs ſpeciebus poteris iudicare de alijs. Horum autem ſignorum inuentionem docebo in mea Algebra.

Licet autẽ hæ ſpecies dicantur Simplices, tamen ſigna earũ inueniuntur eſſe compoſita ſæpiſſime. Vt hæc ſigna ſunt compoſita : √ȝȝ. √ȝcc. √ȝȝȝ. √ccc. √ȝß. √ȝȝcc. √ȝbß. √ccß. √ȝȝȝȝ. √ȝccc. &c. Sed hæc ſequentia ſigna ſunt ſimplicia : √ȝ. √cc. √ß. √bß. √cß. √dß. &c. Satis autem intelligis, ut uox ſigni, & figura ſigni ſe mutò ponant.

Exiſtimo ego (ut de ratione uocabuli diſputem) Mediales dici, propter media proportionalia, quæ per mediales numeros inueniuntur. Poteris enim (medialium beneficio) inter quoslibet duos numeros, media proportionalia cõſtituere, quotquot libuerit. Sed de hac inuentione infrâ dicam ſuo loco.

Numeri etiam rationales, reducti ad ſigna medialiũ (de qua reductione in Algorithmo medialiũ dicam) uſus ſuos habent. Nam quoties medialium aliquis uenerit multiplicandus, aut diuidendus, per numerum rationalem, tunc rationalis ille reducitur ad ſignum illius medialis. Sed hæc ad Algorithmum pertinent. Item numeri rationales ſub ſignis medialium reducti, pulcherrime probant regulas Algorithmorum quaſcunq; de numeris irrationalibus dabiles: quoties uidelicet pro exemplo regulæ probandæ aſſumuntur &c. Sed & hæc ad Algorithmos pertinent.

Secunda ſpecies numerorũ irrationalium, uocatur Compoſitorum : & habet duas ſubſpecies.

Prima uocatur bimedialium, & fit ex additione medialis numeri ad medialem, eiuſdem ſpeciei medialiũ. Vt √ȝ 12 + √ȝ 8, item √cc 12 + √cc 6, item √ȝȝ 18 + √ȝȝ 6, itẽ √ß 28 + √ß 12 &c.

Secunda ſpecies compoſitorum, uocatur binomialium : & fit ex additione medialis numeri ad rationalem, uel ad mediallem,

lem, alterius tamē ſpeciei medialiū. Exemplū primi $6+\sqrt{\sqrt{12}}$, item $\sqrt{\sqrt{12}}+2$. Exemplum ſecundi $\sqrt{\sqrt{12}}+\sqrt{\text{c}12}$, item $\sqrt{\sqrt{12}}+\sqrt{\sqrt{\sqrt{12}}}$, &c.

De ſignis illis duobus + & —.

Quando addenda ſunt duo incommenſurabilia, uel duo alia qua, quorum proportio ignoratur (ut in coſſicis numeris ferè ubiq; fit) tunc interponimus ſignum hoc + ipſis addendis, dicimusq; ita completam eſſe additionem. Et hac ratione uocatur ſignum additorum.

Simili ratione uocamus ſignum hoc —, ſignum ſubtractorum: dum em̄ ſubtrahere uolumus aliquid, ab alio ſibi incommenſurabili, aut ab eo, cuius proportio ad ſubtrahendum eſt ignota, tunc utimur illo ſigno, ut in exemplis tanquam compoſitorum uidebis paulo inferius.

Tertia ſpecies irrationalium numerorum, uocatur radicalium compoſitorum. Sunt enim numeri irrationales ſpeciei illius, radices quadratæ compoſitorum numerorum. Vt $\sqrt{\sqrt{.}}$ $\sqrt{\sqrt{12}}+\sqrt{\sqrt{8}}$. Item $\sqrt{\sqrt{.}}6+\sqrt{\sqrt{12}}$, &c.

Quarta ſpecies irrationalium numerorum uocatur, tanq; compoſitorum. Quanquā enim (ut rationem uocabuli reddā) numeri ſpeciei huius, non fiant per additionē ſicut compoſiti, ſed per ſubtractionem: tamen ſunt per omnia ſimiles compoſitis, ut Euclides prolixe probat. Subdiuiditur ergo etiam iſta ſpecies, in duas ſubſpecies.

Prima uocatur reſidualiū bimedialium: & fit ex ſubtractione medialis à diuiſi, eiuſdē ſpeciei medialiū. Vt $\sqrt{\sqrt{12}}-\sqrt{\sqrt{6}}$. item $\sqrt{\text{c}24}-\sqrt{\text{c}18}$. Et ſic de alijs.

Secunda ſpecies numerorum irrationalium tanquam compoſitorum, uocatur reſidualium binomialium: & fit ex ſubtractione. Primo, medialis numeri à rationali: ut $12-\sqrt{\sqrt{140}}$. Secundo, rationalis à mediali: ut $\sqrt{\sqrt{200}}-12$. Tertio, medialis à mediali, alterius ſpeciei: ut $\sqrt{\sqrt{12}}-\sqrt{\text{c}60}$. item $\sqrt{\text{c}12}-\sqrt{\sqrt{\sqrt{18}}}$. item $\sqrt{\sqrt{12}}-\sqrt{\sqrt{\sqrt{80}}}$. Et ſic de alijs.

¶ Quinta ſpecies irrationalium numerorum, uocatur radicalium tanquam compoſitorum. Sunt enim numeri ſpeciei illius, radices quadratæ numerorum tanquam compoſitorum. ut $\sqrt{\text{ʒ}}.\sqrt{\text{ʒ}}12 - \sqrt{\text{ʒ}}8$. item $\sqrt{\text{ʒ}}.6 - \sqrt{\text{ʒ}}6$. item $\sqrt{\text{ʒ}}.\sqrt{\text{ʒ}}12 - 2$. item $\sqrt{\text{cꝛ}}60 - \sqrt{\text{ʒʒ}}200$. Et ſic de alijs.

De ſpeciebus minus principalibus.

NVmeros irrationales, ſpecierum minus principalium, (quorum uſum forte etiam in Algebra mea uidebimus) quantū poſſum breuiſſimis, in genere ſaltem, comprehendere tentabo. Scilicet:

¶ Primo, quidam eorū fiunt additione, ut ſunt Trimediales, Quadrimediales, &c. Item Trinomiales, Quadrinomiales &c̄

Exemplum de Trimedialibus.

$\sqrt{\text{ʒ}}24 + \sqrt{\text{ʒ}}12 + \sqrt{\text{ʒ}}8$.

Exemplum de Quadrimedialibus.

$\sqrt{\text{cꝛ}}24 + \sqrt{\text{cꝛ}}8 + \sqrt{\text{cꝛ}}5 + \sqrt{\text{cꝛ}}2$.

Exemplum de Trinomialibus.

$12 + \sqrt{\text{ʒ}}12 + \sqrt{\text{cꝛ}}12$.

Exemplum de Quadrinomialibus.

$\sqrt{\text{ʒʒ}}200 + \sqrt{\beta}1000 + \sqrt{\text{ʒcꝛ}}10 + \sqrt{\text{bβ}}2$.

¶ Secundo, quidam eorum fiunt ſubtractione, ut ſunt reſiduales trimedialiter, & reſiduales quadrimedialiter &c. Item reſiduales trinomialiter, & reſiduales quadrinomialiter, &c.

Exemplum de reſidualibus trimedialiter.

$\sqrt{\text{ʒ}}24 - \sqrt{\text{ʒ}}8 - \sqrt{\text{ʒ}}6$.

Exemplum de reſidualibus quadrimedialiter.

$\sqrt{\text{ʒʒ}}20 - \sqrt{\text{ʒʒ}}17 - \sqrt{\text{ʒʒ}}8 - \sqrt{\text{ʒʒ}}2$.

Exemplum de reſidualibus trinomialiter.

$\sqrt{\text{ʒ}}20 - \sqrt{\text{cꝛ}}20 - \sqrt{\beta}20$.

Exemplum de reſidualibus quadrinomialiter.

$16 - \sqrt{\text{ʒ}}18 - \sqrt{\beta}7 - \sqrt{\text{ʒcꝛ}}2$.

¶ Tertio, quidam eorum fiunt additione & ſubtractione, quorum ſpecies numerabit nemo.

Exempla

Exempla huius generis sunt : $\sqrt{\sqrt{}}60+\sqrt{\sqrt{}}20-8$.
Item $6+\sqrt{\sqrt{}}28+\sqrt{\text{c}}10-\sqrt{\sqrt{}}14-5$.
Et sic de alijs innumerabilibus exemplis.

Quarto, quidam eorum fiunt extractione alicuius radicis de numero aliquo, suprà positorum generum.

Exempla huius generis sunt hæc, & similia.

$\sqrt{\text{c}}.\sqrt{\sqrt{}}20+4+\sqrt{\text{c}}6$.
$\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}20-4-\sqrt{\beta}8$.
$\sqrt{\beta}.8+\sqrt{\text{c}}10-\sqrt{\sqrt{}}200$.

Quicquid iam restat numerorum irrationalium, comprehenditur sub aliquo quatuor generum prædictorum.

Vt (exempli causa) hoc, $\sqrt{\sqrt{}}.6+\sqrt{\sqrt{}}8.+.\sqrt{\text{c}}.\sqrt{\sqrt{}}20-2$. comprehenditur sub primo genere.

Et hoc exemplum $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}6+2.-.\sqrt{\sqrt{}}\text{c}.\sqrt{\text{c}}8+\sqrt{\sqrt{}}\sqrt{\sqrt{}}12$. comprehenditur sub secundo genere.

Et hoc exemplum, $6+\sqrt{\sqrt{}}.20+\sqrt{\sqrt{}}12.-.\sqrt{\sqrt{}}8$. comprehenditur sub tertio genere.

Et hoc exēplum $\sqrt{\text{c}}.\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}20-\sqrt{\sqrt{}}10.+\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}8-\sqrt{\sqrt{}}2$. comprehenditur sub quarto genere. Et sic de alijs omnibus. Nihil autem potest esse reliqui, quin sub aliquo genere prædicto comprehendatur.

Quid Euclides collegerit ex prædictis speciebus, & ut collectorum illorum usus sit. Caput v.

LIBRVM Euclidis decimum (quem multi, alijs elementorum suorum libris, longe difficiliorem esse existimant, sicut illis alijs multo est prolixior) ego breuissimum facilimumq; hoc capite reddā, atq; integrum, antequam propositiōes libri illius aggrediar, ut & hoc caput uice alicuius argumenti præmittat.

Primo diuisit Euclides uniuersos numeros rationales, in quadratos, & non quadratos. Atque ita ex duabus illis speciebus suis, contraxit numeros ad superficies quadratas. Et sic mox inuenit suas species illas duas, linearum rationalium. Vt 9 & 18 (figuræ quam posui cap. 3) contracti ad superficies T R, faciunt latera 3 & $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 18. Itaq; (modo hoc) primo omnium, de speciebus numerorum irrationalium recepit speciem medialiũ quadrate, ut statueret ex ea speciem rationalium linearum secundam, id est, potentia tantummodo rationalium.

Secundo, numeros, ex specie illa medialium quadrate, receptos, contraxit ad superficies quadratas (ut in figura nostra uides medialem numerũ $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 162 contractũ ad superficiem signatã literã S) & uidit latus quadrati, facere numerum zensizense medialem (uidelicet $\sqrt{\frac{1}{8}\frac{1}{8}}$ 162) & sic recepta est illa alia species medialium numerorũ, ut ex ea statueretur species prima irrationalium linearum. Atq; ita ex infinitis speciebus medialium duæ solummodo species exceptæ sunt: uidelicet species medialium quadrate, ut ex ea statueretur species linearum rationalium secunda, & species medialium zensizense, ut ex ea statueretur species prima linearum irrationalium.

Tertio transiuit ad speciem numerorum irrationalium compositam. Et primo recepit ex bimedialibus, illos, qui quadrate essent bimediales: sed illos noluit uocari bimediales, at eos uocauit binomiales. Bimedialium uero species reliquas omnes reiecit, nisi q; bimediales zensizense interim dissimulauit, ut inferius intelliges. Secũdo, ex binomialibus recepit aliquos, uidelicet illos, quos uidit esse cõpositos, ex uno numero rationali, et ex altero quadrate mediali. Reliquas uero species binomialiũ omnes cõtempsit, & reiecit. Atq; ita ex omni genere cõpositorũ solũmodo duas species excerpsit (ut iam dixi) easq; Binomiales uocari uoluit, etiam si essent bimediales quadrate.

Binomia illa sua Euclides diuisit primo in duo genera. Ad primum genus reiecit omnia quæ essent quadrata (de quibus

bus inferius proprium caput instituam) : quæ uero non essent quadrata binomia, constituit sub genere secundo binomiorũ.

Sub utroq; aũt genere binomiorum, constituit tres species: Primam, quæ contineret binomia cõstituta, ex parte rationali maiore, & mediali parte minore. Secundam, quæ contineret ea q̃ ex parte rationali minore, & ex parte mediali maiore essent constituta. Tertiam, quæ cõtineret ea quæ ex duabus partibus medialibus cõstituta essẽt. Et sic factæ sunt sex spẽs binomiorũ.

1 Binomiales autẽ numeros primæ speciei, contraxit ad superficies quadratas, uiditq; latera quadratorum illorum, esse binomiales lineas, modò primæ, modò secundæ, modò tertiæ, modò quartæ, modò quintæ, modò sextæ speciei.

Vt ex $97+\sqrt{\text{8}}2352$, fit $7+\sqrt{\text{8}}48$. Et ex $34+\sqrt{\text{8}}1152$, fit $\sqrt{\text{8}}18+4$. Et ex $98+\sqrt{\text{8}}9600$, fit $\sqrt{\text{8}}50+\sqrt{\text{8}}48$.

Et ex $7+\sqrt{\text{8}}48$, fit $2+\sqrt{\text{8}}3$. Et ex $30+\sqrt{\text{8}}876$, fit $\sqrt{\text{8}}21+3$. Et ex $32+\sqrt{\text{8}}768$, fit $\sqrt{\text{8}}24+\sqrt{\text{8}}8$.

Vt autem ista fiant, infrà suo loco pulchre docebo.

Et hæ sunt sex binomialium linearũ subspecies, comprehensæ sub secunda specie irrationalium linearum Euclidis.

2. Binomiales numeros secundæ speciei, contractos ad superficies quadratas, uidit facere latera facientia numeros bimediales zensizensice. Et tales (ut partes compositionis) inter se multiplicatæ, semper faciũt numerũ rationalem simpliciter.

Vt ex $\sqrt{\text{8}}18+4$, fit $\sqrt{\text{88}}8+\sqrt{\text{88}}2$.

Ex talibus igitur lineis, constituit speciem irrationalium linearum suarum tertiam.

3. Binomiales numeros tertiæ speciei, contractos ad superficies quadratas, uidit habere latera facientia numeros bimediales zensizensice. Et tales quidem, qui partium multiplicatione inter se, faciant semper numerũ medialem quadrate.

Vt ex $\sqrt{\text{8}}50+\sqrt{\text{8}}48$, fit $\sqrt{\text{88}}18+\sqrt{\text{88}}8$.

Ex talibus igitur lineis, constituit quartam speciem irrationalium linearum, easq; lineas uocauit Bimediales secundas; nam priores uocauit Bimediales primas,

Sunt præterea quidam bimediales numeri zenſizenſice, quorum partes inter ſe multiplicatæ, neq; faciunt rationalem numerum, neq; medialem quadrate, ſed mediales zenſizenſice faciunt. Et tales abiecit à ſpeciebus ſuarum linearum irrationalium, eò quòd à nulla ſubſpecie binomialium profluant.

Poteſt ergo hæc ſpecies tertia bimedialium, dici Species bimedialium abiecta. Et ſic patet, quòd licet numerorum medialium zenſizenſice, nullum excludat à ſpeciebus ſuarum linearum irrationalium, tamen bimedialium zenſizenſice, multos excludit, ut iam uidimus.

4. Binomiales numeros quartæ ſpeciei, contractos ad ſuperficies quadratas, uidit habere latera, facientia radices binomiorum quartorum. Et tales lineas uocauit, lineas maiores. Fecitq; ex eis, ſpeciem linearum ſuarum irrationalium quintã.

Vt ex $6 + \sqrt{\frac{1}{2}}\,2$, fit $\sqrt{\frac{1}{2}}.\ 6 + \sqrt{\frac{1}{2}}\,2$.

5. Binomiales numeros quintæ ſpeciei, contractos ad ſuperficies quadratas, uidit habere latera, facientia radices binomiorum quintorum.

Vt ex $\sqrt{\frac{1}{2}}\,6 + 2$, fit $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}\,6 + 2$.

Et tales lineas uocauit potentes rationale & mediale. Patetq; ſatis appellationis huius ratio, uel ex ipſa pictura numeri: ſcilicet $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}\,6 + 2$ in ſe ductus quadrate, facit $\sqrt{\frac{1}{2}}\,6 + 2$. Vides certe, ut potentia hæc cõtineat rationalem numerũ 2, & medialem numerum $\sqrt{\frac{1}{2}}\,6$. Conſtituit autem ſpeciem linearum ſuarũ ſextam, ex huiuſmodi numerorum lineis.

6. Binomiales numeros ſextæ ſpeciei, cõtractos ad ſuperficies quadratas, uidit habere latera, facientia radices binomiorum ſextorum.

Vt ex $\sqrt{\frac{1}{2}}\,6 + \sqrt{\frac{1}{2}}\,2$, fit $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}\,6 + \sqrt{\frac{1}{2}}\,2$.

Et ex lineis, huiuſmodi numeros ferentibus, conſtituit ſeptimã ſpeciem linearum ſuarum irrationalium. Vocauitq; lineas huiuſmodi, potentes duo medialia. Ratio appellationis ſimilis eſt rationi appellationis linearum ſuperioris ſpeciei.

Et

Et hæc sunt ferè omnia quæ docet Euclides in suo decimo, usq; ad propositiones de Residuis. Quæ autem docet in illis propositionibus residuorum, facilimè intelliguntur ex præcedentibus, atq; breuissimis tradi possunt.

¶ Residua dicuntur, Tanquam composita. Talia enim sunt, qualia composita: sicuti Algorithmi, & propositiones Euclidis satis testantur. Sic autē ea producere poteris, ex binomijs. Pro signo additorum, pone signum subtractorum, manētibus numeris tuæ lineæ compositæ, tunc mutasti compositam in tanquam compositam, similis speciei.

Sic ex $7+\sqrt{\frac{}{}}48$, fit $7-\sqrt{\frac{}{}}48$. hoc est, ex binomio primo, fit residuum primum.

Et ex $\sqrt{\frac{}{}}18+4$, fit $\sqrt{\frac{}{}}18-4$. hoc est, ex binomio secundæ speciei, fit residuum secundæ speciei.

Et ex $\sqrt{\frac{}{}}50+\sqrt{\frac{}{}}48$, fit $\sqrt{\frac{}{}}50-\sqrt{\frac{}{}}48$. hoc est, ex lineis binomialibus tertiæ speciei, fiunt lineæ residuales tertiæ speciei.

Et ex $6+\sqrt{\frac{}{}}2$, fit $6-\sqrt{\frac{}{}}2$. hoc est, ex binomio quarto, fit residuum quartum.

Et ex $\sqrt{\frac{}{}}6+2$, fit $\sqrt{\frac{}{}}6-2$. hoc est, ex binomio quinto, fit residuum quintum.

Et ex $\sqrt{\frac{}{}}6+\sqrt{\frac{}{}}2$, fit $\sqrt{\frac{}{}}6-\sqrt{\frac{}{}}2$. hoc est, ex binomio sexto, fit residuum sextum.

Sicut igitur sub specie binomiorum (quæ est secūda species irrationalium linearum) continentur sex subspecies binomiorum: sic sub specie residuorum (quæ est octaua species irrationalium linearum) continentur sex subspecies residuorum.

Item ex $\sqrt{\frac{}{}\sqrt{\frac{}{}}}8+\sqrt{\frac{}{}\sqrt{\frac{}{}}}2$, fit $\sqrt{\frac{}{}\sqrt{\frac{}{}}}8-\sqrt{\frac{}{}\sqrt{\frac{}{}}}2$. hoc est, ex bimediali prima, fit residualis bimedialis prima. Et ex talibus lineis constituit Euclides speciem nonā suarum linearū irrōnalium.

Sic ex $\sqrt{\frac{}{}\sqrt{\frac{}{}}}18+\sqrt{\frac{}{}\sqrt{\frac{}{}}}8$, fit $\sqrt{\frac{}{}\sqrt{\frac{}{}}}18-\sqrt{\frac{}{}\sqrt{\frac{}{}}}8$. hoc est, ex bimediali secunda, fit residualis bimedialis secunda. Et ex talibus lineis constituit speciem linearum suarum irrationaliū decimā.

Item ex $\sqrt{\sqrt{6}}+\sqrt{\sqrt{2}}$, fit $\sqrt{\sqrt{6}}-\sqrt{\sqrt{2}}$. Sicut autem prior numerus reiicitur, ut non computetur inter species bimedialium linearum: ita posterior quoq; reiicitur, ne inter species residualium bimedialium recipiatur. Et sicut prior non fluit ab aliquo binomio, cuius esset radix quadrata: sic posterior non potest esse radix quadrata, alicuius residui binomialiter.

Item duo numeri hi, $\sqrt{\sqrt{32}}+\sqrt{\sqrt{2}}$, & $\sqrt{\sqrt{32}}-\sqrt{\sqrt{2}}$, sunt longitudine commensurabiles ad inuicem, suntq; eiusdem speciei. Sunt enim ambo mediales zensizensice. Scilicet, prior facit $\sqrt{\sqrt{162}}$: posterior uero (id est, $\sqrt{\sqrt{32}}-\sqrt{\sqrt{2}}$) nihil aliud facit quàm $\sqrt{\sqrt{2}}$. Sic ubiq; est, ut dum partes compositionis, longitudine sunt cõmensurabiles, in unum coeãt mediale, &c.

Deinde etiam ex $\sqrt{.6}+\sqrt{.2}$, fit $\sqrt{.6}-\sqrt{.2}$. hoc est, ex linea maiore fit linea minor, mutatione uidelicet + in —. Et sunt lineæ minores, sub specie undecima irrationalium linearum.

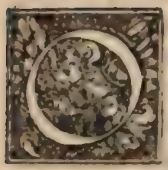
Ex ex $\sqrt{.}\sqrt{.6}+2$, fit $\sqrt{.}\sqrt{.6}-2$. hoc est, ex potente rationale & mediale, fit componens mediale cum rationali. Tales uero lineæ constituunt duodecimam speciem irrationalium linearum. Ratio appellationis huius est, quòd quadrata huiusmodi linearum (ut est $\sqrt{.6}-2$) faciant medialem superficiem, cum rationali superficie sibi superaddita. ut si 2 addatur ad $\sqrt{.6}-2$, tunc fit $\sqrt{.6}$ medialis.

Demum ex $\sqrt{.}\sqrt{.6}+\sqrt{.2}$, fit $\sqrt{.}\sqrt{.6}-\sqrt{.2}$: hoc est, ex potente duo medialia, fit componens mediale cum mediali. Patet ratio appellationis ex ratione appellationis linearum superioris speciei. Et ex illis lineis tandem constituitur tertiadecima species linearum irrationalium.

Hæc sunt quæ Euclides docet in suo decimo elementorum.

De

De Algorithmo medialium.
Caput VI.



PORTET autē pro absoluta priorum atq; subsequentium dictorum cognitione, nos Algorithmos aliquot perlustrare, quorum tres necessarios esse iudico. Primum uidelicet, de numeris medialibus. Secundum, de irrationalibus compositis & tanquam compositis. Tertium, de radicibus compositorum & tanquam compositorum.

Algorithmus medialium.

¶ De repræsentatione numerorum irrationalium, atque de eorum pronūciatione, satis dictum est in superioribus capitib. Restat igitur, ut aliarum operationum species perspiciamus: & datis exemplis opportunis, decimum Euclidis cum tota irrationalium tractatione reddamus facilem atq; perspicuum.

De multiplicatione & diuisione.

¶ Multiplicatio & diuisio, in hoc Algorithmo, præcedunt (uia doctrinæ) additionem & subtractionem.

Regula prima.

Quando medialis multiplicans, & multiplicandus, in multiplicatione (atq; in diuisione, diuisor, & diuidendus medialis) habuerint idem signum radicale, tunc numeri ad signa radicalia positi, multiplicantur aut diuiduntur per omnia secundum regulas Algorithmi cōmunis, & quod prouenit (siue ex multiplicatione, siue ex diuisione) semp recipit idem signū radicale.

Exempla regulæ.

Iste medialis numerus $\sqrt{\sqrt{}}$ 248, multiplicatus per $\sqrt{\sqrt{}}$ 6, facit $\sqrt{\sqrt{}}$ 1488. Sic $\sqrt{\sqrt{}}$ 1488 diuisus per $\sqrt{\sqrt{}}$ 6, facit $\sqrt{\sqrt{}}$ 248.

Item $\sqrt{cc}$ 1296 multiplicatus per $\sqrt{cc}$ 14, facit $\sqrt{cc}$ 18144. Sic rursum $\sqrt{cc}$ 18144 diuisus per $\sqrt{cc}$ 1296, facit $\sqrt{cc}$ 14.

Item $\sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$ 12 multiplicatus per $\sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$ 13, facit $\sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$ 156. Sic $\sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$ 156 diuisus p. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$ 13, facit $\sqrt{\sqrt{\sqrt{}}}$ 12. Et sic de alijs medial.

Secunda regula.

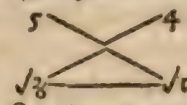
Si mediales multiplicandi, aut diuidendi, non habuerint idem signum, tunc reducuntur ad idem signum. Quod cum factum fuerit, fit deinde operatio secundum regulam priorem.

De reductione signorum radicalium diuersorum ad idem signum radicale.

¶ Modus reducendi signa radicalia diuersa, ad idem signū (cuius meminit secunda regula multiplicationis & diuisionis medialium) similis est quodammodo reductioni illi, qua minutiæ reducuntur ad eundem denominatorem.

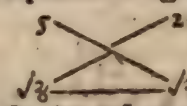
Sic autem operaberis.

Pone signum uniuscuiusq; numeri, sub numero sibi appositō, quemadmodum poni solet denominator minutiæ, sub suo numeratore. Et quid deinde faciendum sit, facile discres ex pictura exempli quod ponam. Vt uolo reducere $\sqrt[3]{5}$ & $\sqrt{c}4$ ad idem signum, sic stabit exemplum ad regulam.



Iuxta signi $\sqrt{c}$ significationem, multiplicabis 5 cubice, facit 125, quem numerum pone pro 5. Deinde multiplicabis 4 zensice seu quadrate, iuxta signi $\sqrt[3]{}$ significationem, facit 16, quem numerum pone pro 4. Demum adde signa (est enim hæc additio signorum, quædam multiplicatio) facit $\sqrt[3]{c}$ signum commune pro utroq; : scilicet $\sqrt[3]{c}$ 125 & $\sqrt[3]{c}$ 16, faciunt id quod $\sqrt[3]{5}$ & $\sqrt{c}$ 4. Multiplicatus igit $\sqrt[3]{5}$ per $\sqrt{c}$ 4, facit $\sqrt[3]{c}$ 2000. Sic medialis ille numerus $\sqrt[3]{c}$ 2000 diuisus per $\sqrt[3]{5}$, facit $\sqrt{c}$ 4.

Sic stabit exemplum ad regulam reductionis.

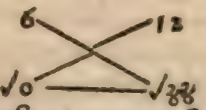


Multiplicata 5 zensicubice, faciunt 15625, & 2000 zensice faciunt 4000000: & utriq; præpone signum commune, uidelicet

delicet $\surd\surd\surd\surd$ 4000000 per $\surd\surd\surd\surd$ 15625, facit $\surd\surd\surd\surd$ 256. Sed hoc nihil aliud est quàm $\surd$ 4, ut inferius etiam dicam.

Aliud exemplum.

Volo multiplicare $\surd\surd$ 12 per 6. sic stabit exemplum ad reductionem.



Multiplico 6 zensizensice (propter signum zensizensicum hoc $\surd\surd$) facit 1296. Sed 12 non multiplico propter signũ $\surd$0. quod signat nullam esse faciendam multiplicationẽ. Itaq; multiplico $\surd\surd$ 12 per $\surd\surd$ 1296, facit $\surd\surd$ 15552. Sic dum diuido $\surd\surd$ 15552 per $\surd\surd$ 12, tunc proueniunt $\surd\surd$ 1296. hoc est, 6. Et sic de alijs. Vt $\surd$ 6 multiplicatus per 3, facit $\surd$ 54. multiplicatur enim $\surd$ 6 per $\surd$ 9. Sic $\surd$ 6 multiplicatus per 3, facit $\surd$ 162: multiplicatur enim $\surd$ 6 per $\surd$ 27. &c.

Habent autem reductiones illæ (de quibus iam loquor, ut de ijs, quæ ad multiplicationem & diuisionem medialium diuersarum specierum, sunt necessariæ) sua operationum compendia, quæ fiunt modò in signi alicuius abiectione, modò in signi alicuius assumptione.

Exemplum de abiectione signi radicalis.

Volo reducere ad idem signum hos duos numeros $\surd$ 1024 & $\surd$ 216. Vtor igitur regula hac.

Quando numero præponitur signum radicale, significans radicem, quam numerus habet, tunc extrahitur radix illa quam signum significabat, & signum ipsum deletur. Itaq; extraho radicem surdesolidam de 1024, facit 4, deletoq; signo significãte radicem surdesolidam, manebit $\surd$ 4. Et de altero, abijcio signũ significans radicem cubicam, extracta prius radice cubica. Manet igitur $\surd$ 6, sicq; stant reducti ambo ad idem signum $\surd$ 4. $\surd$ 6.

Aliud exemplum de assumptione signi radicalis.

Volo reducere $\sqrt{cc}\,2$ & $\sqrt{\text{ʒ}cc}\,6$, multiplico numerum prioris medialis in se, & addo signum zensicæ radicis. Sic ergo stabũt reducti $\sqrt{\text{ʒ}cc}\,4$. $\sqrt{\text{ʒ}cc}\,6$.

Multiplicationes medialium, quadratæ, cubicæ, &c.

¶ Medialis quadrate multiplicandus quadrate, deleto signo, relinquit productum. ut $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$ in se quadrate, facit 6.

Sic medialis cubice, multiplicandus cubice, deleto signo, relinquit productum. ut $\sqrt{cc}\,6$ in se cubice, facit 6. Et sic de aliarũ specierum medialibus.

Sed $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$ in se cubice, facit $\sqrt{\text{ʒ}}\,216$. Vnde radix cubica de $\sqrt{\text{ʒ}}\,216$, facit $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$, &c.

Sic $\sqrt{cc}\,6$ in se quadrate, facit $\sqrt{cc}\,36$. Vnde radix quadrata ex $\sqrt{cc}\,36$, facit $\sqrt{cc}\,6$.

Sic $\sqrt{\text{ʒ}cc}\,6$ in se quadrate, facit $\sqrt{cc}\,6$. Vnde radix quadrata ex $\sqrt{\text{ʒ}cc}\,6$, facit $\sqrt{cc}\,6$.

Et sicut $\sqrt{\text{ʒ}cc}\,6$ in se cubice, facit $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$: sic radix cubica ex $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$, facit $\sqrt{\text{ʒ}cc}\,6$.

Et sicut $\sqrt{\text{ʒ}\text{ʒ}}\,6$ in se quadrate, facit $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$: sic radix quadrata ex $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$, facit $\sqrt{\text{ʒ}\text{ʒ}}\,6$. Et sic de alijs.

Fluunt ista omnia ex cognitione superiorũ, ideo nolui lectorem hoc loco grauare pluribus regulis frustrà.

De additione & subtractione medialium.

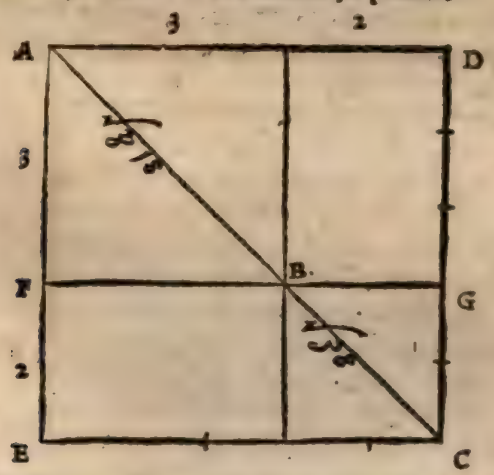
¶ In superioribus satis dictum est, ut incommensurabilia, addantur per interpositionem signi additorum, & alterum ab altero subtrahatur, per interpositionem signi subtractorum. Vt $\sqrt{\text{ʒ}}\,12$ ad $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$, facit $\sqrt{\text{ʒ}}\,12 + \sqrt{\text{ʒ}}\,6$. Sic $\sqrt{cc}\,12$ à $\sqrt{\text{ʒ}}\,12$, relinquit $\sqrt{\text{ʒ}}\,12 - \sqrt{cc}\,12$.

Et præter hæc satis constat regula de addendis aut subtrahendis medialibus inter se æqualibus. Nam æquale subtractũ ab æquali, nihil relinquit. Et æquale additum æquali, coincidit cum duplato alterius ex eis. Vt $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$ duplatum, seu multiplicatum per 2, producit aggregatũ ex $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$ & $\sqrt{\text{ʒ}}\,6$, id est, $\sqrt{\text{ʒ}}\,24$. &c.

Restat

Restat regula danda de additione & subtractione medialiũ commensurabilium & inæqualium ad inuicem. Vt sunt $\sqrt{\sqrt{18}}$ & $\sqrt{\sqrt{8}}$. Quòd enim sint commensurabiles, patet ex diuisione unius per alterũ. ut $\sqrt{\sqrt{18}}$ per $\sqrt{\sqrt{8}}$, facit $\sqrt{\sqrt{2}}\ 1\frac{1}{4}$, hoc est, $1\frac{1}{2}$, seu $\frac{3}{2}$. Vnde proportio $\sqrt{\sqrt{18}}$ ad $\sqrt{\sqrt{8}}$, est tanquam 3 ad 2. Sicut ergo aggregatũ ex 3 & 2 (id est 5) ad unitatem (quæ est tertia pars ex 3, & dimidia pars ex 2) facit proportionem quintuplam: sic necesse est ut aggregatum ex $\sqrt{\sqrt{18}}$ & $\sqrt{\sqrt{8}}$, sit quintuplum ad dimidium ex $\sqrt{\sqrt{8}}$, seu (qd' idem est) ad tertiã partem ex $\sqrt{\sqrt{18}}$. Vnde cum dimidium ex $\sqrt{\sqrt{8}}$ sit $\sqrt{\sqrt{2}}$, satis patet ut ex multiplicatione $\sqrt{\sqrt{2}}$ per 5, id est, per $\sqrt{\sqrt{25}}$ proueniat necessario, aggregatum ex $\sqrt{\sqrt{18}}$ & $\sqrt{\sqrt{8}}$ additis: scilicet $\sqrt{\sqrt{50}}$, facit quantum $\sqrt{\sqrt{18}}$ & $\sqrt{\sqrt{8}}$. Et est satis miranda res, calculationem fieri præcisam, in ijs quæ præcisam quantitatem in seipsis non habent. Sed addamus etiam Geometricam demonstrationem.

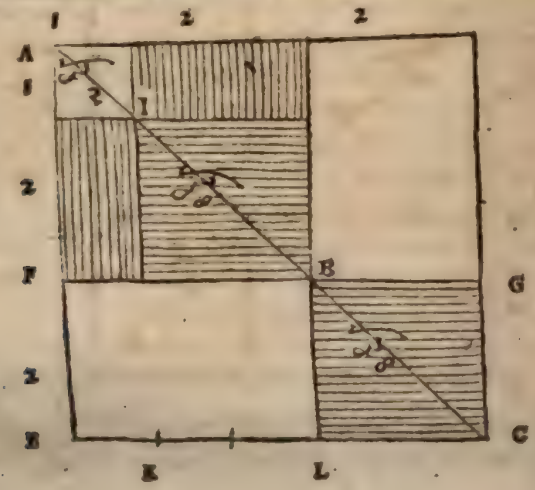
Quadratum diametri A B, æquatur quadratis duobus duorum laterum, A F, & F B, ut habet 46 primi.



Sic quadratum diametri B C æquatur duobus quadratis duorum laterum B G & G C. Vides autem, ut ex utraq; diametro, facta

facta sit una diameter A C, cuius quadratum æquabitur duobus quadratis, duorum laterum, uidelicet A E & E C. Cum autem diameter A B, faciat sua longitudine $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 18, & diameter B C faciat $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 8, faciatq; aggregatum ex eis $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 50, iuxta ea quæ superius tradidi: poteris iam uidere an figura respondeat, id est, an diameter A C ex lateribus A E & E C faciat $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 50.

Ea etiam quæ de subtractione commensurabilium medialiū dicenda uenīūt, sunt ijs quæ iam dicta sunt ferè similia: scilicet $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 8 ab $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 18, relinquit $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 2. nam ꝓportio eorū est $\frac{1}{2}$, ut patuit. Iam si subtrahātur 2 à 3, remanet unitas quæ est dimidiū ex 2. Ergo dimidiū etiam ex $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 8 relinquitur, dum $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 8 subtrahitur de $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 18. Respicit enim 2 ad $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 8, tanquam minus ad minus. Et 3 respicit ad $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 18, tanquam maius ad maius: scilicet $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 2 relinquitur. Est enim $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 2 dimidium ex $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 8, & tertia pars ex $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 18. Vnde si B C, superioris figuræ, abscindatur de A B, tunc relinquitur A 1, inferioris figuræ, faciteq; A 1 (ut satis uides) $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 2. Summa est. Quære proportionem addendorum medialium aut subtrahendorū, qua inuenta, ex inspectione terminorū eius satis uidebis, qd sit faciendū, siue addendi sint mediales, siue subtrahēdi.



Potest

Potest etiam hac figura demonstrari multiplicatio & diuisio. Scilicet B C est dupla ad I C. Facit autem B C √ 8. Et regula multiplicationis docet, ut multiplicatio √ 8 per 2, seu per √ 4 faciat √ 32. Vide ergo an diameter I C faciat √ 32, ex lateribus I K & K C. Sic de triplatione poteris figuras facere & probare. &c.

Item (ut de diuisionis demonstratione etiam dicam) I C diameter facit √ 32. Et B C est pars dimidia ipsius I C, quae facit √ 8. Vide iam an B C tantum faciat, ex lateribus B G & G C.

Vel per regulam De tri, potest ex eadem figura hac demonstrari & multiplicatio & diuisio. Vt, L C facit B C, quantum facit F B? hoc est, 2 facit √ 8, quantum facit 3? Vel, quantum facit B C. hoc est, 5? Vel sic, B C facit G C, quantum facit A B? hoc est, √ 8 facit 2, quantum facit √ 18? &c.

Imò per regulam De tri mediales commensurabiles & addere & subtrahere potes, id q̃d exẽplis paucis indicare sat erit.

Primum exemplum additionis.

VOlo addere √ 8 ad √ 18. Primo quæro proportionem inter illos mediales, quae est $\frac{1}{2}$. Huius proportionis terminos addo, facit 5. Igitur sic colligo:

2 facit 5. ergo √ 8, facit √ 50.

Vel sic pono atq; probo:

3 facit 5. ergo √ 18 facit √ 50.

Exemlpum subtractionis.

Volo subtrahere √ 8 à √ 50. Proportio est $\frac{5}{2}$. Subtraho igitur 2 à 5, remanẽt 3. Sic igitur pono numeros ad regulã De tri.

2 facit 3. ergo √ 8 facit √ 18.

Vel sic pono atq; probo:

5 facit 3. ergo √ 50, facit √ 18.

Secundum exemplum additionis.

VOlo addere √ cc 162 ad √ cc 2058. Proportio est $\frac{7}{5}$. Addo

terminos, facit 10. Sic ergo pono numeros ad regulam De tri.

3 facit 10. ergo $\sqrt{cc}$ 162, facit $\sqrt{cc}$ 6000.

Vel sic pono atq; probo:

7 facit 10. ergo $\sqrt{cc}$ 2058, facit $\sqrt{cc}$ 6000.

Exemlpum subtractionis.

Volo subtrahere $\sqrt{cc}$ 162 à $\sqrt{cc}$ 6000. Proportio est $\frac{10}{3}$. Vnde 3 à 10, remanent 7. Sic ergo pono numeros ad regulam.

3 facit 7. ergo $\sqrt{cc}$ 162, facit $\sqrt{cc}$ 2058.

Vel sic pono.

10 facit 7. ergo $\sqrt{cc}$ 6000, facit $\sqrt{cc}$ 2058.

Vel sic pono exemplum:

Volo subtrahere $\sqrt{cc}$ 2058, à $\sqrt{cc}$ 6000. Proportio est $\frac{10}{7}$. Vnde 7 à 10, remanent 3. Sic ergo stabũt numeri ad regulam.

7 facit 3. ergo $\sqrt{cc}$ 2058, facit $\sqrt{cc}$ 162.

Vel sic pono & probo:

10 facit 3. ergo $\sqrt{cc}$ 6000, facit $\sqrt{cc}$ 162.

Tertium exemplum additionis.

Volo addere $\sqrt{zzzz}$ 243 ad $\sqrt{zzzz}$ 3888. Proportio est $\frac{2}{1}$, Hos terminos addo, facit 3. Sic ergo stabit exemplum.

1 facit 3. ergo $\sqrt{zzzz}$ 243, facit $\sqrt{zzzz}$ 19683.

Vel sic stat.

2. 3. $\sqrt{zzzz}$ 3888, facit $\sqrt{zzzz}$ 19683.

Exemplum subtractionis.

Volo subtrahere $\sqrt{zzzz}$ 243, à $\sqrt{zzzz}$ 19683. Proportio est $\frac{3}{1}$. Subtraho 1 à 3, remanent 2. Vnde sic stat exemplum.

1. 2. $\sqrt{zzzz}$ 243, facit $\sqrt{zzzz}$ 3888.

Vel sic stat.

3. 2. $\sqrt{zzzz}$ 19683, facit $\sqrt{zzzz}$ 3888.

Vel sic muto exemplum.

Volo subtrahere $\sqrt{zzzz}$ 3888, à $\sqrt{zzzz}$ 19683. Proportio est $\frac{3}{2}$. Subtrabo 2 à 3, remanet 1. Vnde sic stat exemplum.

2. 1. $\sqrt{zzzz}$ 3888, facit $\sqrt{zzzz}$ 243.

Vel

Vel sic stat.

3. 1. √ 19683. facit √ 243.

Et sic de additione & subtractione medialium aliarum specierum similia facies.

De usu illorum medialium, quorum Euclides nullam mentionem facit in suo decimo: & de duplatione cubi. Cap. VII.

TSI Euclides in suo decimo, duabus solũmodo speciebus medialium numerorum utitur, tamen nõ est putandum, mediales numeros aliarum specierum, esse adeo steriles, ut usu careant, & Arithmeticis Geometricisq; speculationibus nihil conferant. Quantum uero illis conferãt, experimur tum maxime, quando ea quæ de rationalibus numeris didicimus, transferre conamur etiam ad numeros irrationales, ut sunt progressiones Arithmeticæ, Geometricæ, Harmonicæ, & Cõtraharmonicæ. Item proportionum diuisiones, de quibus hoc loco exemplorũ causa aliqua uidebimus, et primo de proportionũ diuisionibus.

De proportionum diuisionibus.

AD proportionum diuisiones pertinet ars ponendi media proportionalia, quotquot libuerit, inter numeros quoscunq;. Eam artem uolo iam paucis docere.

Primo. Si unum medium constituendum sit inter duos numeros aliquos rationales, tũc recipiendi sunt primæ speciei mediales, uidelicet mediales quadrate: ut sunt √ 2. √ 3. √ 5. &c.

Si autem duo media proportionalia sint constituenda, erunt tibi necessarij, secundæ speciei mediales, uidelicet mediales cubice: ut sunt √c 2. √c 3. √c 4. √c 5, &c.

Si uero tria media proportionalia uelis constituere, opus habebis medialibus tertiæ speciei, uidelicet medialibus zensizensice. ut sunt hi, √ 2. √ 3. √ 5. √ 6. &c.

Et si quatuor media proportionalia sint constituenda, uti oportebit quarta specie medialium: uidelicet mediales surdesolide recipiendi erunt, ut sunt hi √ß2.√ß3.√ß4 &c.

Et sic deinceps.

Secundo. Cognita specie medialium recipienda, cõstitue progressionem Geometricam, cuius terminus primus sit unitas, & secundus terminus sit quotiens diuisionis numerorum, inter quos constituenda sunt media proportionalia, minore uidelicet diuidente maiorem. Itaq; secundum radicem illam progressionis progredere, donec tot habeas media ꝓportionalia, quot constituenda fuerant. Notum uero est, ut numerus terminorum semper excedat numerum mediorum, binario: nam ubi sunt media, oportet esse extrema.

Tertio. Præpone cuilibet termino progressionis factæ, signum radicale, medialium illorum, quorum species tibi utenda est, ut dixi superius: uidelicet, si unum medium sit constituendum, recipiendum est hoc signum √ɜ. si duo media sint constituenda, recipiendum est hoc signum √cꝛ. Et sic deinceps.

Quarto. Extractis radicibus signorum extrahendis, dele signa, quorum radices sunt extractæ.

Vt (exempli gratia) si uideris signum radicale quadratorũ præpositum numero quadrato, tunc extractam radicem illam pone absque signo illo. Et sic de alijs signis intellige similia esse facienda.

Quinto. Pro extremis progressionis tuæ factæ, pone tuos numeros, inter quos constituenda sunt media, & per minorem multiplica media singula. Sed singula hæc te, exemplum quod iam ponam, docebit plenius, suo ordine.

Exemplum.

Volo statuere quinq; media proportionalia inter 6 & 18.

Primo recipio signum hoc medialium quintæ speciei √ɜcꝛ, illudq; reseruo in usum quem uidebis.

Secundo constituo progressionem incipientem ab unitate, cuius

cuius progressionis radix sit quotiens diuisionis 18 per 6. i. 3. Et quia quinq; media requiro, ideo ponendi sunt termini progressionis septem: uidelicet,

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729.

Tertio, singulis terminis illis præpono signum radicale, qd̄ mihi primo reseruaueram, tunc stabit progressio sic:

$\sqrt{\text{ȝ}}$ 1. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 3. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 9. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 27. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 81. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 243. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 729.

Quarto, extractis radicibus signorum delendorum, sic stabit progressio:

1. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 3. $\sqrt{}$ 3. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 3. $\sqrt{}$ 9. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 243. 3.

Quinto, multiplica singulos terminos illos per 6 (qui est minor numerus eorum inter quos constituenda sunt media proportionalia) tunc habebis extremos tuos terminos, cum interpositis suis medijs proportionalibus inuentis. ut

6. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 139968. $\sqrt{}$ 648. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 108. $\sqrt{}$ 1944. $\sqrt{\text{ȝ}}$ 11337408. 18.

Quòd autem sit continua proportionalitas, per illos terminos septem, poteris probare secundum ea quæ dixi libro 1. de proportionalitate Geometrica. Vt si probare uelis hunc terminum $\sqrt{\text{ȝ}}$ 139968. mediare proportionaliter, inter 6 & $\sqrt{}$ 648. multiplica $\sqrt{}$ 648 per 6 (id est, per $\sqrt{}$ 216) facit $\sqrt{}$ 139968, de quo extrahe radicem quadratam, facit $\sqrt{\text{ȝ}}$ 139968.

Et sic de alijs.

De duplatione Cubi.

VT autem usus iste medialium numerorum, ab Euclide neglectorum in suo libro elementorū decimo, magis appareat esse illustris, uolo & ego numeros mediales cubice, ad lineas contrahere, & eorum beneficio, expedire quæstionem de duplatione cubi, quam uideo à quibusdam anxie & laborioſe esse tractatam, magnis de ea re uoluminibus conscriptis.

Sit igitur cubus duplandus altitudine sex pedum. Recipio primo lineam, ad mensuram altitudinis cubi duplandi. Secūdo recipio lineam, quæ sit dupla ad altitudinem illam cubi du-

plandi (& si cubus triplandus esset, recipienda esset linea ad altitudinem cubi triplandi tripla, & sic deinceps). Atq; ita inter duas illas lineas receptas, inuenio duas alias lineas, q̃ proportionaliter medient inter eas. Erit autem prior linea (sic proportionaliter medians) mensura cubi fiendi, qui sit duplus ad cubum datum atq; duplandum.

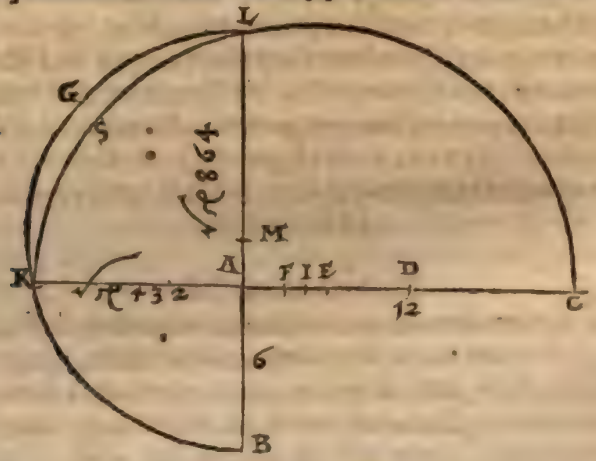
Numeri ad lineas contrahendi sic stant.

6. $\sqrt{c}$ 432. $\sqrt{c}$ 864. 12.

Cubi harum radicum sunt hi:

216. 432. 864. 1728.

Vides certe cubum secundũ, esse duplũ ad cubum primũ. Et est 6 radix cubica primi cubi: atq; $\sqrt{c}$ 432 est radix cubica secundi cubi. Restat ergo, ut $\sqrt{c}$ 432 sortiatur lineã iustæ longitudinis, ut q̃ mensura sit cubi fiendi, qui faciat sua soliditate 432.



Sic autem lineas illas commodissime inuenies.

Primo protrahe duas lineas obscuras, intersecantes sese, ad quatuor angulos rectos: ut sunt illæ pertranseũtes L B & K C. Et sic lineam minoris extremitatis designa, à puncto intersectionis

ctionis, deorsum, super obscuram, sicut uides designatam esse lineolam A B. Lineam autem maioris extremitatis, designa, super alteram lineam obscuram, ab eodem puncto intersectionis, dextrorsum, sicut uides designatam lineam A C. Deinde ad mensuram A B, abscinde A D, de A C, ita uidelicet, ut A D & A B sint æquales. Postea diuide A D in duo æqualia, in pũcto E. Diuide secundo A E in duo æqualia, in puncto F. Tertio diuide F B in duo æqualia, in puncto I. Et tũc in puncto I pone pedem circini immobilem, & alterum pedem circini extende in punctum C, id est, in finem lineæ maioris extremitatis: atq; ita describe semicirculum, ut uides K H L C descripsi supra diametrum K C. Atq; ita habes duo media proportionalia, uidelicet K A, & L A, posita inter extremitates duas, B A & A C. Id quod ex ipsa figura facile est uidere intelligenti propositionem Euclidis nonam, libri elementorum sexti: scilicet K A, est medium proportionale inter A B & A L. Et ea causa (uidelicet causa probationis) descripsi semicirculum supra lineam L B, uidelicet B K G L. Et eadem ratione, qua K A mediat proportionaliter inter B A & A L, mediat etiam L A proportionaliter inter K A & A C.

Video autem hic quandam disputationem, de numeris irrationalibus contractis ad lineas: sed illam uolo relinquere contentiosis.

Cæterum quæ de diuisione proportionum ulterius dicenda sunt, uolo reseruare ad caput sequens.

De progressione Geometrica medialium &c.

VTiles etiam sunt mediales numeri (quos Euclides in suo decimo neglexit) ad statuendas uarias progressiones, modo facilimo. Scilicet:

Posita progressione Geometrica numerorum rationalium quacunq;, si cuilibet termino præposueris idem signum radicale, tunc statim facta est progressio medialium geometrica. ut

6.	12.	24.	48.	96.	facit
√℞6,	√℞12,	√℞24,	√℞48.	√℞96,	Et sic de alijs.

Quando progressio Geometrica medialium quadrate, incipit ab unitate, tunc semper inter duos rationales cadit unus medialis, ut hic uides:

1. √ȣ 2. 2. √ȣ 8. 4. √ȣ 32. 8. √ȣ 128. 16.

Quando progressio Geometrica medialium cubice, incipit ab unitate, tunc semper inter duos rationales, cadunt duo mediales, ut hic uides:

1. √c̃ 2. √c̃ 4. 2. √c̃ 16. √c̃ 32. 4.

Sic quando progressio Geometrica medialium zensizensice incipit ab unitate, tunc semper inter duos rationales, mediant tres mediales: & sic de alijs in infinitū. Scilicet in progressione Geometrica medialium surdesolide, mediant semper quatuor mediales inter duos rationales, &c.

De progressionibus medialium generaliter.

POsita progressione Arithmetica terminorum rationalium, si termini illi multiplicentur per numerum aliquem medialem, tunc oritur progressio Arithmetica medialium.

Posita progressione Geometrica terminorum rationalium, si termini illi multiplicentur per numerum aliquem medialem, tunc oritur progressio Geometrica medialium.

Posita progressione Harmonica terminorum rationalium, si termini illi multiplicentur per numerum aliquem medialem, tunc oritur progressio Harmonica medialium.

∇ Progressiones rationalium numerorum multiplicandæ per √ȣ 2.

20.	50.	80.	Arithmetica.
20.	40.	80.	Geometrica.
20.	32.	80.	Harmonica.

Progressiones medialium.

√ȣ 800.	√ȣ 5000.	√ȣ 12800.	Arithmetica.
√ȣ 800.	√ȣ 3200.	√ȣ 12800.	Geometrica.
√ȣ 800.	√ȣ 2048.	√ȣ 12800.	Harmonica.

Obserua

Obserua etiam, ut Geometrica mediet inter Arithmeticam & Harmonicam: nam media etiam trium progressionum constituunt Geometricam. Sed hæc alio loco fuerant obseruanda.

De proportionibus irrationalibus. Caput VIII.

BREVIS adhuc restat tractatio proportionum, præter illa quæ in libro primo tradita sunt. Breuis inquam, eò quòd ferè omnes regulæ, datæ de proportionibus rationalium numerorum, quadrent ad proportiones medialium, de quibus mihi nunc breuibus est agendum, breui hoc capite.

Docui autem libro primo, proportiones aut esse rationales aut irrationales. Sunt uero proportiones illæ omnes rationales, quæ terminos habent commensurabiles. Quæ autem terminos incommensurabiles habent, sunt irrationales. Vnde quilibet numerus medialis, ad numerũ rationalem, habet proportionem irrationalem. Non autẽ omnis medialis ad medialem, habet proportionem irrationalem: scilicet $\sqrt{\sqrt{}}6$ ad $\sqrt{\sqrt{}}24$ rationalem proportionem habet, uidelicet duplam.

Quando unus terminus proportionis rationalis, fuerit irrationalis, tũc necesse est reliquũ terminũ eiusdem proportionis etiam esse irrõnalem. Ista notiora sunt, q̃ ut exemplis egeant.

Quando unus terminus irrationalis fuerit irrationalis, tunc terminus reliquus potest esse rationalis.

Quando unus terminus proportionis irrationalis fuerit rationalis, tunc necesse est reliquum terminum esse irrationalem.

Sunt autem proportiones irrationales minutiæ proportionum irrationalium. ut $\sqrt{\sqrt{}}6$ ad $\sqrt{\sqrt{}}2$, est minutia triplæ proportionis. Est enim dimidia pars triplæ. Sic 6 ad $\sqrt{c.}432$, est tertiæ pars duplæ proportionis: ut patet ex ijs quæ dicta sunt capite præcedenti, de duplatione cubi. Patet etiam ex regula, quæ do-

cet proportiones denominare: ſcilicet diuiſo termino maiore per minorem, denominatur ipſa proportio, ab illo diuiſionis quotiente. Vt diuiſo √cc 432 per 6, ſeu per √cc 216, producitur ille quotiens √cc 2. Et ſignificat binarius duplam proportionẽ. Signum aũt radicale, ſignificat partẽ tertiã noiatæ ꝓportionis.

Vnde propoſitis numeris rationalibus quibuscũq;, ſi utroq; termino præponatur ſignum radicale quadratorum, mox erit proportio illa (quæ erat inter duos illos numeros rationales) diuiſa in duo æqualia, alteraq; pars diuiſionis illius p numeros illos ſic ſignatos repræſentata. ut 3 ad 2, facit ſeſquialteram. Sed √z 3 ad √z 2, facit dimidiam partẽ ſeſquialteræ. Et ſic ſimilia intelligenda ſunt de ſimilibus. ut √cc 3 ad √cc 2, facit tertiam partem ſeſquialteræ proportiõis. Sic √zz 3 ad √zz 2, facit quartam partẽ ſeſquialteræ proportionis. Sic √ß 3 ad √ß 2, facit quintam partem ſeſquialteræ ꝓportionis. Et ſic deinceps, ut facile ſit, dare proportionem irrationalem medialium, ſub quacunq; petita denominatione, ſicut facile eſt proportionem propoſitã denominare, ut iam docui. Vt ſi danda ſit pars ſexta proportionis triplæ ſupertripartientis quintas, tunc ſecundum quotientem denominantem proportionem ipſam, uidelicet $3\frac{3}{7}$, inuenio hos duos numeros 8 & 5 (ut libro primo de ꝓportionibus docui) ijs ergo terminis inuentis, præpono ſignum medialium ſextæ ſpeciei, uidelicet √z cc. ut √z cc 8 ad √z cc 5. eſt ſexta pars triplæ ſupertripartientis quintas, &c.

De proportionibus medialium fractorum.

Regula quæ datur de proportionibus denominandis, nullam omnino exceptionem habet. Dum igitur uenerint tibi medialium fractorum proportiones denominandæ, diuide fractũ maiorem per minorem: uel, ſi dubitas uter fractorum ſit maior, reduc eos ad eundẽ denominatorẽ, & reiectis denominatoribus, diuide numeratores. ut ea eſt proportio inter √z $\frac{2}{3}$ & √z $\frac{5}{7}$, q̃ eſt inter √z 8 & 3, uidelicet ꝓportio ſeſquioctauæ dimidiatæ.

De

De proportionibus irrõnalium numeroꝝ rationalibus.

¶ Proportiones rationales, irrationalium terminorum, nihil differũt à ꝓportionibus rationalibus, rationaliũ terminoꝝ. Scilicet eadem proportio eſt omnino inter 6 & 3, quæ eſt inter $\sqrt{\text{ꝫ}}\,24$ & $\sqrt{\text{ꝫ}}\,6$. Dupla enim eſt dupla, qualitercunq; ſignetur ſeu repræſentetur, &c.

De proportionibus denominandis à quotiente habente ſignum additorum aut ſubtractoꝝ.

¶ Proportiones illæ, quarum terminus minor (dum diuidit terminum maiorem) facit quotientem habentem ſignum $+$ aut $-$, duplicem habent denominationem, ut proportio quã facit $10+\sqrt{\text{ꝫ}}\,75$, ad 5 (cuius quotiens denominãns ipſam, eſt $2+\sqrt{\text{ꝫ}}\,3$) uocatur: uel, dupla plus dimidia triplæ: uel uocatur, dimidia duodecuplæ: ut ſatis uides ex hac repræſentatione, $2+\frac{1}{1}\sqrt{\text{ꝫ}}\,3$ ſcilicet dupla addita ad dimidiam triplæ, facit dimidiam duodecuplæ. uidelicet $\frac{2}{1}$ ad $\sqrt{\text{ꝫ}}\,\frac{3}{1}$, facit $\sqrt{\text{ꝫ}}\,\frac{12}{1}$. Sic etiã $10-\sqrt{\text{ꝫ}}\,75$ ad 5, duplicem denominationem habet, ut uides ex hac proportionis repræſentatione, $2-\frac{1}{1}\sqrt{\text{ꝫ}}\,3$, ſcilicet dimidia triplæ, ſubtracta à dupla, relinquit dimidiam ſeſquitertiæ, &c.

De Algorithmo proportionum irrationalium.

¶ Algorithmus proportionũ irrõnalium ex eiſdem omnino regulis cõſtat, ex quibus Algorithmus rationaliũ proportionũ conſtat, ut hic nihil opus ſit ulla alia regula. Sed forte exempla lector aliquis requiret: hæc non grauabor apponere, præter ea, quæ paulo ſuperius poſui.

Exemplum additionis.

$\sqrt{\text{ꝫ}}\,\frac{18}{2}$ ad $\frac{6}{\sqrt{\text{ꝫ}}\,2}$ facit $\frac{9}{1}$

Exemplum multiplicationis.

$\sqrt{\text{ꝫ}}\,\frac{18}{2}$ duplata facit $\frac{9}{2}$

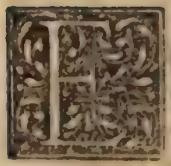
Exemplum ſubtractionis.

$\frac{6}{\sqrt{\text{ꝫ}}\,2}$ ab $\frac{9}{1}$ remanet $\sqrt{\text{ꝫ}}\,\frac{18}{2}$ uel $\frac{3}{\sqrt{\text{ꝫ}}\,2}$

Exemplum diuiſionis.

$\frac{9}{2}$ dimidiata facit $\sqrt{\text{ꝫ}}\,\frac{9}{2}$ uel $\sqrt{\text{ꝫ}}\,\frac{18}{2}$

De Algorithmo numerorum irrationalium compositorum, & tanquam compositorum. Caput IX.



EX Algorithmo medialium, atq; ex Algorithmo signorum additorum & subtractorum, conficitur Algorithmus numerorum irrationalium compositorum & tanquam compositorũ. Algorithmum autem medialium habuimus capite sexto. Restat igitur, ut etiam Algorithmum signorũ horum +. —. ponam.

De repræsentatione & enunciatione.

Signum hoc + (quod additorum dicitur) significat plus. ut $6+\sqrt{12}$, sic enunciatur, Sex plus radice zensica de 12.

Signum uero hoc — (quod subtractorum dicitur) significat minus. ut $\sqrt{12}-\sqrt{8}$, sic enunciatur, Radix zensica de 12 minus radice zensica de 8. Et sic de alijs.

Regulæ additionis & subtractionis.

1. Eadem signa idem signum ponunt, nisi dum in subtractione numeri præponere ponuntur.

2. Diuersa signa commutant species, & A ponit M, S uero ponit S.

Regulæ multiplicationis & diuisionis.

1. Eadem signa ponunt signum additorum.

2. Diuersa signa ponunt signum subtractorum.

Dici uero satis non potest, quantam uim habeant hæc duo signa + & —, per regulas illas quatuor. Non enim seruiunt solummodo irrationalibus numeris, sed etiam Cossicis, ut suo loco copiose dicam. Vix autem sunt regulæ in tota Arithmetica aliæ, quas magis uelim commendari memoriæ, quàm has quatuor. Et ea causa illas studiose sub breuitate tali coartaui, ut obscuritatem etiam inuolueret. Sed euoluenda est illa obscuritas expositionibus & exemplis, quatenus breuitas prædicta permaneat commoda.

Primo

V Primo. Eadem signa idem signū ponere dicuntur, quādo ponitur signum +, ex eodem signo bis posito. Vt uides in exemplis duobus additionis, ex addito & addito, fieri additum: & in duobus alijs exēplis additionis uides ex subtracto & subtracto, fieri subtractum.

Exempla additionis.

Exemplum primum.	Exemplum secundum.
$6 + \sqrt{\text{ℵ}}18$	$\sqrt{\text{ℵ}}27 + \sqrt{\text{ℵ}}8$
$4 + \sqrt{\text{ℵ}}8$	$\sqrt{\text{ℵ}}12 + \sqrt{\text{ℵ}}2$
$10 + \sqrt{\text{ℵ}}50$	$\sqrt{\text{ℵ}}75 + \sqrt{\text{ℵ}}18$
Exemplum tertium.	**Exemplum quartum.**
$\sqrt{\text{ℵ}}162 - 2$	$\sqrt{\text{ℵℵ}}243 - \sqrt{\text{ℵℵ}}162$
$\sqrt{\text{ℵ}}200 - 3$	$\sqrt{\text{ℵℵ}}48 - \sqrt{\text{ℵℵ}}32$
$\sqrt{\text{ℵ}}722 - 5$	$\sqrt{\text{ℵℵ}}1875 - \sqrt{\text{ℵℵ}}1250$

Dicuntur autem Addita, quæ sequūtur signum additorum. Sic subtracta dicuntur illa, quæ sequuntur signum —. Numeri enim qui sequuntur signum +, aut signum —, pertinent ad ipsum signum. Numeri uero, qui præcedunt signum +, aut signum —, non pertinent ad signum ipsum. Sequuntur autem numeri, non signati signo +, aut signo —, regulas numerorū signatorū signo +, ut uidebis ex quibusdā exēplis sequentibus.

Exempla subtractionis.

$\sqrt{\text{ℵℵ}}1875 + \sqrt{\text{ℵℵ}}1250$	$\sqrt{\text{ℵ}}50 - 5$
$\sqrt{\text{ℵℵ}}243 + \sqrt{\text{ℵℵ}}162$	$\sqrt{\text{ℵ}}8 - 2$
$\sqrt{\text{ℵℵ}}48 + \sqrt{\text{ℵℵ}}32$	$\sqrt{\text{ℵ}}18 - 3$

Non puto esse necesse, ut de medialium subtractione aut additione te ulterius moneam. Neq; necesse esse puto, ut plures species medialium inducam pro exemplis, cum satis scias, ea quæ de his dico quæ ponuntur, intelligenda esse similiter de ijs quæ non ponuntur.

¶ Secundo. Sequitur exceptio in exemplis ſubtractionis. Niſi (inquit regula) dum in ſubtractione numeri præpoſtere ponuntur. Dicuntur autem numeri præpoſtere poni, quando in ſubtractione maius ponitur ſub minore, quaſi uidelicet maius poſſit ſubtrahi à minore. Hoc caſu, eadem ſigna non ponunt idem ſignum, ſed ponunt ſignum diuerſum: ſcilicet, ex + & + non fiet +, ſed fiet minus. Sic ex — & — non fiet —, ſed fiet +. ut uides in exemplis ſequentibus.

Exempla de exceptione in ſubtractione.

$\sqrt{\frac{8}{}}50 + 2$	$\sqrt{\frac{8}{}}50 - 2$
$\sqrt{\frac{8}{}}18 + 4$	$\sqrt{\frac{8}{}}18 - 4$
$\sqrt{\frac{8}{}}8 - 2$	$\sqrt{\frac{8}{}}8 + 2$

De ſola ſubtractione poſſunt dari exẽpla exceptionis: nam in additione ponunt eadem ſigna, idem ſignum, ſine aliqua exceptione. Satis autem uides, ut numeri +2 & +4, item — 2 & — 4, ponantur præpoſterè: ſcilicet maior, qui fuerat ſubtrahendus, ponitur inferius, ſub minore. Et ex iſta præpoſtera poſitione, fit etiam præpoſtera operatio, uidelicet ut ſuperior ab inferiore ſubtrahatur. Itaq; +2 ab +4, facit —2: & —2 ab —4, facit +2.

Sequuntur alia exceptionis exempla.

$\sqrt{\frac{8}{}}50 + 6$	$\sqrt{\frac{8}{}}72 + 2$
$\sqrt{\frac{8}{}}72 + 2$	$6 + \sqrt{\frac{8}{}}18$
$4 - \sqrt{\frac{8}{}}2$	$\sqrt{\frac{8}{}}18 - 4$

In priore exemplo ponuntur præpoſterè, numeri priores. Vnde ex eis fit $-\sqrt{\frac{8}{}}2$. In poſteriore uero ponuntur 6 & 2 præpoſtere, ideo ex eis fit —4, &c.

¶ Tertio. Sequitur regula ſecunda, dicens: Diuerſa ſigna commutant ſpecies. Loquitur autem regula de ſpeciebus operationum Algorithmi. Quod ideo dico, ne exiſtimes ſpeciem aliquam medialium eſſe mutandam, Commutare ſpecies, ſenſu

(ſenſu regulæ) eſt ſubtrahere, in exemplis additionis; & addere, in exemplis ſubtractionis, ut uidebis.

Exempla additionis pro regula ſecunda.

√3 50 + 3	√3 50 − 3
√3 32 − 5	√3 32 + 5
√3 162 − 2	√3 162 + 2

Vides ut in exemplis illis additionis, fiat ſubtractio, in ijs numeris quos reſpiciunt ſigna diuerſa. Signa autem non reſpiciunt retrorſum, quare in ijs qui præcedunt ſigna illa diuerſa, non fit ſubtractio ſed additio.

Exempla ſubtractionis pro regula eadem ſecunda.

√3 162 + 2	√3 162 − 2
√3 50 − 3	√3 50 + 3
√3 32 + 5	√3 32 − 5

Vides & hic, ut in exemplis ſubtractionis, fiant additiones in numeris illis quos ſigna + & − reſpiciunt.

¶ Quarto. Regula loquitur de ponendis ſignis illis + & −.

A, inquit, ponit M. Hoc eſt, in additione (quæ per literam A deſignatur) ponitur ſignum numeri maioris (id quod litera M deſignat. Et S ponit S. Hoc eſt, in ſubtractione (quæ per literam S deſignatur) ponitur ſignum numeri ſuperioris, id quod ſecundum S deſignat. Exemplum horum uidere potes in exemplis ſuperioribus quatuor proximis, quorum duo ſunt de additione, & duo de ſubtractione. In additionum exemplis non curandum eſt, an numerus maior (cuius ſignum poni debet) ſtet ſuperius ſiue inferius. Et in ſubtractione non eſt curandum, an ſuperior numerus (cuius ſignum poni debet) ſit maior ſiue minor.

Alia

Alia exempla additionis.

$8 - \sqrt{\ }50$	$\sqrt{\ }50 + 6$
$\sqrt{\ }242 - 12$	$24 - \sqrt{\ }242$
$\sqrt{\ }72 - 4$	$30 - \sqrt{\ }72$

Primo addo $+8$ ad -12 (id est, subtraho propter diuersa illa signa $+$ & $-$) facit -4. Deinde similiter addo $+\sqrt{\ }242$ ad $-\sqrt{\ }50$ (id est, subtraho) facit $+\sqrt{\ }72$.

Secundo, in secundo exemplo, addo $+\sqrt{\ }50$ ad $-\sqrt{\ }242$, (id est, subtraho) facit $-\sqrt{\ }72$. Deinde $+24$ ad $+6$, facit $+30$.

Exempla subtractionis.

$\sqrt{\ }72 - 4$	$30 - \sqrt{\ }72$
$8 - \sqrt{\ }50$	$\sqrt{\ }50 + 6$
$\sqrt{\ }242 - 12$	$24 - \sqrt{\ }242$

Primo, subtraho $+8$ à -4 (id est, addo propter diuersa illa signa $+$ & $-$) facit -12. Deinde subtraho $-\sqrt{\ }50$ à $+\sqrt{\ }72$ (id est, addo) facit $+\sqrt{\ }242$.

Secundo, in secundo exemplo, subtraho $+\sqrt{\ }50$ à $-\sqrt{\ }72$ (id est, addo) facit $-\sqrt{\ }242$. Deinde subtraho $+6$, à $+30$, remanent $+24$.

Sicut autem frustrà ponitur cifra ante figuram significatiuam (ut hic 08) ita frustra poneretur signũ $+$ ante numeros initiales seu fundamẽtales (ut sic $+\sqrt{\ }72 - 4$) nihilominus tamen subintelligitur signum $+$ præponi cuilibet numero initiali seu fundamẽtali, nisi expresse habeat signũ subtractionis.

Cautela quædam utilis pro quibusdam subtractionibus.

Quando in ordine superiori occurrerit locus uacuus, tu pone in locum illum cifram semper signatam, signo hoc $+$. Et tunc operaberis secundum regulas additionis & subtractionis datas.

Exempla

Exempla cautelæ.

$\sqrt{\ }320+16$	$\sqrt{\ }180+0$
$\sqrt{\ }320-8$	$\sqrt{\ }320-8$
$24-\sqrt{\ }320$	$8-\sqrt{\ }20$

Vides in exemplo priore, ut subtraxerim $\sqrt{\ }320-8$ de 16, & ut $\sqrt{\ }0$. i. nihili signum, posuerim in locum uacuū, cum signo additorum subintelligendo.

Sic in posteriore exemplo subtraxi $\sqrt{\ }320-8$ à $\sqrt{\ }180$, posuíq; o in locum uacuum, cum signo + expresso.

Vel pro cautela illa, hac utere regula. Commuta singula signa illa + & —, in ijs quæ debent subtrahi (id est, ubi inueneris +, tu pone —, & ubi inueneris — pone tu +) sicq; uno ordine omnia scribe, uidelicet post illa à quibus fieri debet subtractio: deinde reduc reducenda.

Exemplum.

Volo subtrahere $\sqrt{\ }180-8$ de $\sqrt{\ }320$.

Sic stabunt particulæ.

$\sqrt{\ }320-\sqrt{\ }180+8$.

Reductæ particulæ (id est, subtracto $\sqrt{\ }180$ de $\sqrt{\ }320$) sic stabit relictum subtractionis.

$8+\sqrt{\ }20$.

Aliud exemplum illius regulæ

Volo subtrahere $8-\sqrt{\ }12$ de $\sqrt{\ }72-4$.

Sic stabit ordo, $\sqrt{\ }72-4-8+\sqrt{\ }12$.

Sic stabit ordo reductus: $\sqrt{\ }72+\sqrt{\ }12-12$.

Ego soleo in hujusmodi numerorum exemplis omnia sic ponere, ut referantur omnia ad numerū fundamentalem seu initialem: uariata enim relatione tali, oporteret uariare etiam sæpe regulas aliquas, quod non uidetur esse consultum.

De multiplicatione.

Regula multiplicationis & diuisionis prima, sic dicit: Eadem signa, ponunt signum additorum. Siue igitur multipli

tes plus in plus, siue multiplices minus in minus, semper ponendum est signum +. Vt + 8 in + 6, facit + 48. Sic — 8 in — 6, facit + 48.

Secunda regula sic dicit:

Diuersa signa, ponunt signum subtractorum. Vt si multiplices + 8 in — 6, facies — 48. Sic — 5 in + 7, facit — 35, &c.

Exemplum multiplicationis.

6 — √ȣ 20
8 — √ȣ 45

48 + 30 — √ȣ 1280 — √ȣ 1620

Hæc addita, seu ad se reducta, faciunt 78 — √ȣ 5780.

Aliud exemplum.

√ȣȣ 288 — √ȣȣ 648
√ȣȣ 128 — √ȣȣ 162

√ȣ 192 + 18 — √ȣ 288 — √ȣ 216.

Et sic de alijs exemplis.

De diuisione.

Diuisio probat multiplicationem, sicut multiplicatio diuisionem, ut 48 — √ȣ 1280 — √ȣ 1620 + 30 (8 — √ȣ 45.
8 — √ȣ 20 √ȣ 64 — √ȣ 20

Vides hic summã multiplicationis ex primo exemplo productam, diuisam per multiplicandum, atq; in quotiente redijsse multiplicantem.

Sic summa multiplicationis secũdi exempli, diuisa per multiplicantem, producit multiplicandum. ut

√ȣ 192 — √ȣ 288 — √ȣ 216 + 18 (√ȣȣ 288 — ȣȣ 648.
√ȣȣ 128 — √ȣȣ 162 √ȣȣ 128 — √ȣȣ 162

Sed huiusmodi exempla, dicũtur exempla arte facta seu parata: quæ hoc loco etiam ideo ponere uolui, ut satisfacerem regulis, quas de multiplicatione & de diuisione posui. Videbis enim in Algebra aliquando, ut profit cognitio talis signorum. Oportet autẽ meminisse regularum (de diuisione medialium) positarum

positarum. Vt dum quotientem uelis quærere in $\sqrt{\text{ß}}192$ per diuisorem $\sqrt{\text{ßß}}128$, ipsum diuidendum reducas ad simile signum ei quod habet diuisor, scilicet numerum signi multiplica in se quadrate: & sic recipiet productum illud signum zensizensicū, scilicet ex $\sqrt{\text{ß}}192$ fiet $\sqrt{\text{ßßß}}36864$, & ex $\sqrt{\text{ß}}288$ fiet $\sqrt{\text{ßßß}}82944$, & ex $\sqrt{\text{ß}}216$ fiet $\sqrt{\text{ßßß}}46656$, & ex 18 fiet $\sqrt{\text{ßßß}}104976$. Quod autem posui mediales zensice pro medialibus zensizensice, feci breuitatis gratia, ut paucis multa significarem, & ut uno ordine totus posset complecti diuidendus cum quotiente.

Et si in exemplo posito nondū uides regulas illas per omnia quadrare ad diuisionem, ita fac. Exemplum illud iam positum inuerte paulisper, hoc modo:

$$-\sqrt{\text{ß}}288 + \sqrt{\text{ß}}192 + 18 - \sqrt{\text{ß}}216 \quad (\sqrt{\text{ßß}}288.$$
$$--\sqrt{\text{ßß}}162 + \sqrt{\text{ßß}}128.$$

Atq; ita perge diuidendo ut prius, scilicet $-\sqrt{\text{ßß}}162$ diuidens $--\sqrt{\text{ßß}}82944$, faciet quotientem $+\sqrt{\text{ßß}}288$, &c.

Sic simile uidebis in altero exemplo quod posui, si illud sic inuerteris:

$$-\sqrt{\text{ß}}1280 + 48 + 30 - \sqrt{\text{ß}}1620 \quad (8$$
$$--\sqrt{\text{ß}}20 + 6$$

Sed tamē regulariter nihil potest esse diuisor, nisi quod à signis + & — sit solutum, ut est rationalis aut medialis numerus.

Vnde cum tibi occurrerit diuisor qui habeat signū + uel —, regula quadam mutandi erunt termini proportionis, quæ fuerit inter diuisorem & diuidendum, ita ut terminus diuidens fiat aut numerus rationalis, aut medialis.

Regula iuxta XVIII, septimi Euclidis.

DIuisorem tuum scribito bis, & in altero eorum commuta signum additorum, uel subtractorum, in signum diuersum, (hoc est, si habuerit signum +, facito pro eo — : si autem habeat —, facito pro eo +) & illam summam sic mutatam in diuersum signum, multiplica in utrunq; terminum tuæ proportionis, hoc est, in diuisorem tuū, & in diuidendum.

Sic enim fiet, ut ex diuisore composito, aut tanquã composito, fiat diuisor rationalis, aut medialis, & nihilominus tamẽ manebit proportio prior illæsa, ut non possit nisi debitus quotiens prouenire, ex ea diuisione sic parata.

Sumpta est hæc regula ex decimaoctaua propositione septimi libri Euclidis, quæ sic dicit: Si unus numerus ducatur in duos, tantus erit duorum inde productorum, alter ad alterum, quantus duorum multiplicatorum erat alter ad alterum.

Exemplum diuisionis primum.

Volo diuidere, $66 - \sqrt{\text{ж}}\,2000$, per $8 - \sqrt{\text{ж}}\,45$. multiplico utrunq; (id est, diuisorem & diuidendum) per $8 + \sqrt{\text{ж}}\,45$. Tunc fit ex diuisore, i. ex $8 - \sqrt{\text{ж}}\,45$. ea multiplicatione, 19, nouus diuisor. Et ex diuidendo, i. $66 - \sqrt{\text{ж}}\,2000$. ea multiplicatione, fit $228 + \sqrt{\text{ж}}\,7220$, nouus uidelicet diuidendus. Prouenit autem ex diuisione illa, iste quotiens $12 + \sqrt{\text{ж}}\,20$.

Proba. Hoc est, multiplica $12 + \sqrt{\text{ж}}\,20$ in $8 - \sqrt{\text{ж}}\,45$, tunc proueniet $66 - \sqrt{\text{ж}}\,2000$.

Exemplum diuisionis secundum.

Volo diuidere 6 per $\sqrt{\text{ж}}\,12 + \sqrt{\text{ж}}\,6$. Multiplico igitur utrunq; per $\sqrt{\text{ж}}\,12 - \sqrt{\text{ж}}\,6$, tunc ex $\sqrt{\text{ж}}\,12 + \sqrt{\text{ж}}\,6$, fit 6 nouus diuisor: & ex 6 diuidendis, fit $\sqrt{\text{ж}}\,432 - \sqrt{\text{ж}}\,216$, nouus uidelicet diuidẽdus. Diuide ergo, & inuenies $\sqrt{\text{ж}}\,12 - \sqrt{\text{ж}}\,6$.

Probatur per multiplicationem quotientis in diuisorem: scilicet $\sqrt{\text{ж}}\,12 - \sqrt{\text{ж}}\,6$ in $\sqrt{\text{ж}}\,12 + \sqrt{\text{ж}}\,6$, facit 6.

Aliud exemplum.

Volo diuidere $\sqrt{\text{жж}}\,23328 - \sqrt{\text{жж}}\,10368$ per 6, facit diuisio illa $\sqrt{\text{жж}}\,18 - \sqrt{\text{жж}}\,8$. Et sic de alijs.

De

De Binomijs & Residuis, atq; de eorum radicibus quadratis extrahendis. Caput X.

RADICVM extractio ex binomijs & residuis, res talis est ac tanta, ut sola sufficiat ad expediendas omnes difficultates totius decimi Euclidis. Et si uis, ut breui sententia dicam, quid habeat ille decimus, audi. Habet primo medialia quadrate, & eorum radices. Habet secundo binomia, & eorum radices. Habet tertio residua, & eorum radices. Sic itaq; habes totũ decimum.

Radices aũt medialium quadrate, sunt mediales zenſizẽſice. ut radix quadrata (de talibus enim solis hic agitur) ex $\sqrt{\text{ꝫ}6}$, est $\sqrt{\text{ꝫ}\text{ꝫ}6}$, ut etiam superius in Algorithmo medialium docui.

Radices ex binomijs primæ speciei, sunt binomia. Volo aũt amodo de speciebus numerorum irrationalium loqui, more Euclidis, uidelicet ut sunt contracti ad lineas.

Radices ex binomijs secũdæ speciei & tertiæ, sũt bimediales. Sic radices ex residuis primæ speciei, sunt residua.

Radices ex residuis secundæ & tertiæ speciei, sunt residuales bimedialiter.

Itaq; sicut numerorum rationalium quidam sunt quadrati, quidam sunt non-quadrati: sic numerorum binomialium quidam sunt quadrati, quidam non quadrati. Item etiam quidam residualium sunt quadrati, quidam sunt non quadrati.

¶ Quadratos binomiales, à binomialibus non quadratis: item residuales quadratos, à residualibus nõ quadratis, sic certo cognosces. Si differentia quadratorum particularum habuerit proportionem, ad quadratum particulæ maioris, tanquam numeri quadrati ad numerum quadratum, erit binomium (aut residuum) huiusmodi particularum absque dubio quadratum. Si aũt talis proportio, non sit proportio tanq; numeri quadrati

ad numerum quadratum, non erit binomium tale quadratum, nec residuum tale quadratum erit.

Exemplum.

Volo scire, utrum quadratum sit, hoc binomium $\sqrt{875} + \sqrt{872}$. Quadrata particularum sunt 75 & 72: horum differentia est 3. Diuido ergo 75 per 3, & produco numerum quadratum 25. Itaq; necesse est, ut prædictum binomium habeat radicem quadratam.

Aliud exemplum.

Volo scire de hoc residuo, an sit quadratum $\sqrt{1458} - 36$. Quadrata particularum sunt, 1458, & 1296: horum differentia est 162. Diuido igitur 1458 per 162, & facio quotientem quadratum, uidelicet 9. Ergo necesse est, ut positum residuum sit quadratum, habeatq; radicem extrahendam.

Aliud exemplum.

Volo scire utrum $44 + \sqrt{1152}$, habeat radicem. Quadrata particularũ sunt 1936, & 1152: differentia est 784. Quæ dum diuidit 1936, facit quotientem quadratum, uidelicet $2\frac{21}{49}$. Ergo necesse est, ut propositum binomiũ habeat radicẽ quadratam.

Si binomium, aut residuum, fuerit sub prima specie, & differentia quadratorum sit numerus quadratus, tunc necesse est binomium illud, aut residuum, habere radicem: ut patet in exemplo proxime posito. Si autem binomium, aut residuum, fuerit sub alia specie quàm sub prima, fueritq; differentia quadratorum particularum, numerus quadratus, tunc impossibile est, ut binomium propositum, aut residuum, sit quadratum.

¶ Radicum uero extractiones sic fiunt.

Primo. Pro binomio aut residuo tuo (de quo radix est extrahenda) pone dimidium eius.

Secundo. Recipe quadrata particularũ dimidij illius sic positi, eaq; quadrata subtrahe ab inuicẽ, & radicẽ relicti illius serua.

Tertio. Recipe maiorem particulam dimidij (tui binomij, aut residui, primo positi loco sui integri) eamq; primo adde ad

radicem

radicem prius seruatam, & radix quadrata, illius aggregati, erit particula prima radicis quam quæris.

Quarto. Eandem radicem relicti prius seruatam, subtrahe à priore illa particula maiore (illius dimidij, quod primo posueras, loco sui integri, dum dimidiares tuum binomium, aut residuum). Et radix quadrata illius relicti nouissimi, erit particula secunda radicis quam quæris.

Duabus ergo particulis tuæ radicis inuentæ, interpone signum additorum uel subtractorum. Nam si sit radix binomij, interponendum est signum +. Si autem sit radix residui, tunc interponendum est signum —.

Exemplum primum.

Sit radix extrahēda de hoc binomio primo, $38+\sqrt{3}288$.

Pono primo pro integro, dimidium eius hoc, $19+\sqrt{3}72$.

Secundo recipio quadrata particularum illius dimidij, uidelicet 361, & 72, eaq; ab inuicem subtraho, tunc relinquuntur 289: huius relicti radicem quadratam extraho, atque reseruo, quæ est 17.

Tertio recipio 19 (hoc est, particulam maiorem dimidij binomij mei, primo positi loco sui integri) & addo ad radicem relicti, prius seruatam. Hoc est, 19 addo ad 17, facit 36. Et ex hoc aggregato extraho radicem quadratam, facit 6, uidelicet priorem seu maiorem particulam radicis inueniendæ.

Quarto. Minorē particulam radicis inueniendæ sic quæro. Radicem relicti prius seruatam, id est 17, subtraho à particula maiore dimidij illius, qd̄ prius fuerat positum loco sui integri: scilicet 17 subtraho à 19, remanent 2. Radix itaq; illius nouissimi relicti (id est, $\sqrt{3}2$) erit particula secunda radicis meæ inueniendæ.

Itaq; duabus particulis radicis meæ inuentis, uidelicet 6 & $\sqrt{3}2$, interpono signum additorum, eò quòd sit radix binomij.

Vnde sic stabit radix inuenta:

$6+\sqrt{3}2$.

Probatur

Probatur operatio per multiplicationem radicis in se, ut

$6 + \sqrt{8}2$

$6 + \sqrt{8}2$

$36 + 2 + \sqrt{8}72 + \sqrt{8}72$

Summa. $38 + \sqrt{8}288$.

Secundum exemplum.

Volo extrahere radicem quadratam de hoc residuo $\sqrt{8}18 - 4$, secundæ speciei.

1. Pro integro illo, pono dimidium eius hoc, $\frac{\sqrt{8}18}{2} - 2$;

2. Particularum quadrata, id est, $\frac{1}{4}$ & 4, ab inuicem subtraho, remanent $\frac{3}{4}$. Et huius relicti radix quadrata facit $\sqrt{8}\frac{3}{4}$, quam reseruo, uel $\sqrt{8}\frac{1}{2}$.

3. Recipio $\sqrt{8}\frac{18}{4}$ (id est, particulam maiorem dimidij, binomij dimidiati (addoq; ad $\sqrt{8}\frac{3}{4}$ (id est, ad radicē relicti, prius reseruatā) facit $\sqrt{8}\frac{32}{4}$. i. $\sqrt{8}8$. Itaq; $\sqrt{88}$ erit prior particula & cē

4. Eandem radicem relicti, prius seruatam (id est, $\sqrt{8}\frac{3}{4}$) subtraho à $\sqrt{8}\frac{18}{4}$, remanet ex ea subtractiõe $\sqrt{8}\frac{8}{4}$, seu $\sqrt{8}2$, cuius radix quadrata facit $\sqrt{88}2$. Et est secūda particula radicis meæ inuenienda.

Itaq; radicis meæ particulæ sunt $\sqrt{88}8$ & $\sqrt{88}2$. Quibus interpono signum subtractorum, eò quòd radix sit residui. Vnde sic stabit radix inuenta, $\sqrt{88}8 - \sqrt{88}2$.

Probatur operatio per multiplicationem radicis in se quadrate, ut

$\sqrt{88}8 - \sqrt{88}2$

$\sqrt{88}8 - \sqrt{88}2$

$\sqrt{8}8 + \sqrt{8}2 - 2 - 2$

Summa. $\sqrt{8}18 - 4$.

Tertium exemplum.

Sit extrahenda radix de hoc binomio tertio,

$\sqrt{8}32 + \sqrt{8}24$.

Primo.

Primo, pono dimidium, facit $\sqrt{8} + \sqrt{6}$.

Secundo, relictum ex quadratis ab inuicem subtractis, est 2. cuius radix est $\sqrt{2}$.

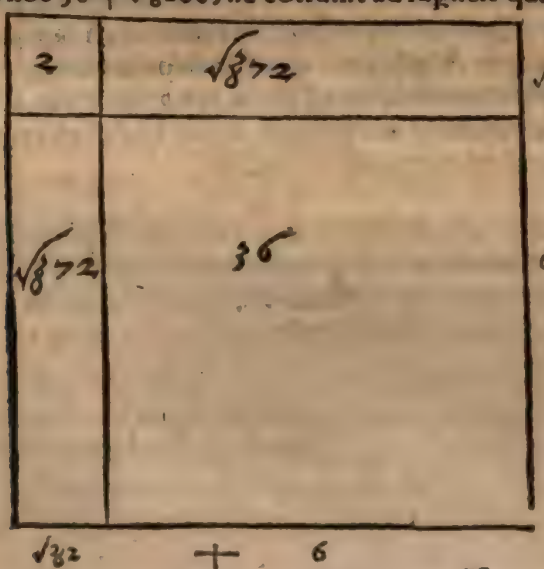
Tertio, addo $\sqrt{8}$ ad $\sqrt{2}$, facit $\sqrt{18}$, cuius radix quadrata facit $\sqrt{\sqrt{18}}$, & est particula prima meæ radicis.

Quarto, subtraho $\sqrt{2}$ ab $\sqrt{8}$ (id est, radicem relicti prius seruatam, à particula maiore illius quod primo tanquam dimidium integri binomij positum fuerat) facit subtractio $\sqrt{2}$: cuius radix quadrata est $\sqrt{\sqrt{2}}$, & est particula secunda meæ radicis, quæ sic stat inuenta, $\sqrt{\sqrt{18}} + \sqrt{\sqrt{2}}$. Probatur:

$$\begin{array}{l} \sqrt{\sqrt{18}} + \sqrt{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\sqrt{18}} + \sqrt{\sqrt{2}} \\ \hline \sqrt{18} + \sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{6} \end{array}$$

Summa, $\sqrt{32} + \sqrt{24}$.

TEntabo nunc huiusmodi operationum reddere rationē, numeris (quos p exēplis posui) cōtractis ad supficies q̄dratas: ut binomiū hoc $38 + \sqrt{288}$, sic cōtrahit ad supficiē quadratā.

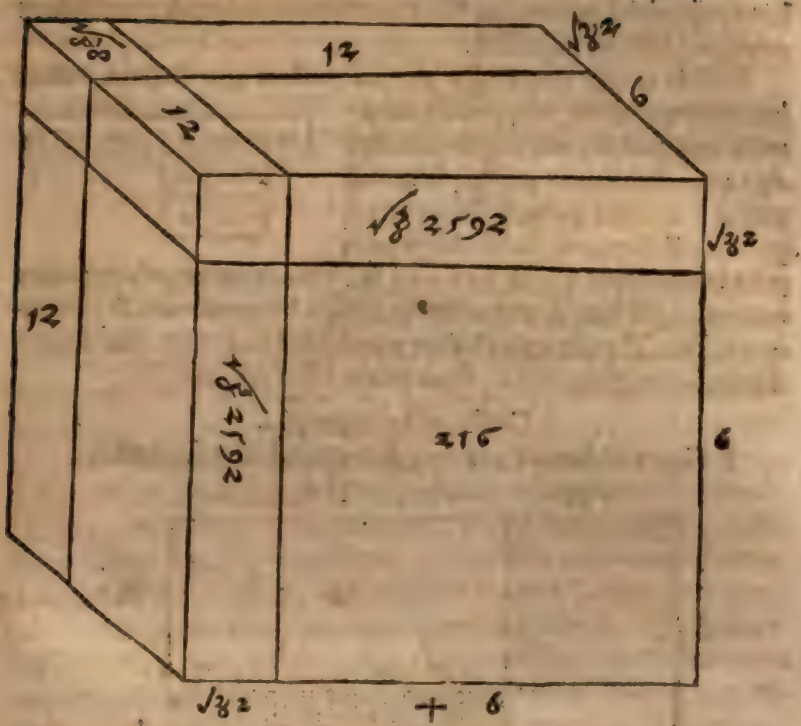


Certe uides, ut radix eius $6+\sqrt{\text{ж}}2$, multiplicatione suâ in se, constituat superficiem hanc, distributã per suas particulas, quarũ duæ (quæ sunt rationales) in numero abstracto coeunt, faciuntq; particulam eius maiorem: & reliquæ duæ etiam coeunt, faciuntq; particulam eius irrationalem.

Meditans igitur regulam de extractione huiusmodi radicũ, respexi ad particulas talis compositionis, sciens eas esse oportere etiam resolutionis particulas, easq; posse sic proportionaliter poni, ut dimidium partis minoris, de binomio (aut residuo) semper sit medium proportionale, inter partes duas particulæ maioris, de binomio, aut residuo. Vidi igitur nihil esse opus, nisi regula tali, qua quilibet numerus rationalis aut medialis, posset diuidi in duas partes, inter quas constitui possit numerus aliquis propositus. Vt (exempli gratia) quæstio sit talis. Numerus iste 38, diuidendus est in duas partes, quæ inter se multiplicatæ, faciant 72. Quæritur ergo, quantæ sint partes illæ? Quia autem admodum facile est, huiusmodi regulas formare, per Algebram (quæ fertilissima est regularum formandarum) contuli me ad illam, atque illius usu, composui illam quadrimembrem regulam, quam hoc capite posui, feciq; hoc secundum ea quæ iam recitaui.

2	$\sqrt{\text{ж}}72$	36
	$\sqrt{\text{ж}}72$	

Iam si quis studiosorum meo exemplo uelit construere regulam de inuentione radicis cubicæ, ex binomio cubico, aut residuo cubico, recipiat binomium aliquod cubicum. Vt est hoc, $252+\sqrt{\text{ж}}24200$; cuius radix cubica est $6+\sqrt{\text{ж}}2$,



Binomium autem illud contractum ad cubum, cernitur ſub iſtis particulis compoſitionis.

√8	12	√8 2592	216
	12	√8 2592	
	12	√8 2592	

Cõpoſitur igit regulã de extractionib cubicis ex binomijs & reſiduis, reſpiciat ad diſtractionẽ particulaꝝ poſitam, & ſciat eſſe ꝓportionalitatẽ continuã inter 4 ſupremas particulas, ſcilicet inter √8 & 216, ſunt 12 & √8 2592, duo media ꝓportionalia, ſciatq; particulas mediales ad ſe additas, perficere portionẽ

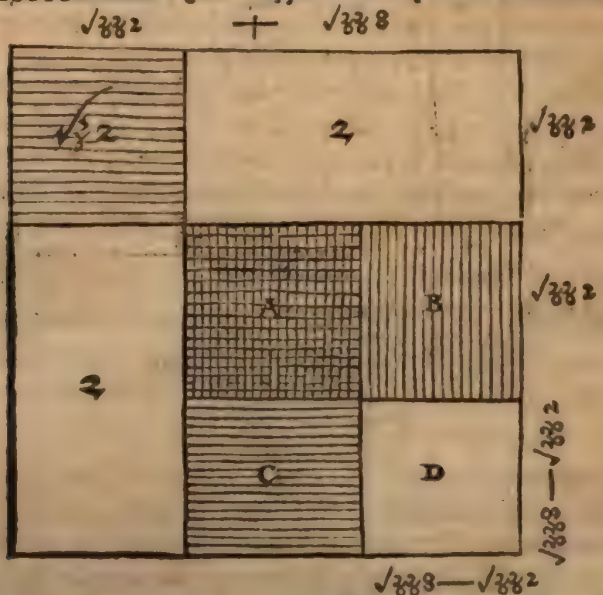
binomij cubici minorem, sicut particulæ rationales perficiunt portionem eius maiorem.

Positis igitur particulis perficientibus portionem cubici binomij maiorem, hoc modo, scrutetur qua ratione aut regula diuidat $\sqrt[3]{24200}$ (.i. minor portio binomij cubici) in duas partes, ita ut tertia pars maioris partis, sit medium proportionale inter 1 2ℓ & 25 2 — 3 2ℓ : talis enim regula expediet totum negocium de extractione cubica binomiorum & residuorum, &c. Zensizensus habet particulas sedecim. Surdesolidus habet triginta duas; sicut etiam lib. 1. ostendi, &c.

0	12ℓ	0	252 — 32ℓ
	12ℓ	0	
	12ℓ	0	

De secundo exemplo.

Hoc residuum $\sqrt[3]{18} - 4$, fuit exemplum secundum.



Contrahitur autem primo, eius binomium ad superficiem qua

quadratam. Eius aũt binomium est $\sqrt{\sqrt{18}}+4$. Vnde nihil differt extractio radicis residui, ab extractione radicis binomij, quantũ attinet ad operationem illam quæ fit iuxta regulam: nisi quòd signum — ponitur in residuis, ubi signũ + ponitur in binomijs. Qui autem intelligit multiplicationem quadratã, ille etiam intelligit radicis extractionem.

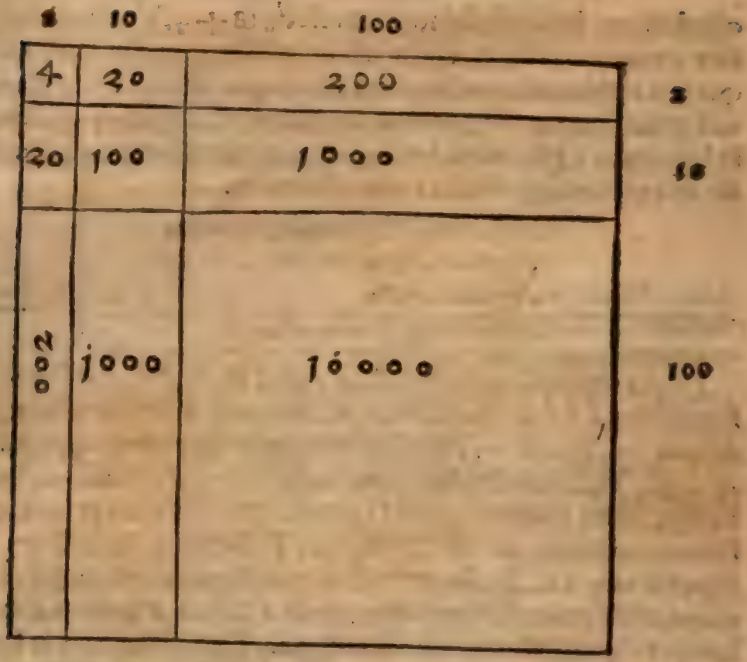
Sic autem habet multiplicatio.

$$\begin{array}{l} \sqrt{\sqrt{8}}-\sqrt{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\sqrt{8}}-\sqrt{\sqrt{2}} \\ \hline \sqrt{8}+\sqrt{2}-2-2. \end{array}$$

Prima multiplicatione (id est, $\sqrt{\sqrt{8}}$ in $\sqrt{\sqrt{8}}$) constituitur superficies A B C D, quæ facit $\sqrt{8}$. Secunda multiplicatione, uidelicet $-\sqrt{\sqrt{2}}$ in $-\sqrt{\sqrt{2}}$, constituitur superficies quadrata $+\sqrt{2}$. Tertia multiplicatione, uidelicet $+\sqrt{\sqrt{8}}$ in $-\sqrt{\sqrt{2}}$, fit superficies E subtrahenda à superficiebus duabus prius constitutis, uidelicet ab A B C D & $\sqrt{2}$. Tollit itaq; superficies E, superficiem A B. Sic superficies F, quæ fit ex quarta multiplicatione, tollit etiam sibi æqualem, ut est A C. Sed A prius sublata fuit per superficiem E. Ideo intelligatur superficies $\sqrt{2}$ in locũ A successisse, cum $\sqrt{2}$ & A sint æquales. Itaq; superficies F, subtrahit C & $\sqrt{2}$. Et sic tandem manet superficies D sola, quæ facit $\sqrt{\sqrt{18}}-4$. Et est illa superficies de qua extrahitur radix, mediante superficie binomiali, $\sqrt{2}$ E F A B C D.

¶ De tertio exemplo non est opus dicere: est enim per omnia simile primo exemplo. Nisi quòd particulæ in tertio exemplo, omnes sunt irrationales, & radix est bimedialis.

Si autem quærat aliquis de radicibus trimedialium & trinomialium &c. illi respondeo per significationem huius sequentis figuræ. Nemo enim omnia speciatim recensere potest,



Multiplicatus eſt (ut uides) numerus ille 112 quadrate, qui habet tres figuras, tanquam tres radicis particulas, &c.

De Algorithmo minutiarum irrationalium, & de probatione quadam huiuſmodi Algorithmorum. Cap. XI.

OPERATIO illa ſecundi exempli, in capite præcedenti, de extractiõe radicis ex reſiduo, admonet me, ut non negligam ponere Algorithmũ minutiarum irrationalium, eò q illud exemplũ progrediatur per regulam illam extractionis, ſub minutijs irrõnalibus. Conſtat aũt Algorithmus ille ex regulis Algorithmi

rithmi minutiarum cõmunium, & ex regulis integrorum irrationalium numerorum, ut uidebimus.

De repræsentatione & pronunciatione.

¶ Quando signũ radicale ponitur ad medium minutiæ, tunc signum illud refertur ad utrunq; terminum. At si denominatio aliqua ponatur ad medium minutiæ, non refertur ad utrunq; terminum, sed ad numeratorem solummodo.

Exemplum utriusq;, $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ ℔. facit $\frac{2}{3}$ ℔.

Minutia repræsentata sub integro aliquo numero, addito ad minutiam, pronunciatur sub fractura integri, facientis cum minutia illa unicam minutiam. Vt $\sqrt{}\ 1\frac{57}{125}$ pronunciatur iuxta hanc repræsentationem $\sqrt{}\frac{192}{125}$ sic. Radix cubica de 192, diuisa per radicem cubicam ex 125. Vel pronunciatur iuxta hanc repsentationẽ, $\frac{\sqrt{}\ 192}{5}$: scilicet radix cubica ex 192, diuisa per 5. Vel pnunciari potest sub hac repræsentatiõe, $\sqrt{}\frac{192000}{1000}$ &c.

Minutiæ irrõnales, quæ non stant in minimis suis terminis, reducunt ad minimos, ea regula, qua minutiæ cõmunes, quam uidelicet regulã posui lib. 1. cap. 1. Vt $\sqrt[3]{}\frac{4}{8}$ & $\sqrt[3]{}\frac{1}{2}$, idẽ sunt. Idẽ etiã est $\frac{\sqrt{}\ 2}{\sqrt[3]{}\ 2}$, ut patet ex reductione ad idem signũ radicale.

De Additione & Subtractione.

¶ Vt autem Algorithmus iste minutiarũ irrationalium constet ex algorithmo minutiarum cõmunium, & ex algorithmo integrorum numerorum irrationalium, pulchre patet ex istis duabus minutijs addendis aut subtrahendis.

$$\frac{\sqrt[3]{}\ 50 + \sqrt{}\ 3}{5} \qquad \frac{\sqrt{}\ 24 + \sqrt[3]{}\ 8}{2}$$

Primo reducuntur ad æquales denominatores, per multiplicationem in cruce, iuxta algorithmũ minutiarum cõmunium: non tñ omnino absq; regulis Algorithmi medialiũ, ut satis patet ex numeratoribus prædictis, & ex algorithmis superioribus.

Sic autem stant reductæ ad eundem denominatorem.

$$\frac{\sqrt[3]{}\ 200 + \sqrt{}\ 24}{10} \qquad \frac{\sqrt{}\ 300 + \sqrt[3]{}\ 200}{10}$$

Iam poteris addere aut subtrahere.

Additio facit	Subtractio facit
$\frac{\sqrt[3]{800}+\sqrt{cc}\,5184}{10}$	$\frac{\sqrt{cc}\,1536}{10}$

In additionibus & subtractionibus huiusmodi, reseruantur denominatores, donec numeratores fuerint expediti, & tunc denominator rursum supponitur: id quod exempla posita satis probant atq; declarant.

De Multiplicatione.

Numeratores (inquit regula cõmunis Algorithmi) multiplicentur inter se, & denominatores inter se multiplicentur: sed sic tamen, ut signa radicalia sint reducta ad idem signum radicale, ut dicit regula integrorum numerorum irrationalium. Aequalitas autem denominatorum, quæ in additione requiritur, in multiplicatione non requiritur.

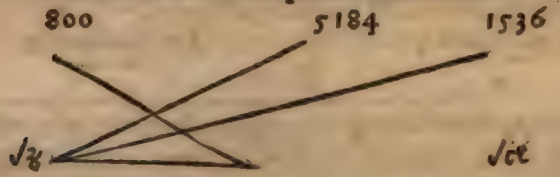
Exemplum.

Volo inter se multiplicare

$\frac{\sqrt[3]{800}+\sqrt{cc}\,5184}{10}$	$\frac{\sqrt{cc}\,1536}{10}$

Primo reducuntur numeri ad æqualia signa, antequam inter se multiplicentur.

Sic autem stat exemplum reductionis.



Facit hæc reductio

$\frac{\sqrt[3]{cc}\,512000000+\sqrt[3]{cc}\,26873856}{10}$, & $\frac{\sqrt[3]{cc}\,2359296}{10}$.

Iam

Iam poteris multiplicare aut diuidere.

Multiplicatio facit $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,120795552+\sqrt{\mathrm{R}\,\frac{79626624}{100}}}$, scilicet $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,\frac{2359296}{10}}$ in $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,512}$ (nam $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,512}$ & $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,\frac{512000000}{10}}$ idem sunt) facit $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,120795552}$. Deinde $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,\frac{2359296}{10}}$ in $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,\frac{26873856}{10}}$, facit $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,\frac{63401180955375}{100}}$. Hoc est $\sqrt{\mathrm{R}\,\frac{79626624}{100}}$.

De Diuisione.

Diuisio requirit reductionem utranq; .i. reductionem ad eosdem denominatores. Et reductionem ad eadem signa radicalia. Dum uero reductio ad eosdem denominatores facta fuerit, reijciuntur denominatores, & fit diuisio per numeratores.

Vt uolo diuidere $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,512000000+\sqrt{\mathrm{R}\,\frac{26873856}{10}}}$ per $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,\frac{2359296}{10}}$.

Reiectis igitur denominatoribus, diuido $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,512000000+\sqrt{\mathrm{R}\,26873856}}$, per $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,2359296}$.

Facit diuisio

$\sqrt[3]{\mathrm{R}\,217\frac{1}{72}+1\frac{1}{2}}$, uel $\sqrt[3]{\mathrm{R}\,\frac{15}{72}+1\frac{1}{2}}$.

De probatione regularum numerorum irrationalium.

OMnes regulas Algorithmorum irrationalium numerorum integrorum & fractorum, inuenies esse probas, per rationales numeros, positos sub signis radicalibus, quemadmodum exemplo isto ostenditur, &c.

$\frac{\sqrt[3]{\mathrm{R}\,49+\sqrt{\mathrm{R}\,8}}}{5}$	$\frac{\sqrt{\mathrm{R}\,125-\sqrt[3]{\mathrm{R}\,9}}}{2}$

Hæ minutiæ reductæ ad æquales denominatores, sic stabunt:

$\frac{\sqrt[3]{\mathrm{R}\,196+\sqrt{\mathrm{R}\,64}}}{10}$	$\frac{\sqrt{\mathrm{R}\,15625-\sqrt[3]{\mathrm{R}\,225}}}{10}$

Adduntur autem numeratores ad se, & aggregato suppo nitur denominator communis. ut

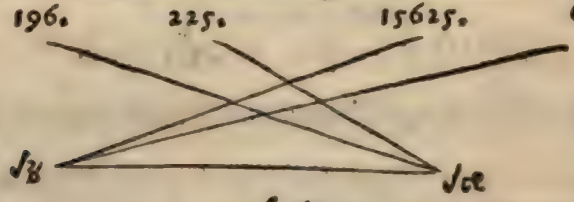
$$\frac{\sqrt{cc}\,64+\sqrt{z}\,196}{\sqrt{cc}\,15625-\sqrt{z}\,225} \qquad \sqrt{cc}\,24389-\sqrt{z}\,1 \;\underline{\;\;10\;\;}$$

Sic in subtractione subtrahuntur numeratores ab inuicē, & relicto supponitur denominator communis. ut

$$\frac{\sqrt{cc}\,64+\sqrt{z}\,196}{\sqrt{cc}\,15625-\sqrt{z}\,225} \qquad \sqrt{z}\,841-\sqrt{cc}\,9261 \;\underline{\;\;10\;\;}$$

Volo nunc illos numeros (quos ad se addidi, & ab inuicē subtraxi) etiam multiplicare. Reduco autem eos primo ad ea dem signa radicalia.

Reductio ad idem signum radicale.



facit

$$\sqrt{zcc}\,7529536+\sqrt{zcc}\,4096 \;\underline{\;\;10\;\;}$$

$$\sqrt{zcc}\,244140625-\sqrt{zcc}\,1390625 \;\underline{\;\;10\;\;}$$

Multiplicatio tantum facit, quantum diuisio superioris per inferiorem; utrobiq; enim inuenies $1\frac{4}{7}$.

De surdis radicibus binomiorum & residuorum, & de Algorithmo earum. Cap. XII.

SICVT radices quadratæ binomiorum & residuorum, proueniunt ex binomijs & residuis speciei primæ, secundæ, & tertiæ: sic surdæ radices binomiorum & residuorum, proueniunt ex binomijs & residuis, speciei quartæ, quintæ, & sextæ.

Surdæ radices binomiorum quartæ speciei, uocantur maiores: ut $\sqrt{\frac{}{}}.\ 6+\sqrt{\frac{}{}}12$.

Surdæ radices residuorum quartæ speciei, uocantur minores: ut $\sqrt{\frac{}{}}.6-\sqrt{\frac{}{}}12$.

Surdæ radices binomiorum quintæ speciei, uocantur potentes mediale & rationale: ut $\sqrt{\frac{}{}}.\sqrt{\frac{}{}}6+2$.

Surdæ radices residuorum quintæ speciei, uocantur componentes mediale cum rationali: ut $\sqrt{\frac{}{}}.\sqrt{\frac{}{}}6-2$.

Surdæ radices binomiorum sextæ speciei, uocantur potentes duo medialia: ut $\sqrt{\frac{}{}}.\sqrt{\frac{}{}}60+\sqrt{\frac{}{}}24$.

Surdæ radices residuorum sextæ speciei, uocantur componentes mediale cum mediali: ut $\sqrt{\frac{}{}}.\sqrt{\frac{}{}}60-\sqrt{\frac{}{}}24$.

De resolutionibus surdarum radicum.

ALgorithmus radicum surdarum complectitur singulariter speciem operationum quandam, quam Resolutionem uocamus. Cui opponitur alia species operationū, quæ uocatur Compositio. Ad resolutionem pertinent propositiones, 39. 40. 41. libri decimi. Ad compositionem autē pertinent hæ tres propositiones, 33. 34. 35. ut suo loco uidebimus. Item ad operationes illas respiciunt propositiones illæ, quæ uidentur esse omnium difficilimæ, ut sunt 27. 28. 29. item 71. 72. 73. item 77. 78. 79.

LAtēt uero sub radice qualibet maiore, duæ aliæ radices, quæ respondeant propositioni 27. decimi, in quas ipsa radix maior resoluit. Resoluitur aūt illa eadem regula,

quam superius capite decimo posui, de extractionibus radicū quadratarū, ex binomijs & residuis quadratis. Ideo illa regula hoc capite uenict repetenda per singula exempla resolutionum surdarum radicum. Vt sub hac radice maiore $\sqrt{\ }.24+\sqrt{\ }552$, latent hæ duæ radices $\sqrt{\ }.12+\sqrt{\ }6$, & $\sqrt{\ }.12-\sqrt{\ }6$. Hæ, inquā, sunt duæ radices, potentia incōmensurabiles (ut loquitur propositio uigesimaseptima) superficiemq; medialem cōtinentes, quarum quadrata pariter accepta, sint rationale.

☞ Eas autem radices sic inuenies, per regulam prædictam.

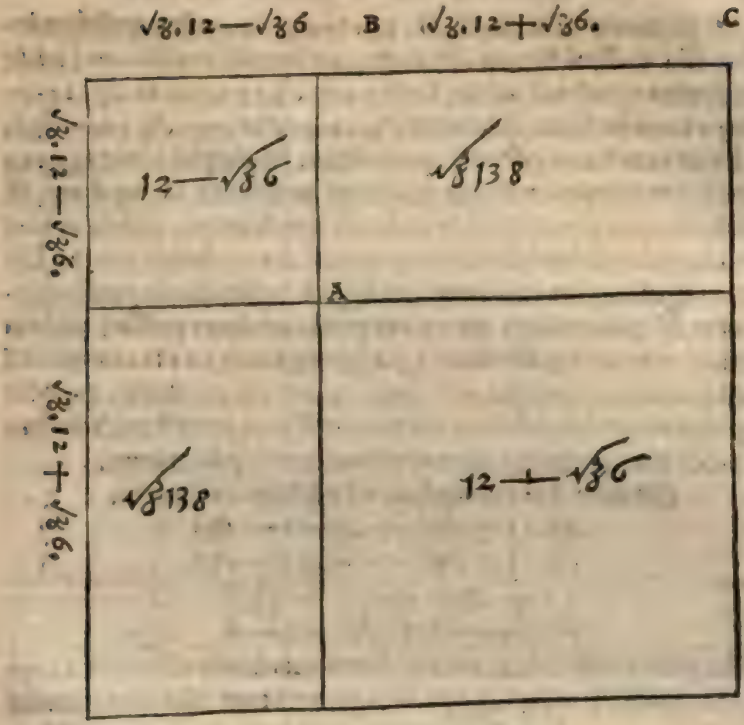
Primo recipe dimidiū quadrati radicis tuæ, facit $12+\sqrt{\ }138$.

Secundo, quadrata particularum subtrahe ab inuicem, & relicti radicem quadratam serua. Vt 138 à 144, remanent 6. huius radix quadrata est $\sqrt{\ }6$, quam reseruo.

Tertio, particulam maiorem dimidij, quod primo positum fuit. i. 12. addo ad radicem reseruatā, facit $12+\sqrt{\ }6$. Et huius radix quadrata, uidelicet $\sqrt{\ }.12+\sqrt{\ }6$ est maior radix, in quā resoluitur data radix.

Quarto, eandem radicem prius seruatam (id est, $\sqrt{\ }6$) subtraho à priori particula maiore, sumpta de dimidio primo posito (.i. à 12) facit $12-\sqrt{\ }6$: & huius relicti radix quadrata, uidelicet $\sqrt{\ }.12-\sqrt{\ }6$, est minor radix, in quam resoluitur $\sqrt{\ }.24+\sqrt{\ }552$.

☞ Vt autem illæ duæ radices $\sqrt{\ }.12+\sqrt{\ }6$, & $\sqrt{\ }.12-\sqrt{\ }6$ (in quas resoluta est radix illa maior, $\sqrt{\ }.24+\sqrt{\ }552$) respondeant propositioni XXVII. decimi, pulchre ostendit figura sequens posita: scilicet partes resolutionis sunt potentia incōmensurabiles. Est enim $12+\sqrt{\ }6$ incommensurabilis huic $12-\sqrt{\ }6$: quia sunt numeri irrationales diuersarum specierū, ut necesse sit eos esse incommensurabiles potentia. Patet etiam ex diuisione unius per alterum. Talis enim diuisio facit quotientem irrationalem.



Secundo, duæ illæ partes resolutionis cõtinent superficiem medialem (ut requirit propositio illa uigesimaseptima). Vides enim ut superficies hæc √3 138 contineatur sub A B (faciente √3. 12 —√36) & B C, faciente √3. 12 +√3 6.

Tertio, uides ut quadrata accepta pariter (ut loquitur propositio) id est, ad se addita, faciant rationalem superficiem: scilicet 12 —√36 additum ad 12 +√36, facit 24.

De compositione partium resolutarum, id est, de additione.

VT uero partes illæ sic resolutæ, iterum componãtur, seu ad se addantur, ac illa compositione seu additione restituant

tuant priorem radicem .i. $\sqrt{\ }.24+\sqrt{\ }552$. etiam pulchre indicat illa eadem figura . Scilicet (ut breuissime dicam) adde particulas quadrati ad se, facit $24+\sqrt{\ }552$. unde $\sqrt{\ }.24+\sqrt{\ }552$ tantum facit, quantum $\sqrt{\ }.12+\sqrt{\ }6.+.\sqrt{\ }.12-\sqrt{\ }6$.

Et ut rem hanc plenius cognoscas. Multiplica hoc aggregatum (tanquam radicem quadrati positi) in se quadrate, & producto præpone signum radicale quadratorũ, uidelicet hoc $\sqrt{\ }$, tunc uere addidisti illud quod in se ita multiplicaueras. Est enim regula (cuius rationem ex figura posita facile possis perspicere, & quam uarijs quoq; exemplis probare possis) additis duobus numeris quibuscunq;, si aggregatum ex eis compositũ multiplicetur quadrate, erit radix quadrata producti, æqualis aggregato priori. Melius autem tradi non potest additio huiusmodi numerorum, quàm mediante multiplicatione.

Sic uero stat exemplum ad multiplicationem.

$$\sqrt{\ }.12+\sqrt{\ }6.+.\sqrt{\ }.12-\sqrt{\ }6$$
$$\sqrt{\ }.12+\sqrt{\ }6.+.\sqrt{\ }.12-\sqrt{\ }6$$

$$12+\sqrt{\ }6+12-\sqrt{\ }6$$
$$\sqrt{\ }.144-6+\sqrt{\ }.144-6$$

Particulæ autem hæ, multiplicationis huius, faciunt $24+\sqrt{\ }552$: unde $\sqrt{\ }.24+\sqrt{\ }552$ est aggregatum additionis huius radicis $\sqrt{\ }.12+\sqrt{\ }6$ ad hanc $\sqrt{\ }.12-\sqrt{\ }6$.

Hæc de additione sufficiunt.

De Multiplicatione.

IAmen multiplicatio forte eget pleniore explicatione, pro ijs qui minus sunt exercitati, quàm ut exemplum positum intelligant. Volo igitur ijs exemplum multiplicationis datum, exponere per singulas particulas, ut ex illis de reliquis iudicare possint.

Notum uero est, ut ad multiplicationem quadratam, numerus multiplicandus bis scribatur; ut

$$\sqrt{\ }.12+\sqrt{\ }6.+.\sqrt{\ }.12-\sqrt{\ }6$$
$$\sqrt{\ }.12+\sqrt{\ }6.+.\sqrt{\ }.12-\sqrt{\ }6$$

Primo

Primo igitur multiplico $\sqrt{}.12+\sqrt{}6$ in se, hoc est, in $\sqrt{}.12+\sqrt{}6$, facit $12+\sqrt{}6$. Quia signum solummodo deletur, tunc continuo fit quadratum. Sic etiam multiplico $\sqrt{}.12-\sqrt{}6$ in se. i. deleto signo, facio hoc productum $12-\sqrt{}6$. Hæc aũt duo producta quadrata, uidelicet $12+\sqrt{}6$, & $12-\sqrt{}6$, addita ad se, faciũt 24. ut satis patet ex algorithmo horum sig. + & —.

Deinde sequit multiplicatio in cruce. hoc est, $\sqrt{}12+\sqrt{}6$ multiplicatur in $\sqrt{}.12-\sqrt{}6$. Hic certe non est multiplicatio quadrata; non em̃ sunt æquales numeri inter se multiplicandi.

$$\sqrt{}.12+\sqrt{}6$$
$$\sqrt{}.12-\sqrt{}6$$

Dissimula interim signum primum radicale, quod in utrasq; particulas uim suam extendit. hoc est, multiplica quadrata inter se, pro radicib. scilicet 12 in 12, facit 144. Deinde in $-\sqrt{}6$ in $+\sqrt{}6$, facit -6. Vnde 6 subtracta à 144, relinquunt 138.

Itaq; multiplicatio hæc tota facit $\sqrt{}138$. Nam 12 in $+\sqrt{}6$ facit quidem $+\sqrt{}864$. sed 12 in $-\sqrt{}6$ facit $-\sqrt{}864$. Et sic alterum tollit alterũ, quia diuersa signa cõmutant speciem, &c. Atq; ita nihil remanet ex illa multiplicatione $\sqrt{}.12+\sqrt{}6$ in $\sqrt{}.12-\sqrt{}6$, nisi $\sqrt{}.144-6$. hoc est, $\sqrt{}138$. Non enim negligendum est signũ radicale, quod primo fuerat dissimulatum.

Deinde iterum multiplicatur $\sqrt{}.12+\sqrt{}6$ in $\sqrt{}.12-\sqrt{}6$ (ut perficiatur multiplicatio in cruce) facit iterũ $\sqrt{}138$. unde $\sqrt{}138$ duplari debet, facit $\sqrt{}552$. Hæc ex figura patent.

Ex isto, inquam, exẽplo exposito, cætera facile iudicabis. Volo tñ nihilominus aliud ponere exemplũ multiplicationis: uidelicet radix hæc $\sqrt{}.12+\sqrt{}6$ sit multiplicanda per 6.

Sic stat exemplum.

$$\begin{array}{l} \sqrt{}.12+\sqrt{}6 \\ \sqrt{}36 \quad \sqrt{}1296 \\ \hline \sqrt{}.432+\sqrt{}7776. \end{array}$$

Cum enim primũ signum radicale sit commune signum ad utranq; particulam multiplicandi, fit ut 12 multiplicet̃ tanquã medialis quadrate, et $\sqrt{}6$ multiplicet̃ tanq; medialẽ, zensizẽsice.

Probatur hæc operatio per numeros rationales.

$\sqrt{\text{ß}}.13+\sqrt{\text{ß}}144$
$\sqrt{\text{ß}}36\ \ \sqrt{\text{ßß}}1296$

$\sqrt{\text{ß}}.468+\sqrt{\text{ß}}186624$

Hic multiplicantur 5 per 6, facit 30. Vide ergo an summa multiplicationis faciat 30. Scilicet $\sqrt{\text{ß}}186624$, facit 432: & 432 ad 468, faciunt $\sqrt{\text{ß}}900$. id est, 30.

Aliud exemplum.

Volo multiplicare $\sqrt{\text{ß}}.12+\sqrt{\text{ß}}6$ per $\sqrt{\text{ß}}12+\sqrt{\text{ß}}6$. Reduco multiplicantem ut stet sub forma radicis surdæ, uidelicet ut stet sub suo quadrato sic $\sqrt{\text{ß}}.18+\sqrt{\text{ß}}288$.

Vnde sic stabit exemplum ad multiplicationem.

$\sqrt{\text{ß}}.12+\sqrt{\text{ß}}6$
$\sqrt{\text{ß}}.18+\sqrt{\text{ß}}288$

$\sqrt{\text{ß}}.216+\sqrt{\text{ß}}1728+\sqrt{\text{ß}}41472+\sqrt{\text{ß}}1944$

Dissimulato enim signo communi, multiplicatur quadratū unius in quadratum alterius, & reponitur postea signum radicale commune, ad productam summam.

De Diuisione.

EX ijs quæ dicta sunt superius capite nono, de diuisione, & ex ijs quæ iam sunt de multiplicatione dicta, facile est iudicare de diuisione Algorithmi huius. Id quod exemplis paucis sufficiat admonere.

Exemplum diuisionis.

Volo diuidere $\sqrt{\text{ß}}.432+\sqrt{\text{ß}}7776$ per 6. Sic stat exemplum.

$\sqrt{\text{ß}}.432+\sqrt{\text{ß}}7776$ ($\sqrt{\text{ß}}.12+\sqrt{\text{ß}}6$.
$\sqrt{\text{ß}}36\ \ \sqrt{\text{ßß}}1296$

Aliud exemplum pulchrum.

Volo diuidere $\sqrt{\text{ß}}.588+\sqrt{\text{ß}}34848$ per $\sqrt{\text{ß}}.12+\sqrt{\text{ß}}8$.

Primo, multiplico diuisorem per $\sqrt{\text{ß}}.12-\sqrt{\text{ß}}8$ (secundum regulam datam de diuisione cap. 9.) facit $\sqrt{\text{ß}}136$ diuisorē nouū.

Secundo, multiplico etiam diuidendum per $\sqrt{\text{ß}}.12-\sqrt{\text{ß}}8$, facit:

facit nouũ diuidendum numerũ hunc, √ȝ. 6528 + √ȝ 332928. Diuido ergo √ȝ. 6528 per √ȝ 136, & √ȝ. √ȝ 332928 diuido per √ȝȝ 18496, tunc prouenit ille quotiens √ȝ. 48 + √ȝ 18. Est autẽ √ȝȝ 18496, idem quod √ȝ 136.

Probo sic.

Quotientem illum √ȝ. 48 + √ȝ 18 multiplico per diuisorem illum √ȝ. 12 + √ȝ 8, tunc puenit mihi ista radix surda, √ȝ. 588 + √ȝ 34848: & illa fuit primo suscepta, ut diuideretur per √ȝ. 12 + √ȝ 8.

De Subtractione, & de reliquo negotio capitis huius.

Mirabitur forsitan aliquis, cur præter morem omnium Algorithmos scribentium, interposuerim multiplicationem & diuisionẽ additioni & subtractioni. Sed ut hoc facerem, fuit in causa, quòd additio non potuit absq; multiplicatione doceri. Quia ergo additio & multiplicatio concurrebant, & illæ operationum species ambæ, quadrabant ad figuram illã, qua ego 27 decimi uolui esse claram, essetq; res eô perducta, ut diuisio nihil egeret nisi paucis exemplis, quæ protracta in alium locum, eguisset repetitione multarum regularum, uolui eam (obmissa interim subtractione) multiplicationi cõtinuare. Itaq; breuitatis gratia, & ut Algorithmus ille integer atq; totus in uno loco haberetur, hunc ordinem obseruaui.

De subtractione autem, & de additione, radicum surdarum illarum, quæ sunt ad inuicem commensurabiles, id est, quæ habent ad inuicem proportionem rationalem, utenda est regula quam dedi capite 6. de additione & subtractione medialium. Vt, √ȝ. √ȝ 6 — √ȝ 2 subtracta à √ȝ. √ȝ 486 — √ȝ 162, relinquit √ȝ. √ȝ 96 — √ȝ 32. Cum enim sint sub proportione tripla, sic stant ad regulam De tri.

1. 2. √ȝ. √ȝ 6 — √ȝ 2, facit √ȝ. √ȝ 96 — √ȝ 32.

Vel sic pono & probo.

3. 2. √ȝ. √ȝ 486 — √ȝ 162, facit √ȝ. √ȝ 96 — √ȝ 32.

Vel proba per additionem sic.

1.3.√ß.√ß96 — √ß32, facit √ç.√ç486 — √ç162.

Item:

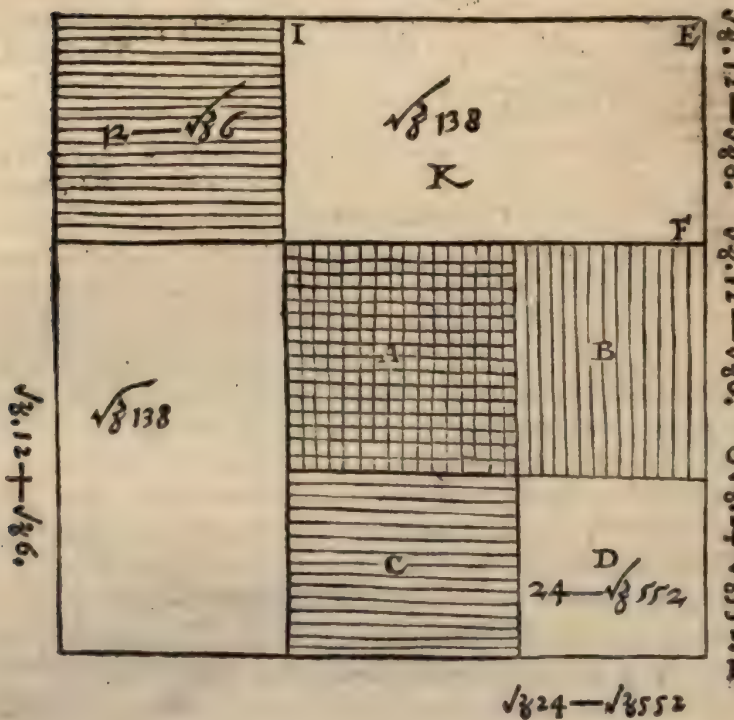
2.3.√ç.√ç96 — √ç32, facit √ç.√ç486 — √ç162.

Et sic de alijs.

DE subtractione autem surdarum radicum, ut ad propositionem Euclidis 71 decimi pertinet, item ad 77, utere multiplicatione, secundum regulam hanc.

Subtracto numero aliquo quocunq; ab alio, si relictum multiplicetur quadrate, erit radix quadrata producti æqualis relicto priori.

√ç.12 — √ç6. √ç.12 + √ç6.



Vt sit subtrahenda hæc radix surda, $\sqrt{\text{ȝ}}.12 - \sqrt{\text{ȝ}}6$ ab hac radice $\sqrt{\text{ȝ}}.12 + \sqrt{\text{ȝ}}6$ (sunt enim potentialiter incommensurabiles, continentesq; mediale, quadrataq; earum pariter accepta faciunt rationale, ut uult propositio 71) subtrahe eam primo per interpositionem signi subtractorum, hoc modo:

$$\sqrt{\text{ȝ}}.12 + \sqrt{\text{ȝ}}6. - . \sqrt{\text{ȝ}}.12 - \sqrt{\text{ȝ}}6.$$

Atque ita hoc relictum totum multiplica quadrate: uidelicet,

$$\sqrt{\text{ȝ}}.12 + \sqrt{\text{ȝ}}6. - . \sqrt{\text{ȝ}}.12 - \sqrt{\text{ȝ}}6$$
$$\sqrt{\text{ȝ}}.12 + \sqrt{\text{ȝ}}6. - . \sqrt{\text{ȝ}}.12 - \sqrt{\text{ȝ}}6$$

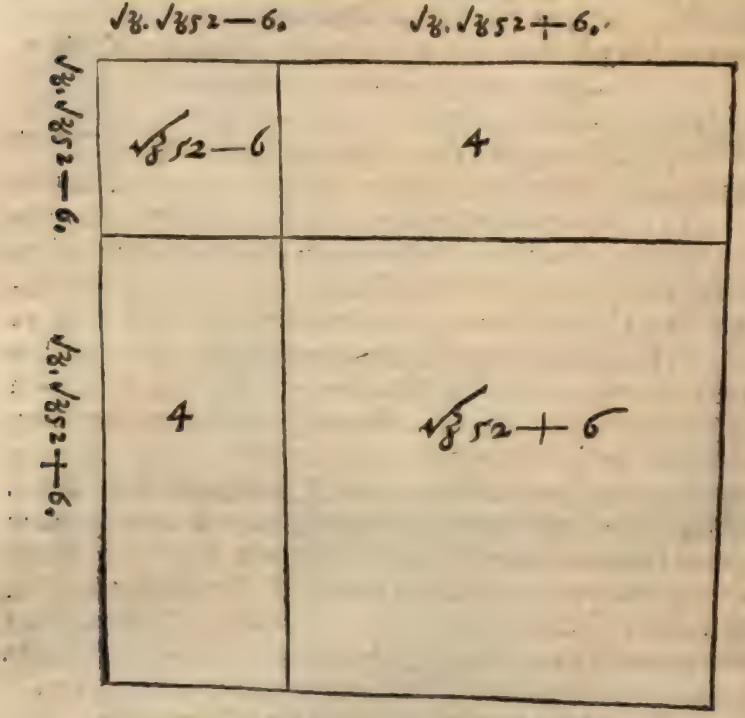
$$12 + \sqrt{\text{ȝ}}6 + 12 - \sqrt{\text{ȝ}}6 - \sqrt{\text{ȝ}}138 - \sqrt{\text{ȝ}}138.$$

Hæ particulæ additæ, seu in unum numerum reductæ, faciunt $24 - \sqrt{\text{ȝ}}552$. Tanta uidelicet est superficies D. cuius radix quadrata est $\sqrt{\text{ȝ}}.24 - \sqrt{\text{ȝ}}552$. Et dicit radix superficiei talis, Linea minor, ut docet propositio 71. Si, inquit, linea de linea detrahatur (ut E F, id est, $\sqrt{\text{ȝ}}.12 - \sqrt{\text{ȝ}}6$ detrahitur de F H. i. de $\sqrt{\text{ȝ}}.12 + \sqrt{\text{ȝ}}6$) fuerintq; potentialiter incommensurabiles (ut cum E F sit linea minor, & F H sit linea maior, sintq; per hæc diuersarum specierum lineæ, necesse est eas esse incommensurabiles, non solum longitudine, sed etiam potentia) continentesq; mediale (ut in figura uides superficiē K contineri sub E F & E I, q̃ est superficies medialis) quadrataq; earum ambo pariter accepta fecerint rationale (ut quadratum lineæ E F, id est, $12 - \sqrt{\text{ȝ}}6$, & quadratum lineæ F H, id est, superficies A B C D, quæ facit $12 + \sqrt{\text{ȝ}}6$, pariter accepta, faciunt 24) relicta linea erit irrationalis, vocabiturq; linea minor. ut linea G H, faciens $\sqrt{\text{ȝ}}.24 - \sqrt{\text{ȝ}}552$. Sed de ijs latius in propositionibus dicam.

De radicibus potentibus rationale & mediale.

INter illas radices surdas, de quibus iam dixi, & illas de quibus restat ut dicam, pulchra est differētia. Illæ enim radices, de quibus superius dixi in hoc capite (id est, radices quæ ueniunt à binomijs & residuis quartæ speciei) non habēt aliquas subspecies alias. Hæ uero radices, de quibus iam dicam, singulæ suas habēt subspecies, ut dicā in ꝓpositionibus.

Sed de resolutione potentium mediale & rationale dicendũ est, quanquam modus huiusmodi resolutionum, nihil uariet à regula data capite 10. de extractionibus radicum quadratarum ex binomijs & residuis quadratis. Vt sit resoluenda hæc radix potens, mediale & rationale, $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }208+8$.



1. Dimidiũ quadrati radicis resoluendæ, facit $\sqrt{52}+4$.

2. Quadrata particularum ab inuicẽ subtracta, relinquũt 36: scilicet 16 à 52, relinquit 36. cuius radicem (.i. 6) reseruo.

3. Addo $\sqrt{52}$ ad 6 (id est, ad radicem seruatam) facit $\sqrt{52}+6$: & huius radix quadrata, idest $\sqrt{.}\sqrt{52}+6$, est pars resolutionis maior.

4. Sub-

4. Subtraho radicem seruatam à $\sqrt{\sqrt{52}}$, facit $\sqrt{\sqrt{52}}-6$. Huius radix quadrata, quæ est $\sqrt{\cdot}\sqrt{\sqrt{52}}-6$, est pars resolutionis minor.

HÆ uero partes resolutionis, respondent propositioni 28. ut uides ex figura. Sunt enim potentialiter incommensurabiles, quia differunt specie: & continent superficiem rationalem, quia multiplicatione sua inter se, faciunt 4. Et ambo quadrata earum pariter accepta, sunt mediale: nam $\sqrt{\sqrt{52}}+6$ ad $\sqrt{\sqrt{52}}-6$ addita, faciunt $\sqrt{\sqrt{52}}$.

Compositæ uero partes hæ, restituunt radicem priorem, uidelicet $\sqrt{\cdot}\sqrt{\sqrt{208}}+8$.

Scilicet multiplicandæ inter se, sic stant.

$$\sqrt{\cdot}\sqrt{\sqrt{52}}+6.+.\sqrt{\cdot}\sqrt{\sqrt{52}}-6.$$
$$\sqrt{\cdot}\sqrt{\sqrt{52}}+6.+.\sqrt{\cdot}\sqrt{\sqrt{52}}-6.$$

$$\sqrt{\sqrt{52}}+6+\sqrt{\sqrt{52}}-6+4+4$$

Hæc multiplicata addita ad se, faciunt $\sqrt{\sqrt{208}}+8$. cui præponendum est signum $\sqrt{\cdot}$.

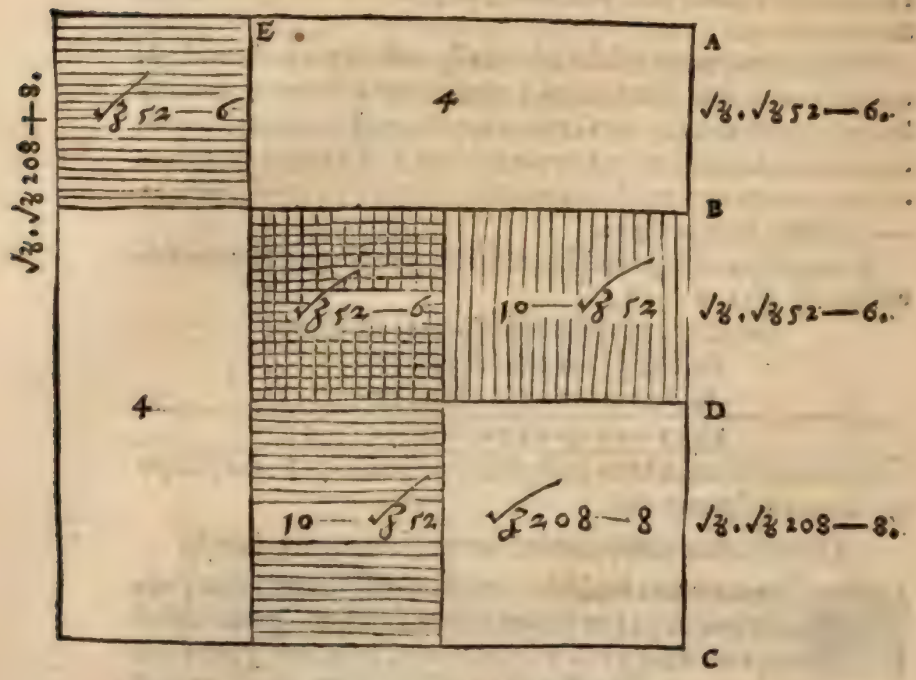
De radicibus componentibus mediale cum rationali.

COmponentes mediale cum rationali, fiunt (iuxta propositionem 72) ex subtractione partium, quales describit propositio 28. Vt sit componẽs mediale cum rationali, $\sqrt{\cdot}\sqrt{\sqrt{208}}-8$. Ista radix fit ex subtractione $\sqrt{\cdot}\sqrt{\sqrt{52}}-6$ de $\sqrt{\cdot}\sqrt{\sqrt{52}}+6$: scilicet A B de B C subtracta, relinquit B D. Respõdet autem A B & B C propositioni 28, item 72. Et iuxta propositionem 78, oportet ut ex D C possis inuenire quantitates A B & B C. Inuenies autem eas ex D C per regulam illam radicum, sæpe iam repetitam: scilicet, dimidium quadrati, de hac radice, $\sqrt{\cdot}\sqrt{\sqrt{208}}-8$, facit $\sqrt{\sqrt{52}}-4$.

Secundo. Quadrata particularũ ab inuicem subtracta, relinquunt 36: scilicet 16 à 52, relinquit 36. cuius radicẽ 6 reseruo.

Tertio, addo $\sqrt{\sqrt{52}}$ ad 6, & huius aggregati radix quadrata, facit mihi B C.

$\sqrt{8}.\sqrt{8}52-6.+.\sqrt{8}.\sqrt{8}52+6.$



Quarto. Subtraho 6 à $\sqrt{8}52$, & huius subtractionis relictũ, facit mihi A B.

Probo per subtractionem hoc modo.

$$\begin{array}{l} \sqrt{8}.\sqrt{8}52+6.-.\sqrt{8}.\sqrt{8}52-6 \\ \sqrt{8}.\sqrt{8}52+6.-.\sqrt{8}.\sqrt{8}52-6 \\ \hline \sqrt{8}52+6+\sqrt{8}52-6-4-4. \end{array}$$

Hæc multiplicata ad se addita, faciunt $\sqrt{8}208-8$; cuius radix est $\sqrt{8}.\sqrt{8}208-8.$

De

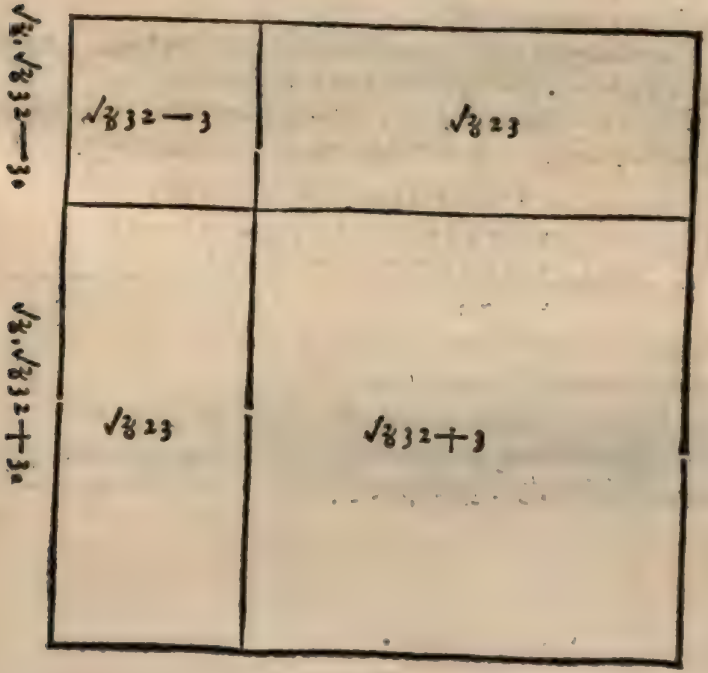
De radicibus potentibus duo medialia.

IN resolutionibus radicū, uenientium à binomijs sextæ speciei (quæ uocantur potentes duo medialia) considerāda uenit propositio 29 decimi. Illi enim ppositioni respondere debent partes resolutionis. Vt sit resoluenda hæc radix potens duo medialia, $\sqrt{8}.\sqrt{8}128+\sqrt{8}92$: erunt partes resolutionis illius hæ: $\sqrt{8}.\sqrt{8}32+3$, & $\sqrt{8}.\sqrt{8}32-3$.

Sunt autem hæ partes iuxta propositionē 29 primo incommensurabiles potentia, quia sunt irrationales specie differētes.

Secundo, continent superficiem medialem hanc, $\sqrt{8}23$, ut uides in hac figura.

$\sqrt{8}.\sqrt{8}32-3$. $\sqrt{8}.\sqrt{8}32+3$.



Tertio, quadrata earum ad se addita, faciunt hoc mediale, $\sqrt{\sqrt{}}128$. Et sunt medialia illa duo, incommensurabilia, sicut oportet, ut necesse sit etiam $\sqrt{\sqrt{}}92$ (id est, duplū huius $\sqrt{\sqrt{}}23$) & $\sqrt{\sqrt{}}128$ ad inuicem esse incommensurabilia medialia. Sic enim propositio 29 dicit: Duas lineas inuenire, potentia incommensurabiles, superficiemq; medialem continentes, quarum quadrata pariter accepta, sint mediale, incommensurabile duplo superficiei, unius lineæ in alteram.

¶ Modus autem resolutionis nihil uariat à regula sæpius iam repetita: scilicet,

Dimidium quadrati ipsius radicis, quam pro exemplo posui, facit $\sqrt{\sqrt{}}32+\sqrt{\sqrt{}}23$.

Item quadrata particularum ab inuicem subtracta relinquunt 9. cuius radix est 3.

Deinde addo 3 ad $\sqrt{\sqrt{}}32$, facit $\sqrt{\sqrt{}}32+3$. Cuius radix facit $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}32+3$. & est pars maior resolutionis.

Demum subtraho 3 à $\sqrt{\sqrt{}}32$, relinquitur $\sqrt{\sqrt{}}32-3$. cuius radix est $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}32-3$, & est pars minor resolutionis.

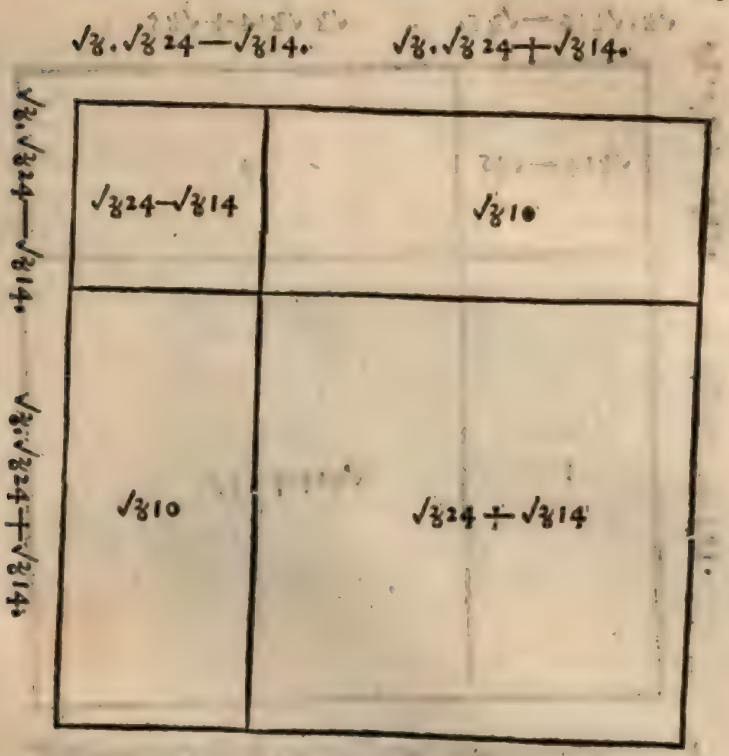
Probatur per additionem sic.

$$\begin{array}{l}\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}32+3.+.\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}32-3.\\ \sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}32+3.+.\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}32-3.\\ \hline \sqrt{\sqrt{}}32+3+\sqrt{\sqrt{}}32-3+\sqrt{\sqrt{}}23+\sqrt{\sqrt{}}23.\end{array}$$

Hæ particulæ additæ ad se, faciunt $\sqrt{\sqrt{}}128+\sqrt{\sqrt{}}92$. Cuius radix quadrata facit $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}128+\sqrt{\sqrt{}}92$.

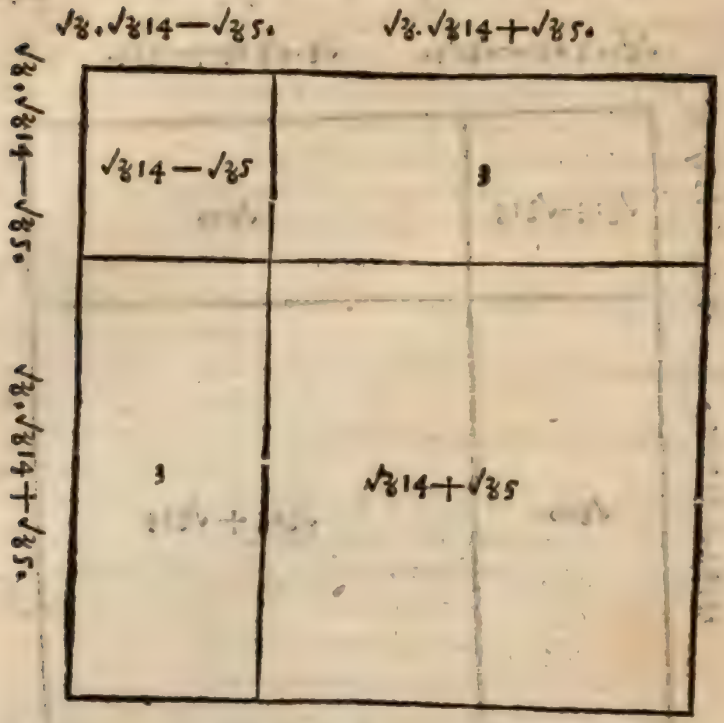
Aliud exemplum resolutionis.

¶ In hoc exemplo sequenti, resoluta est radix hæc potens duo medialia, $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}96+\sqrt{\sqrt{}}40$.



Sequitur aliud exemplum.

In quo resolutam uides radicem hanc potentem, medíale & rationale. √8.√856+6, in potentem duo medialia, & in componentem mediale cum medíali.

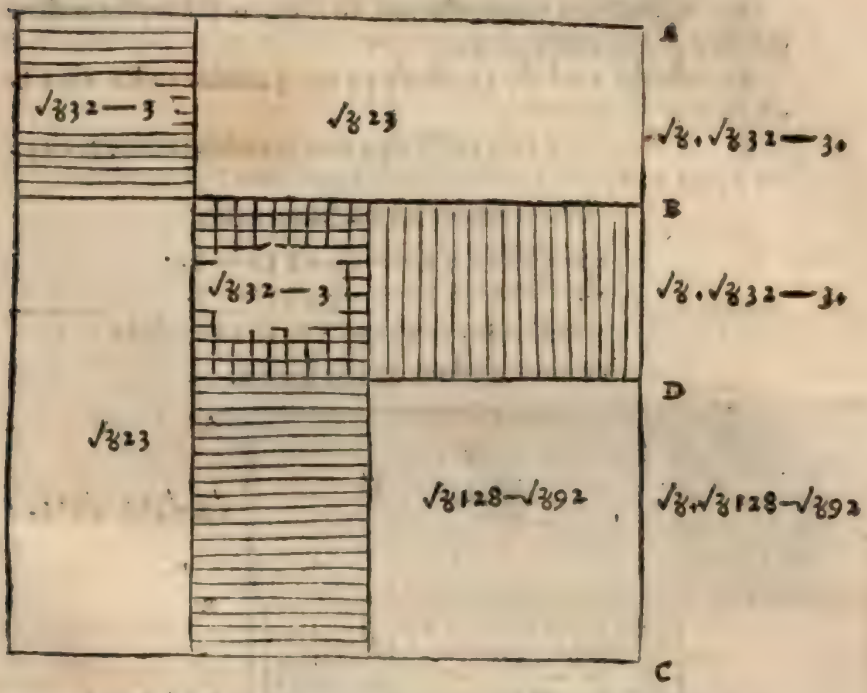


De radicibus componentibus medíale cum medíali.

TAndem omnium nouiſſima ſurdarum radicum ſpecies (inter eas quas Euclides tractat) ſuo iam ordine uenit tractanda: ea uocatur ſpecies Componentium medíale cum medíali. Cuius appellationis ratio ſatis patet ex ſuperioribus, ea eſt nouiſſima ſpecies irrationalium linearum apud Euclidem. Fiunt autē lineæ illius ſpeciei, ex ſubtractione radicis ſurdæ, à radice ſurda, quibus conueniunt omnia illa quæ habet propoſitio 29, & propoſitio 73, uidelicet ut ſint incommenſurabiles potentia, quòd ſuperficiem medíalem contineant, & ꝙ quadrata earum ad ſe addita, faciant ſuperficiem medíalem,

incom-

$\sqrt{8}.\sqrt{8}32-3.$ $\sqrt{8}.\sqrt{8}32+3$



incommensurabilem ei, quam continent ipsæ radices, sicut hæc figura illa omnia per exemplum clare habet. Exemplum autẽ figuræ inscriptum, est de hac radice componente mediale cum mediali, $\sqrt{8}.\sqrt{8}128-\sqrt{8}92$. Hæc fit, si $\sqrt{8}.\sqrt{8}32-3$ subtrahatur ab hac $\sqrt{8}.\sqrt{8}32+3$. ut in figura uides subtrahi A B de B C, atq; ea subtractione relinqui D C.

Reperiendæ uero sunt (iuxta propositionem 79) lineæ A B & B C, per lineam D C. Regula ea est, quam sæpissime repetitã uides per exempla capitis huius, & capitis decimi.

1. Dimidium quadrati, radicis, pro exemplo positi, est $\sqrt{8}32 - \sqrt{8}23$.

2. Quadrata particularum ab inuicem subtracta, relinquunt 9, cuius radix est 3.

3. Addo 3 ad $\sqrt{8}32$, fit $\sqrt{8}32 + 3$. cuius radix est $\sqrt{8}.\sqrt{8}32+3$. & est B C.

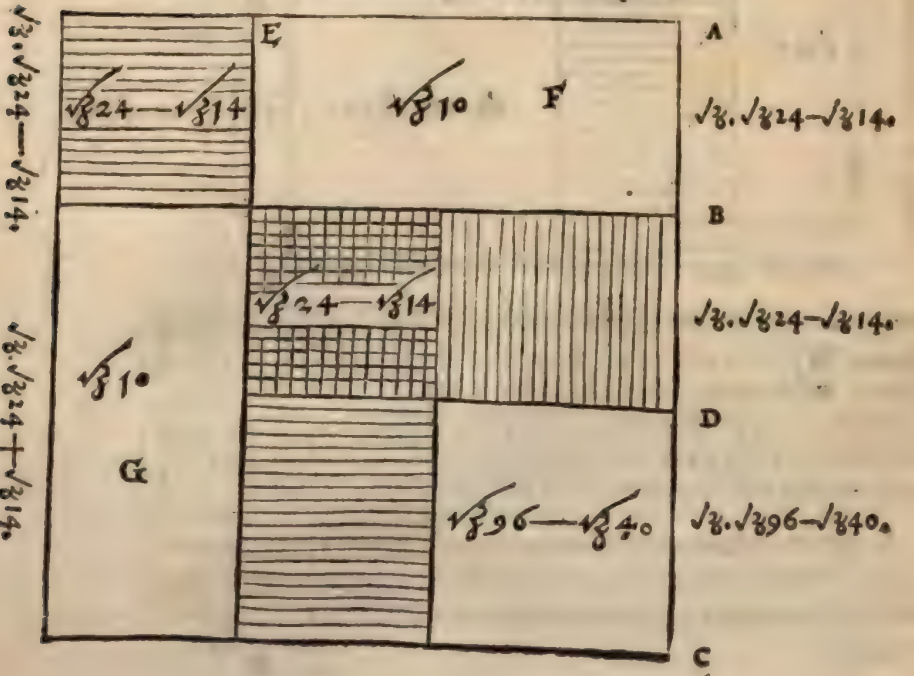
4. Subtraho 3 à $\sqrt{8}32$, fit $\sqrt{8}32 - 3$, cuius radix $\sqrt{8}.\sqrt{8}32 - 3$, est A B.

Probatur per subtractionem sic.

$\sqrt{8}.\sqrt{8}32+3. - .\sqrt{8}.\sqrt{8}32-3.$
$\sqrt{8}.\sqrt{8}32+3. - .\sqrt{8}.\sqrt{8}32-3.$

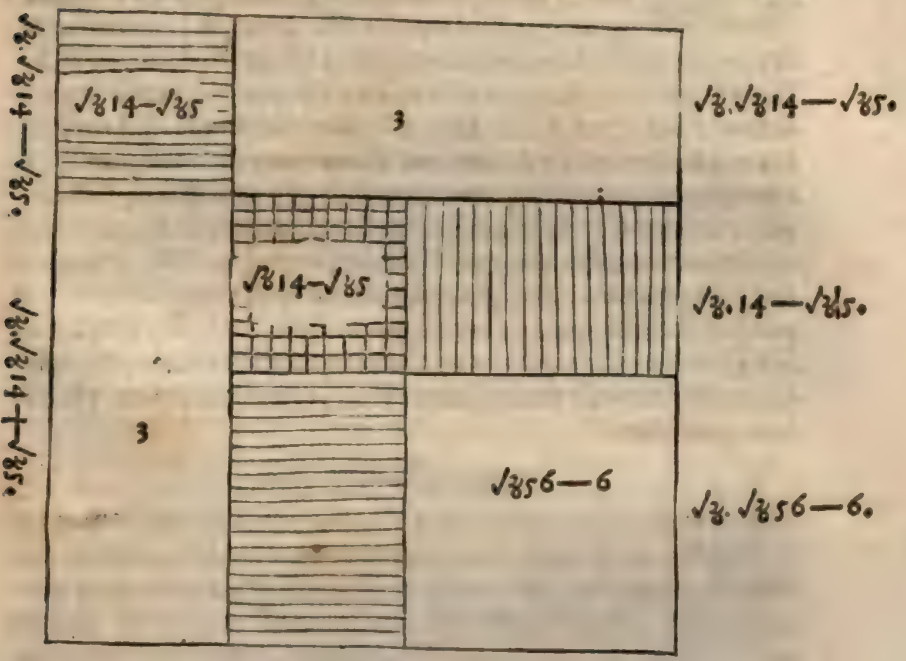
$\sqrt{8}32+3+\sqrt{8}32-3-\sqrt{8}23-\sqrt{8}23$

Aliud exemplum de hac specie.



In ſuperiori exemplo ſubtrahitur hæc radix componens mediale cum mediali, $\sqrt{8}.\sqrt{824}-\sqrt{814}$, ab hac radice potente duo medialia, $\sqrt{8}.\sqrt{824}+\sqrt{814}$, & relinquitur hæc radix componens mediale cum mediali, $\sqrt{8}.\sqrt{896}-\sqrt{840}$.

Sequitur exemplum, in quo componens mediale cum mediali, ſubtrahitur à potente duo medialia, & relinquitur cõponens mediale cum rationali.



De his plenius uidebimus in propoſitionibus.

De propositionibus Euclidis, quibus ipse numeros irrationales abstracte consideratos tractasse uidetur. Cap. XIII.

ORDINEM propositionum Euclidis, ut ipse eas posuit, exemplaribus etiam græcis uariantibus, nemo iam amplius (ut puto) satis ostendere potest. Quanquam enim ego sim ignarus Linguæ græcæ, tamen hoc ita esse didici, ab honestissimis & egregie doctis hominibus magistro Dionysio Ronero Esselingense, & magistro Ioan. Heinrico Mayer Bernense, atque domino Adolpho à Glauburgk Francofordiense, qui me pro sua eruditione pulchre iuuerunt. Cum enim illi uoces intelligerent græcas propositionum decimi, & ego rem ipsam, factum est ut iucundissima conuersatione & communicatione nos mutuò iuuaremus. Itaq; totum mihi decimum Euclidis interpretati sunt, ostenderuntq; pulchris rationibus, demonstrationes propositionum, quas græcus habet codex, non esse Euclidis, sed Theonis. Id quod ego etiam ex ipsa tractatione propositionum uerum esse multipliciter sensi, quemadmodum pluribus ostendam.

De propositione prima.

RECte & pulchre incepit Euclides à praxi quadam, qua significare uoluit minimum in numero irrationali, non esse dabile. Sicut enim in suo septimo, tractaturus numeros rationales, incipit à minimo quod est in numero rationali, id est, ab unitate, dicens: Vnitas est, qua unaquæq; res una dicitur, &c. Ita hoc loco etiam incipit de minimo proponere, quod est in quantitate seu numero irrationali. Quòd autem quantitatum appellatione uoluerit numeros irrationales significari, ostendi in superioribus, atq; ostendam etiam in sequentibus

bus,non obstantibus Theonis demonstrationibus,qui ea quæ Euclides proposuit de numeris irrationalibus, transtulit ad quantitates continuas.

Sic autem proponit Euclides:

[Positis duabus quantitatibus inequalibus, si a maiore auferatur maius, quam sit dimidium ipsius maioris, et a relicto iterum subtrahatur maius quam sit dimidium eiusdem relicti, idq; semper ita fiat, relinquetur tandem quãtitas que sit minor quantitate posita.]

Hic infero sic. Ergo data quantitate quacunq;, quantũcunq; sit parua, dabilis est alia quæ sit minor ea, ut impossibile sit dari aliquam, qua minor nõ possit dari. Quòd igitur alij dicunt de continua quantitate, uidelicet eam diuidi in semper diuisibilia, hoc Euclides proprie de numeris irrationalibus uult intelligi, ut plenius uidebimus ex propositione secunda. Obseruemus & hoc, quòd in hac propositione prima dicit de partibus dimidio maioribus, potius quàm de ipsis dimidijs, cum tamen ex dimidijs, secundum ea quæ proponit, idem sequatur. Certe satis manifeste ostendit Euclides, se non loqui de lineis, aut de superficiebus hoc loco, sed proprie de numeris irrationalibus. De numeris enim irrrationalibus non semper potest recipi dimidium, neq; de partibus eius &c. cum ratio Theoricæ eis abstractis non magis admittat minutias, quàm numeris rationalibus abstractis. De lineis autem, & de partibus eius, semper potest recipi dimidium, per 10 primi.

Sic igitur Euclides statim â principio uoluit lectorem esse admonitum, ne se loquentem de numeris irrationalibus, intelligeret loqui de lineis & superficiebus &c. Optime enim uidit, ut decens fuerit, si ornaret abstractos nonnullis propositionibus, quos tanto libro studebat nobilitare contractos.

De

De secunda propositione.

AD primam propositionem pulchre sequitur secunda, eò quòd primam optime confirmet hæc sequens, egregia manuductione, per calculationem, quæ actualiter tendat in infinitum, per continuam diuisionem seu subtractionem partis à parte. Cum autem quantitas continua ultra atomos non recipiat actualem diuisionẽ, satis patet etiam ex hac secunda propositione, Euclidem uoluisse loqui, in his propositionibus prioribus, proprie de numeris irrõnalibus abstractis.

Sic autem dicit:

¶ Si fuerint due quantitates inequales (æqualis enim æqualem mox tolleret) et fiat subtractio continua unius a reliqua, et relicti unius a relicto alterius, et in tali subtractiõe nunquam occurrat relictum quod numeret precedens relictum, incommensurabiles erunt ille quantitates.]

Ex sexta propositione uidebimus, ut Euclides hac secunda propositione principalissime uoluerit indicare infinitam continuationem subtractionum, qualem per exemplum conuenit ostendere. Vt sint quantitates duæ positæ, $\sqrt{6}$, & $\sqrt{8}$.

Subtraho primo $\sqrt{6}$ de $\sqrt{8}$, & relinquitur $\sqrt{8} - \sqrt{6}$. Itaq; uides $\sqrt{8}$ esse diuisam in $\sqrt{6}$, & $\sqrt{8} - \sqrt{6}$.

Secundo, subtraho $\sqrt{8} - \sqrt{6}$ de $\sqrt{6}$, & relinquitur $\sqrt{24} - \sqrt{8}$.

Tertio, subtraho $\sqrt{8} - \sqrt{6}$ de $\sqrt{24} - \sqrt{8}$, & remanet $\sqrt{54} - \sqrt{32}$.

Quarto, subtraho iterum $\sqrt{8} - \sqrt{6}$ de $\sqrt{54} - \sqrt{32}$, relinquitur $\sqrt{96} - \sqrt{72}$.

Quinto, subtraho $\sqrt{8} - \sqrt{6}$ de $\sqrt{96} - \sqrt{72}$, & relinquitur $\sqrt{150} - \sqrt{128}$.

Sexto, subtraho $\sqrt{8} - \sqrt{6}$ de $\sqrt{150} - \sqrt{128}$, & relinquitur $\sqrt{216} - \sqrt{200}$.

Septimo, subtraho $\sqrt{8} - \sqrt{6}$ de $\sqrt{216} - \sqrt{200}$, & relinquitur $\sqrt{294} - \sqrt{288}$.

Octauo

Octauo, subtraho √ϗ294 — √ϗ288 de √ϗ8 — √ϗ6, & relinquitur √ϗ392 — √ϗ384.

Nono, subtraho √ϗ294 — √ϗ288 de √ϗ392 — √ϗ384, & relinquitur √ϗ1352 — √ϗ1350.

Et sic deinceps in infinitum.

Semper enim, excluso eo, à quo facta est subtractio, recipiuntur duo numeri reliqui, & subtrahitur minor à maiore.

¶ In prædicta continuatione uidimus √ϗ8 — √ϗ6 contineri sexies in √ϗ6, ideoq; √ϗ8 — √ϗ6 sexies fuit subtractū cōtinue. Si autē tentassem illud septimo subtrahere, subtraxissem ipsum de √ϗ294 — √ϗ288, & prouenisset √ϗ384 — √ϗ392. Quia uero particula posita ad signum subtractorum maior est, particula reliqua, signum est certum, non potuisse √ϗ8 — √ϗ6 subtrahi de √ϗ294 — √ϗ288. Patet hoc etiam diuisione √ϗ6 per √ϗ8 — √ϗ6. Facit enim quotiens diuisionis illius √ϗ12 + 3, qui resolutus in rationalem numerum integrum, facit 6, &c.

De propositione tertia.

VIde iam ut tertia propositio sequatur ad secundam, mediante opposita secundæ, quæ sic habet: Si fuerint duæ quantitates inæquales, & fiat subtractio cōtinua unius à reliqua, & relicti unius à relicto alterius, & in tali subtractione occurrat relictū quod numeret præcedens relictum, tunc commensurabiles erunt illæ quantitates. Ad hanc itaq; sequitur tertia propositio, quæ sic habet:

¶ Propositis duabus quātitatibus inequalibus cōmensurabilibus, maximam quantitatē eas numerantē inuenire.]

Operare iuxta oppositam secundæ, tunc inuenies quantitatem maximam, numerantem propositas. Erit autem maxima quantitas earum, relictum illud, quod ex subtractione sui, nihil relinquit. Exemplum.

Propositis duabus quantitatibus his √ϗ15552, & √ϗ43200, subtraho √ϗ15552 de √ϗ43200, tūc remanet √ϗ6912. Subtraho secundo √ϗ6912 de √ϗ15552, tunc remanet √ϗ1728. Subtraho

tertio $\sqrt[3]{1728}$ de $\sqrt[3]{6912}$, tunc remanet $\sqrt[3]{1728}$. Subtraho quarto $\sqrt[3]{1728}$ de $\sqrt[3]{1728}$, tunc nihil remanet. Itaq; $\sqrt[3]{1728}$ est maxima mensura quantitatum positarum.

Propositio quarta.

DAtis cõmensurabilibus quantitatibus propositis, maximam quantitatem eas communiter numerantem inuenire.]

Continuemus hanc sequentibus. Cum enim necesse sit, ut inter commensurabiles quantitates, cadant proportiones rationales (quæ sunt tanquam numeri ad numerum, ut loquuntur propositiones immediate sequentes) quære eas per diuisionẽ, ut nosti ex superioribus. Mox autem ubi inspexeris terminos proportionum earum rationales, uidebis quid sit faciendum.

Exemplum.

Propositis his tribus quantitatibus, $\sqrt[3]{15552}$. $\sqrt[3]{27648}$. $\sqrt[3]{43200}$, inuenio terminos proportionum earum rationales esse, 3. 4. 5. in quibus mox uideo unitatem esse maximam mensuram singulos numerantem. Est autem unitas, pars tertia primi, & pars quarta secundi, & pars quinta tertij. Sic tertia pars minimæ ex tribus propositis quantitatibus, erit maxima quantitas numerans singulas trium: & hæc etiam erit quarta pars secundæ quantitatis, & pars quinta tertiæ quantitatis. Siue igitur $\sqrt[3]{15552}$ diuidatur per 3 (seu per $\sqrt[3]{9}$) siue $\sqrt[3]{27648}$ diuidatur per 4 (seu per $\sqrt[3]{16}$) siue $\sqrt[3]{43200}$ diuidatur per 5, semper proueniet mensura earum maxima.

Est igitur quantitas maxima, numerans duas, tres, aut plures quantitates, tanquam unitas quædam introducta, qua numeri irrationales commensurabiles reducantur ad numerationem præcise. Vt uel hac sola ratione, decuerit Euclidem irrationales numeros abstracte consideratos non negligere.

Pertinet autem ad numerationẽ numerans, qui faciat quotientem, probatũ ratione Theoricæ, id est, qui sit rationalis atq; integer numerus. Ratio autem Theoricæ (exempli gratia) nõ

probat

probat quotientem prouenientem ex diuisione $\sqrt{\frac{1}{2}}96$ per $\sqrt{\frac{1}{2}}8$: neq; probat eum qui prouenit ex $\sqrt{\frac{1}{2}}18$ per $\sqrt{\frac{1}{2}}8$. Sufficit uero ad commensurationem quotiens rationalis, siue ille sit integer siue fractus.

De propositione quinta, & eius opposita.

SVperius sæpe facta est mentio huius propositionis quintæ, ut quæ apertissime neget numeros irrationales esse numeros.

Sic autem dicit:

¶ Omnium duarum quantitatum commensurabilium, est proportio tanquam numeri ad numerum.]

Vt proportio $\sqrt{\frac{1}{2}}180$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}}80$, est proportio tanquã 3 ad 2. Sunt igitur proportionum quædam, numeri ad numerum, ut 3 ad 2: quædam, tanq; numeri ad numerum, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}180$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}}80$: quædam uero numeri ad non numerum, uel non numeri ad numerum, ut 12 ad $\sqrt{\frac{1}{2}}48$, uel $\sqrt{\frac{1}{2}}12$ ad 2. Et quia proportio 12 ad $\sqrt{\frac{1}{2}}48$ iuxta Euclidem, non est proportio numeri ad numerum, neq; est proportio tanquam numeri ad numerum, igitur secundum ipsum $\sqrt{\frac{1}{2}}48$ non est numerus, &c.

Hoc etiam habet opposita quintæ, quam Theon facit Euclidis septimam. Ea sic dicit:

¶ Omnium duarum quantitatũ incommensurabilium, non est proportio tanquam numeri ad numerum.]

Vt proportio $\sqrt{\frac{1}{2}}24$ ad $\sqrt{\frac{1}{2}}8$, est tanquam 12 ad $\sqrt{\frac{1}{2}}48$: uel est tanquam $\sqrt{\frac{1}{2}}12$ ad 2, id est, tanquam numeri ad non numerum: uel tanquam non numeri ad numerum, ut dixi paulo superius. Ergo $\sqrt{\frac{1}{2}}12$ non est numerus, sed est numerus irrationalis: sicut homo pictus non est homo, sed est homo pictus.

De propositione sexta, & eius opposita.

PRopositio sexta Euclidis est conuersa quintæ, sicut opposita sextæ est conuersa oppositæ ipsius quintæ. Et oppositam sextæ, facit Theon octauam Euclidis.

Sic autem dicit ſexta:

Si fuerint due quantitates, quarum proportio vnius ad alteram, ſit tanquam numeri ad numerum, eas duas commenſurabiles eſſe neceſſe eſt.]

Vt, quia proportio √ 180 ad √ 80, eſt tanquam numeri ad numerum (id eſt, quia eſt rationalis proportio) ideo neceſſe eſt ut termini illi ſint commenſurabiles. Sic etiam, quia proportio √ 24 ad √ 8, non eſt proportio tanquam numeri ad numerum (id eſt, quia eſt irrationalis) ideo neceſſe eſt, ut termini illi ſint incommenſurabiles.

Sicut dicit ſequens propoſitio oppoſita ſextæ:

Si fuerint due quantitates, quarum proportio vnius ad alteram, non ſit tanquam numeri ad numerum, eas duas incommenſurabiles eſſe neceſſe eſt.]

Hic obſeruabis, ut hæ duæ propoſitiones, uidelicet ſexta & eius oppoſita, non ſolum conuertantur ad quintam & eius oppoſitam, ſed pertingant ulterius uſq; ad ſecūdam: ſcilicet cum ſecunda dicat, nunquam occurrat, in ſubtractionum continuatione, relictum quod numeret præcedens relictū, tunc tandem poſſim ſcire de propoſitis quantitatibus duabus, an ſint incommenſurabiles, cogor cogitare me nunquam poſſe hoc ſcire, propter infinitam illam continuationē. At hic mihi ſuccurrit propoſitio ſexta cum ſua oppoſita, & docent hoc proprie, quod ſecunda uidebatur docere. Vt, quia √ 180 ad √ 80, habet proportionem quam habet 3 ad 2, ideo neceſſe eſt eas eſſe commenſurabiles. Quia uero √ 24 ad √ 8, non facit proportionem rationalem (cū √ 24 diuiſa per √ 8, faciat √ 3) ideo neceſſe eſt eas eſſe incommenſurabiles, & continuationem illam ſubtractionum (de qua propoſitio ſecunda loquitur) progredi in infinitū.

De propoſitione quam Campanus facit ſeptimam.

ILla propoſitio, quam Campanus facit ſeptimā, Theon facit nonam. Intempeſtiua autem eſt appellatio ſuperficierum, quam Campanus habet, & linearum, quam Theon

Theon habet. Sed appellationes illas posuit forsitan Euclides ipse, ut negaret hoc idem obstinate, quod in propositionibus præcedentibus negauerat, uidelicet numeros irrationales negauerat esse numeros, quos nunc uehemētius negare uidetur esse numeros, ita ut eos potius dici uelit superficies, aut aliquid aliud huiusmodi: forte quòd uiderit eos præcisam sui quantitatem non habere, neq; habere mensuram omnibus irrationalibus numeris communem (qualis est in rationalibus unitas) quæ talia sunt, ut numeris maxime conueniant, uideritq; ipsos commensurabiles numeros irrationales habere, hoc quod superficiebus cōueniet maxime, uidelicet latera ad inuicem proportionalia, quemadmodum propositione 24 octaui, rationales numeros similes, uocat superficiales, & propositione 16 octaui, talium numerorū radices quadratas, uocat latera seu lineas; uel forte uoluit Euclides hanc (cum sibi similibus) esse elementarem, quales habet caput sequens.

Sic autem habet propositio.

[Omnium duarum quantitatum, quarum latera (id est, radices quadratæ) longitudine sunt cōmensurabilia, est proportio unius ad alteram, tanquam numeri quadrati ad numerum quadratum.]

Vt quia $\sqrt{\frac{1}{8}}243$ ad $\sqrt{\frac{1}{8}}48$, est tanquam 3 ad 2: ergo $\sqrt{\frac{1}{8}}243$ ad $\sqrt{\frac{1}{8}}48$, est tanquam quadratus numerus ad quadratum, uidelicet 9 ad 4. Sic enim propositio hæc cōtinuatur ad propositiones præcedentes. Loquuntur enim propositiones præcedentes de proportionibus simplicibus numerorū irrationalium. Hæc autem loquitur de proportionibus eorum cōpositis, & de partibus compositionis earum, quæ sunt radices earum ad inuicē commensurabiles, simulq; totum inuoluit Algorithmum proportionum compendiosissime. Nam si radices quantitatum duarum commensurabiles bis ponantur, positæq; proportiones ad se addantur, composita producitur proportio, quæ est tanquam numerus quadratus ad numerum quadratum.

Vt $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{48}}}$ ad $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{48}}}$ facit $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{48}}}$.

Item $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{48}}}$ de $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{48}}}$ facit $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{48}}}$.

Et quia duplatio est multiplicatio per 2, & dimidiatio est diuisio per 2. Inuoluitur etiam multiplicatio hoc loco atq; diuisio.

Vt $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{48}}}$ duplata, facit $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{48}}}$

Et $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{48}}}$ dimidiata, facit $\sqrt{\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{48}}}$

De propositione opposita propositioni præcedenti.

NOn frustra etiam opposita præcedentis propositionis ponitur: sed quemadmodũ præcedens propositio complicat Algorithmum proportionũ rationalium, habentium terminos irrationales, ita hæc complicat Algorithmum proportionum irrationalium.

Sic autem habet:

Omnium duarum quantitatum, quarum latera longitudine sunt incommensurabilia, non est proportio vnius ad alteram, tanquam numeri quadrati ad numerũ quadratum.

Vt quia $\sqrt{\sqrt{18}}$ ad $\sqrt{\sqrt{8}}$ non habet proportionem, quam habet numerus ad numerum, ideo $\sqrt{18}$ ad $\sqrt{8}$, non habet proportionem, quam habet quadratus numerus ad numerum quadratum. Vt autem Algorithmum irrationalium proportionũ inuoluat ista propositio, uidere poteris ex similitudine eorum quæ dicta sunt circa propositionem præcedentem.

Scilicet $\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}}$ ad $\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}}$ facit $\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}}$

Item $\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}}$ de $\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}}$ facit $\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}}$

Item $\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}}$ duplata, facit $\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}}$

Item $\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}}$ dimidiata, facit $\sqrt{\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}}$

De

De propositionibus conuersis duarum præcedentium.

AD superiores duas propositiões immediate præceden tes, sequuntur duæ aliæ propositiones, quarum prior est conuersa prioris ex duabus præcedentibus, & poste rior est conuersa posterioris ex præcedentibus duabus.

Sic autem habet propositio prior:

¶ Si fuerit proportio quantitatis vnius ad alteram, tan quam proportio numeri quadrati ad numerũ quadratum, latera earum erunt in longitudine commensurabilia.

Vt quia proportio √.243 ad √.48, est tanquam proportio numeri quadrati ad numerũ quadratum, ideo √.243 ad √.48 commensurabilis est longitudine. Sicut igitur sexta propositio & eius opposita, docent iudicare de duabus propositis quantitatibus, utrum sint commensurabiles uel incommensurabiles, sic hæc quæ modò posita est, docet quantitates commensurabi les dare. Vt quia 24 ad 6 habet proportionẽ eam, quam habet quadratus ad quadratũ, ideo √.24 ad √.6, est longitudine com mensurabilis: & √.24 ad √.6, est potẽtia tm̃ cõmensurabilis. Sic uero habet propositio opposita huic quæ iam tractata est.

¶ Et si non fuerit proportio quantitatis vnius ad alterã, tanquam numeri quadrati ad numerum quadratum, latera earum in longitudine incommensurabilia erunt.

Vt quia √.24 ad √.6 non habent proportionẽ numeri qua drati ad numerum quadratum, ideo √.24 ad √.6 non est lon gitudine commensurabilis. Habet igitur hæc propositio usum egregium, scilicet ex ea producuntur numeri binomiales & re siduales. Si enim receperis duos numeros rationales, quorum neuter sit quadratus, & quorum proportio non sit tanquã qua drati numeri ad quadratum, tunc radices eorum additæ per si gnum additorum, dabunt quantitatem binomialem tertiæ spe ciei, aut sextæ. Si aũt minor eorũ sit quadratus (ut 18 & 9) tunc radices eorum dabunt binomialem quantitatẽ 2 uel 5 speciei. Et si maior eorum sit quadratus (ut 36 & 18) tũc radices eorum dabunt binomialem quantitatem primæ uel quartæ speciei,

De propositionibus illis, quæ ex proximis quatuor præcedentibus deducuntur.

EX illis quatuor propositionibus proximo loco positis sequũtur aliæ quatuor, quæ ex proportionũ exemplis pulchre ostẽdunt. Eas Theon optime trahit ad lineas.

Prima.

Radices cõmensurabiles, cõmẽsurabilia habẽt quadrata.

Applicatio Theonis.

Lineæ quæ in longitudine sunt commensurabiles, etiam potentia sunt commensurabiles.

Vt quia $\sqrt{\frac{8}{8}1944}$ & $\sqrt{\frac{8}{8}24}$ ad inuicem sunt commensurabiles, necesse est ut $\sqrt{\frac{8}{1}1944}$ & $\sqrt{\frac{8}{1}24}$ ad inuicem sint commensurabiles. Patet hoc ex Campani septima.

Item sic patet. Proportio commensurabilium terminorum, est rationalis (ut docet 6 huius decimi) Proportio autem rationalis, est proportio integra: proportio uero irrationalis, est proportio fracta. Impossibile autem est, ut res integra fiat fracta, ex duplatione sui. Ergo impossibile est, ut termini proportionis rationales, fiant incommensurabiles, si ipsa proportio dupletur: id quod fit, dum loco radicum ponũtur earũ quadrata.

Secunda.

Quantitates commensurabiles, non necessario ponunt radices commensurabiles.

Applicatio.

Lineæ quæ potentia sunt commensurabiles, non necessario sunt longitudine commensurabiles.

Vt $\sqrt{\frac{8}{1}54}$ & $\sqrt{\frac{8}{1}24}$ sunt cõmensurabiles: radices uero ponunt incommensurabiles has $\sqrt{\frac{8}{8}54}$ & $\sqrt{\frac{8}{8}24}$. Patet hoc etiam ex proportionum applicatione. Nam sicut numeri integri aliquando dimidiatione sui, ponunt numerũ fractum: sic proportio integra, aliqñ fit proportio fracta, per dimidiationẽ sui, &c.

Tertia.

Radices commensurabiles, non necessario ponunt quadrata

drata incommensurabilia. Applicatio.

Lineæ quæ longitudine sunt incōmensurabiles, non necessario sunt potentia incommensurabiles.

Vt $\sqrt{\frac{8}{8}54}$ & $\sqrt{\frac{8}{8}24}$, sunt ad inuicem incommensurabiles, & tamen ponunt quadrata hæc ad inuicem non incommensurabilia, $\sqrt{\frac{8}{8}54}$ & $\sqrt{\frac{8}{8}24}$.

Patet hoc etiam ex proportionum applicatione. Sicut enim fieri potest, ut numerus fractus duplatione sui, fiat integer: sic fieri potest ut proportio fracta (id est, irrationalis) duplatione sui fiat integra seu rationalis.

Quarta.

Quantitates incommensurabiles necessario habent radices incommensurabiles.

Applicatio.

Lineæ quæ potentia sunt incommensurabiles, necesse est, ut longitudine quoq; sint incommensurabiles.

Vt quia $\sqrt{\frac{8}{8}}$ & $\sqrt{\frac{8}{8}6}$ sunt incommensurabiles, necesse est, ut & radices sint incommensurabiles, uidelicet $\sqrt{\frac{8}{8}8}$ & $\sqrt{\frac{8}{8}8}6$.

Patet hoc etiam ex proportionum applicatione. Nam sicut nullus numerus fractus dimidiatione sui fit integer: ita nulla proportio irrationalis, dimidiatione sui fit rationalis.

De propositione quam Campanus facit octauam.

HAnc propositionem quam Theon facit duodecimam, Campanus facit octauam. Habet autem tres concomitantes propositiones. Et tractationi earum respōdent talia quædam, quæ VII libro tractauit Euclides.

Nam quod dicit prior:

Si fuerint duæ quantitates vni quantitati commensurabiles, ipsas quoq; ad inuicē cōmensurabiles esse necesse est.

Simile est huic:

Si fuerint duo numeri contra unum compositi, ipsos quoq; contra se compositos esse oportet.

Vt quia uterq; horum, 343 & 56, compositus est contra 21,

necesse est, ut ipsi quoq; contra se sint compositi.

Sic quia utraq; quantitatum harum √72 & √98, huic tertiæ sunt commensurabiles √8, necesse est, ut etiam inter se sint commensurabiles.

Item huic.

Si fuerint duæ quantitates, quarum vna alicui tertiæ sit commensurabilis, altera eidem tertiæ incōmensurabili, erunt duæ quantitates illæ incommensurabiles.

Similis est hæc:

Si fuerint duo numeri, quorum unus contra aliquem alium sit compositus, & alter contra eundem sit incompositus, erunt illi duo numeri contra se incompositi.

Vt quia ex his duobus numeris, 9 & 8, alter contra 4 est compositus, reliquus uero est incompositus contra eundem, necesse est ut duo numeri positi sint contra se incompositi.

Sic quia posterior quantitas ex his duabus √72 & √54, est cōmensurabilis huic tertiæ √24, & eidem prior sit incōmensurabilis, necesse est ut positæ duæ sint ad inuicē incōmēsurabiles.

Item hæc.

Si fuerint duæ quantitates commensurabiles, alteraq; earum fuerit incommensurabilis alicui alij quantitati, tunc reliqua eidem incommensurabilis erit.

Similis est hæc:

Si fuerint duo numeri contra se compositi, & alter eorum sit contra aliquem alium incompositus, necesse est ut etiam reliquus contra illum sit incompositus.

Vt quia illi duo numeri 6 & 8, sunt contra se compositi, & alter eorum sit contra 5 incompositus, necesse est ut etiam reliquus sit contra eundem incompositus.

Sic quia hæ duæ quantitates √72 & √98 sunt commensurabiles, & altera earum est incommensurabilis ad √24, necesse est, ut etiam reliqua incommensurabilis sit ad eandem.

De

De propositione quam Campanus facit nonam.

AD hanc propositionẽ quam Campanus nonam facit, & Theon 16, sequunt etiam similia ex Euclidis septimo.

Nam quòd hæc dicit:

¶ Si fuerint duæ quantitates commensurabiles, totum quoque ex eis confectum, vtricꝫ earum cõmensurabile erit.

Simile est huic:

Si fuerint duo numeri compositi contra se, totum quocꝫ ex eis confectum contra utruncꝫ erit compositum.

Vt si 98 & 21 ad se addantur, fient 119. Et quia 98 & 21 sunt contra se compositi, erit 119 contra utruncꝫ compositus.

Sic quia √ȝ72, & √ȝ162. sunt commensurabiles, erit etiam √ȝ450 ad utruncꝫ commensurabilis, eò quòd sit aggregata ex √ȝ72 & √ȝ162.

Item huic oppositæ priori:

¶ Si fuerint duæ quantitates incommensurabiles, erit aggregatum earum, vtricꝫ incommensurabile.

Similis est.

Si fuerint duo numeri contra se incompositi, qui ex ambobus coaceruatur, ad utruncꝫ eorum erit incompositus.

Vt 10 & 17 faciunt 27, quia ergo 10 & 17 sunt contra se incompositi, necesse est ut 27 sit contra utruncꝫ incompositus.

Sic quia √ȝ8 & √ȝ12 sunt incommensurabiles, necesse est ut √ȝ12 + √ȝ8 contra utruncꝫ sit incommensurabilis.

Item hæc quæ est conuersa nonæ apud Campanum.

¶ Si fuerint duæ quãtitates, fueritꝫ aggregatum ex eis, vtricꝫ partium illarũ commensurabile, erunt etiam partes inter se commensurabiles.

Similis est huic.

Si numerus ex duobus coaceruatus contra utruncꝫ sit compositus, necesse est, ut duo illi numeri ex quibus facta est coaceruatio, sint contra se compositi.

Vt quia 119 aggregatus est ex 98 & 21, & contra utrunq; eorum est compositus, necesse est ut 98 contra 21 sit cõpositus.

Sic quia √ȣ450 est aggregata ex √ȣ72 & √ȣ162, & est commensurabilis ad utranq;, ideo necesse est ut √ȣ72 ad √ȣ162 sit commensurabilis.

Item hæc opposita immediate præcedentis.

¶ Si fuerint duæ quantitates, fueritq; aggregatum ex eis vtriq; partium illarum incommensurabile, erunt etiam partes illæ inter se incommensurabiles.

Similis est huic.

Si numerus ex duobus coaceruatus, contra utrunq; sit incõpositus, necesse est ut duo illi numeri, ex quibus facta est coaceruatio, sint contra se incompositi.

Vt quia 27 coaceruatus est ex 10 & 17, & contra utrunq; est incompositus, necesse est ut 17 contra 10 sit etiam incõpositus.

Sic quia √ȣ12 + √ȣ8 est incommensurabilis his suis partibus √ȣ12 & √ȣ8, ideo partes illæ etiam ad inuicem sunt incommensurabiles.

De propositione quæ apud Campanum est decima.

EX ea propositione quam Campanus decimam facit, & Theon undecimam, habemus pulchrum exercitium multiplicandi atq; diuidendi per numeros irrationales quoscunq;: quemadmodum ex superiore propositione, quam Campanus nonam facit, cum adiunctis sibi, habemus exercitium addendi & subtrahendi per eosdem, ut sic duæ propositiones illæ, cum sibi adiunctis, integrum Algorithmum omnium numerorum irrationalium referant.

Sic autem dicit:

¶ Omnium quatuor quantitatũ proportionalium, si fuerit prima commensurabilis secundæ, erit et tertia commensurabilis quartæ.

Exẽplum huius uidere poteris ex his 4 terminis regulæ Detri,

√ȣ8. √ȣ18. √ȣ12. √ȣ27.

Si

¶ Si vero prima incõmensurabilis fuerit secundæ, tertia quoque incommensurabilis erit quartæ. Vt hic:

√⅜8. √⅜12. √⅜18. √⅜27.

Videamus nunc, exercitij gratia, ut ea quæ septimo libro Euclides docuit de numeris rationalibus, conueniant cum numeris irrationalibus, de quibus hoc loco docuit.

Si fuerint quatuor numeri proportionales (inquit 20 septimi) quod ex ductu primi in ultimum producitur, æquũ est ei quod producitur ex ductu secundi in tertium. Et si quod ex primo in ultimum producitur, æquum fuerit ei quod ex secundo in tertium, illi quatuor numeri sunt proportionales.

Si fuerint quatuor numeri proportionales (inquit 14 septimi) permutatim quoq; proportionales erunt.

Si fuerint quatuor numeri proportiõales (iuxta 11 septimi) faciet diuisio secundi per primum, quantum diuisio quarti per tertium. Et si secũdus diuisus per primum, fecerit id quod quartus diuisus per tertiũ, erũt quatuor numeri illi proportionales.

Si fuerint quatuor numeri, quorum secundus primum toties contineat, quoties quartus tertium, continebit (iuxta 9 & 10 septimi) tertius primum, quoties quartus secundum.

Si fuerint quatuor numeri, quorum secundus toties contineat primum, quoties quartus tertium, continebunt (iuxta 5 & 6 septimi) secundus & quartus pariter accepti, primum & tertium pariter acceptos, quoties secundus continet primum &c.

Euclides etiam hoc signo testari uoluit, se hic loqui de irrationalibus numeris proprie, sicut in septimo de rationalibus, q̃ utrobiq; cœperit à propositionibus similibus. Sic enim prima septimi, similima est secundæ decimi; & secunda septimi, similima est tertiæ decimi; & tertia septimi, similima est quartæ decimi.

De propositionibus quibus Euclides utitur tanq; elementis quibusdam ad compositionem suarum tredecim specierum, Cap. XIIII.

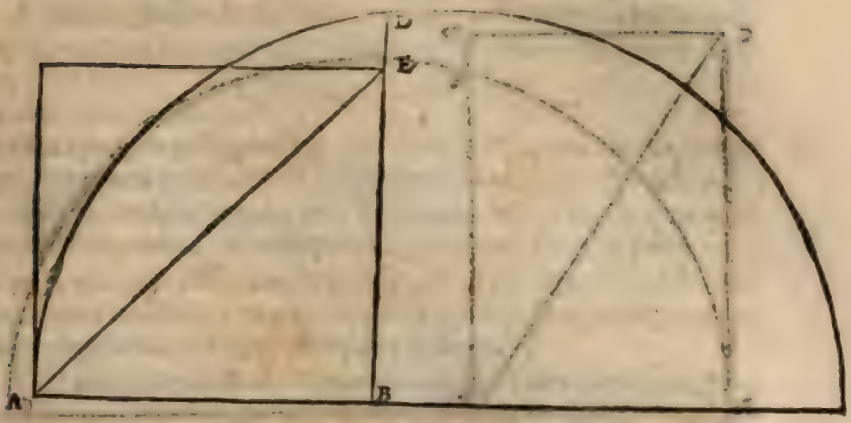
Vidit Campanus uir eruditus, propositiones quasdam decimi Euclidis esse elementares, si ad reliquas comparentur: ideo eas, pulcherrimo ordine obseruato, collocauit inter decimam ordinis sui, & quintamdecimã, tanquam interstitium quoddam, quo distinguerentur propositiones irrationalium numerorum abstractorum (ut ego uideo) à propositionibus irrationalium linearum, id est, irrationaliũ numerorum contractorũ. Hac uero ratione ego eas uoco elementares propositiones, q̃ secundum eas producantur lineæ indifferenter utiles atq; inutiles ad propositiones rerum principalium, quæ in decimo tractantur, adeo uidelicet informes sunt, ut ad nullum usum certũ uideantur esse regulatæ, nisi restrictionibus certis corrigantur, ita ut eliminatis inutilibus lineis, solummodo utiles proferant. Hoc, inquam, uidit Campanus, etsi non uocarit eas elementares, id quod ego ex ordine eius uideo.

De prima propositione elementari.

Elementaris propositio prima, problema est, & modum inuentionis requirit, qui quadrangulis rectangulis absoluitur, quibus figuris solis utitur Euclides in suo decimo, nisi quòd eas alicubi dimidiatas recipit per diagonales, id est, triangulares orthogonaliter. Sic autem dicit:

¶ Proposita quacunque linea recta, duas ei incommensurabiles inuenire, unam in longitudine, alteram in longitudine et potentia.

Proposita linea quacunq;, constitue ad mensuram eius quadratum, tunc diameter eius necessario erit incommensurabilis longitudine tantum, ad lineã propositam. Medium uero proportionale inter costam & diametrũ quadrati, erit eidem lineæ propositæ incommensurabilis longitudine & potentia.



Vt posita linea A B, erit ei incommensurabilis longitudine, linea A E seu B C. Et eidem lineæ A B, erit incommensurabilis longitudine & potentia, linea B D.

Exempla.

Vt si A B fecerit 6, faciet B C $\sqrt{72}$, & B D faciet $\sqrt{2592}$.

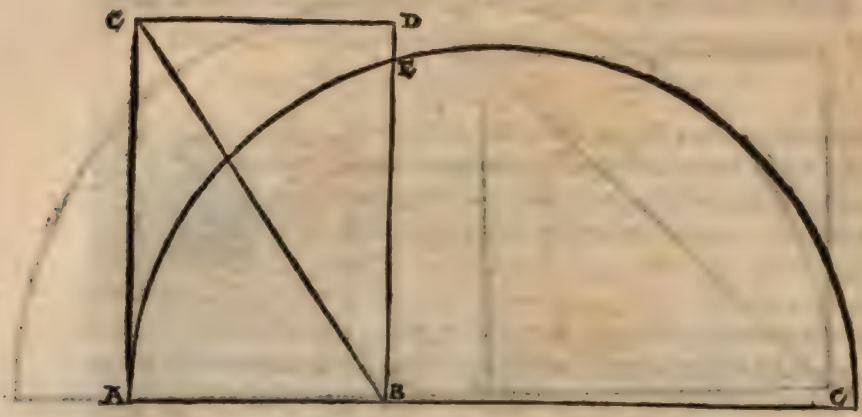
Item si A B fecerit $\sqrt{6}$, faciet B C $\sqrt{24}$, & B D faciet $\sqrt{12}$.

Item si A B fecerit $4+\sqrt{12}$, faciet B C $\sqrt{32}+\sqrt{24}$, & B D faciet $\sqrt{512}+\sqrt{288}$. Et sic de alijs.

Sed in huiusmodi exemplis semper manet eadem proportio linearum inuentarum ad lineam propositam, cum diameter ad costã quadrati eiusdẽ habeat ꝓportionẽ duplæ dimidiatæ &c. Si igitur mutare uelis proportiones, ut decet, oportet recipere quadrangula rectangula altera parte longiora, ut pagina uersa uides factum.

Si proposita linea A B recipiatur pro primo latere quadranguli rectanguli, & pro secundo latere, recipiatẽ B D faciens proportionem sesquialterã ad A B, erit B C incõmensurabilis longitudine tantum, ad A B: & B E erit incommensurabilis longitudine & potentia ad A B.

Vt si A B faciat 6, faciet B D 9, & B C faciet $\sqrt{117}$, & B E faciet $\sqrt{42121}$.



Item si A B fecerit $\sqrt{\sqrt{32}}$, faciet B D $\sqrt{\sqrt{162}}$: & B C faciet $\sqrt{\sqrt{338}}$: & B E faciet $\sqrt{\sqrt{104}}$.

Item si A B fecerit $\sqrt{32}$, faciet B D $\sqrt{72}$: & B C faciet $\sqrt{104}$. & B E faciet $\sqrt{\sqrt{3328}}$.

Item si A B fecerit $4+\sqrt{12}$, tunc faciet B D $6+\sqrt{27}$: & B C faciet $\sqrt{52}+\sqrt{39}$: & B E faciet tibi $\sqrt{\sqrt{832}}+\sqrt{\sqrt{468}}$.

Et sic de alijs.

¶ Sed sunt ꝓportiones aliquæ, quas nisi caueris, decipiēt te. In uniuerso autem genere proportionum multiplicium, item in uniuerso genere multiplicium superparticularium proportionum, nulla est quæ te decipere possit. Et in uniuerso genere superparticularium proportionum, una solummodo est proportio quam cauere debeas, uidelicet sesquitertia. Nam si B D faciat ad A B proportionem sesquitertiam, erit B C ad A B commensurabilis potētia & longitudine, & B E erit ad A B cōmensurabilis potentia tantū. Vt si faciat A B. $6+\sqrt{27}$, faciet B D $8+\sqrt{48}$, & B C faciet $10+\sqrt{75}$, & B E faciet $\sqrt{60}+\sqrt{45}$.

Item in uniuerso genere superpartientium nulla erit proportio alia qua possis decipi, si solummodo caueas superseptipartientem octauas.

Sed

¶ Sed in genere multiplicium superpartientiũ infinitæ sunt proportiones cauendæ. Sed illæ tamen adeo mirando ordine ueniunt, ut facile possint uitari. Nam in qualibet specie proportionũ huius generis, duæ solũmodo sunt ꝓportiones cauendæ. Scilicet, in specie dupla superpartiente, cauenda est dupla superbipartiens quintas: & dupla supundepartiens duodecimas.

In specie tripla superpartiente, cauenda est tripla supertripartiens septimas: & tripla superquindepartiens sedecimas.

In specie quadrupla superpartiente, cauenda est quadrupla superquarpartiens nonas: & quadrupla superundeuiginpartiens uigesimas. Et sic deinceps in infinitum.

Cur aũt propositio hæc quærere iubeat lineas utroq; modo incommensurabiles, potius quàm commensurabiles (id est, de usu eius) dicam inferius.

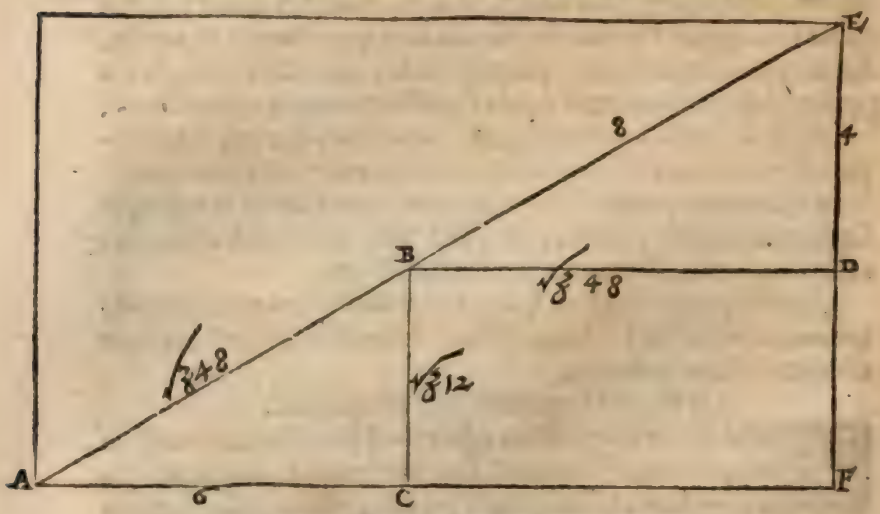
De secunda propositione elementari.

RESpicit hæc propositio ad decimã sexti, sicut præcedens respicit ad nonam sexti. Recipit enim dimidiatum quadrangulum rectangulum per diagonalem, id est, orthogonicum triangulũ, diuisum in triangulos orthogonios duos partiales, & secundum diuisionem talem colligit quatuor terminos regulæ De tri, ut uidebis in explicatione propositionis huius. Ea sic dicit:

¶ Omnium quatuor linearũ proportionalium, si prima tanto amplius possit quàm secunda, quantum est quadratũ alicuius linee commensurabilis sibi in longitudine, necesse est tertiam quoque tanto amplius posse quàm possit quarta, quantum est quadratum alicuius lineæ commensurabilis sibi in longitudine.

Vt si prima sit $\sqrt{3}48$, & secunda sit 6, poterit prima 48, & secunda 36: & cum differentia potentiarum sit 12, erit linea excessus $\sqrt{3}12$ communicans longiori in longitudine. Quacunq; igitur linea posita pro tertia, si ad ipsas ponatur quarta proportionalis, id quod fiet per regulam De tri, poterit etiam ipsa

tertia ultra quartam, talem quantitatem, ut linea quadraturæ eius cõmunicet ipsi tertiæ in longitudine, sicut uides in figura.



A B ponit A C, ergo B E ponit B D.
Et A B ponit B C, ergo B E ponit E D.

Vides certe ex ipsa figura rationem propositionis huius: scilicet sicut se habet B C ad A B, sic necessario habebit se E D ad B E.

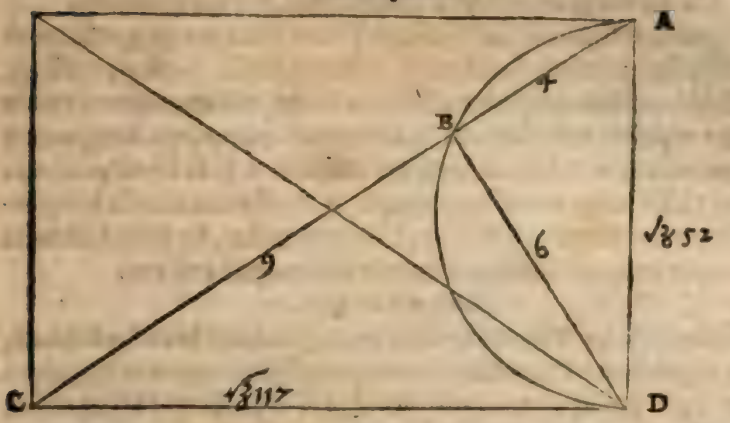
Præcipue autem obseruandum est, ut prima & secunda (id est, A B & A C) sint lineæ longitudine tantum incommensurabiles, seu potentia tantum commensurabiles, alioqui inutiles foret propositio hæc lineas pro libro decimo. Sed de usu linearũ elementarium harum dicam circa finem huius capitis.

Opposita præmissæ.

¶ Omnium quatuor linearum proportionalium, si prima potentior fuerit secunda, quadrato alicuius linee incommensurabilis sibi in longitudine, erit quoque tertia potentior quarta, quadrato alicuius linee incommensurabilis sibi in longitudine.

Exem.

Exemplum.



Quia trianguli orthogonij A B D, & D B C, sunt similes inter se, ideo necesse est ut habeant latera proportionalia. ut

A D ponit D B, ergo D C ponit C B.

Item A D ponit A B, ergo D C ponit D B.

Hoc est: √⅛52 ponit 4 lineam sibi longitudine incõmensurabilem, ergo √⅛117 ponit 6 sibi in longitudine cõmensurabilẽ.

Recepta est autem figura octauæ sexti, loco figuræ propositionis decimæ sexti, causa rei dilatandæ.

Demonstratio uero similitudinis angulorũ geometrica est, sed quia paucis expediri potest, uolo eam tentare.

Angulus A communis est triangulo totali A D C, & partiali A B D; ergo necesse est, ut angulus C sit æqualis angulo A D B. Ergo etiam necesse est, ut angulus B D C, æqualis sit angulo D A B, &c.

Sic hac figura facile demonstratur proportionalitas linearũ geometricè ex similitudine triangulorum. Est enim angulus E trianguli totalis, communis triangulo partiali E D B. Item angulus A trianguli totalis, est communis triangulo partiali A B C. Ergo &c.

De tertia propositione elementari, & eius conuersa.

BReui summa explicantur simul quatuor propositiones elementares sequentes, satis uerbosæ positæ. Scilicet, superficies diuidens lineam longiorem, uocetur E (ut in figura uidebis inferius) & quadratum complens longiorem lineam uocetur F. Linea longior uocetur A B, & breuior uocetur A D. Et linea excessus uocetur B D. Partes diuisæ longioris lineæ uocentur A C & C B. His præmissis, sic habet summa omnium propositionum elementarium quæ restant.

Summa breuis.

Si superficies E fuerit quarta pars quadrati breuioris lineæ, sitq; superficies F quadrata, unum constituens quadrangulum cum E, & C B sit commensurabilis ipsi A C, necesse est ut etiam D B sit commensurabilis ipsi A B: ut habet elementaris tertia. Et uicissim (ut habet eius conuersa) si D B fuerit commensurabilis ipsi A B, necesse est ut etiam C B sit cõmensurabilis ipsi A C. Et êcontrario (ut habet elementaris quarta, quæ est tertiæ opposita) si C B fuerit incommensurabilis ipsi A C, necesse est ut etiam D B sit incommensurabilis ipsi A B. Et uicissim (ut habet eius conuersa) si D B fuerit incommensurabilis ipsi A B, necesse est ut etiam C B sit incommensurabilis ipsi A C.

Sic autem dicit tertia elementaris.

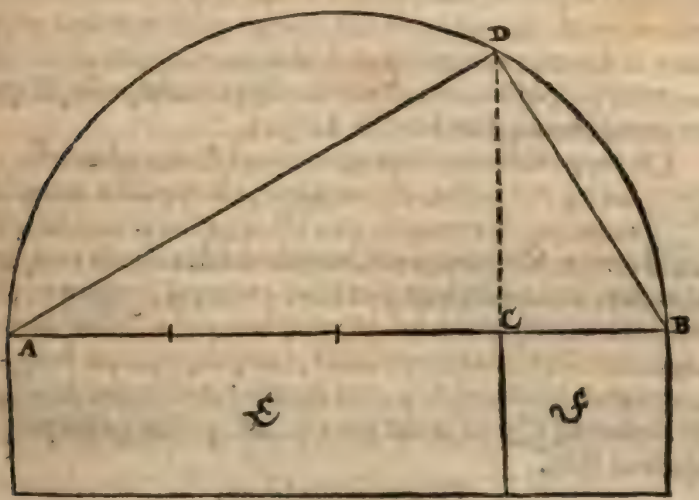
¶ Si fuerint duæ lineæ inequales, quarum longiorem diuidat superficies sibi applicata in duas partes commensurabiles, sitq; superficies illa equalis parti quartæ quadrati lineæ breuioris, cui superficiei desit superficies quadrata, vt nõ compleat totam lineam longiorem, necesse est ipsam lineam longiorem tanto amplius posse quàm possit linea breuior, quantum est quadratum alicuius lineæ commensurabilis eidem longiori in longitudine.

Conuersa eius.

¶ Si fuerint duæ lineæ inequales, quarũ longior sit potentior breuiore augmento quadrati lineæ commensurabilis longiori

giori in longitudine, adiungaturq; longiori superficies equalis parti quarte quadrati breuioris linee, cui superficiei desit quadrata superficies, vt non compleat totam lineam longiorem, necesse est superficiem sibi adiunctam diuidere lineam longiorem, in duas portiones incommensurabiles.

Exemplum.



Longior linea est A B, faciens sua longitudine √ 208. Quam diuidit superficies E, in A C & C B. Et est C B latus quadrati F, faciens sua longitudine √ 13. Linea uero longior superficiei E .i. A C, facit √ 117. Ipsa uero superficies E, sua area facit 39.

Linea exẽpli breuior (.i. A D) facit sua longitudine √ 156: unde area eius facit 156, cuius quarta pars æquat superficiei E.

Linea excessus, id est, D B facit √ 52: & est √ 52 commensurabilis ipsi longiori. id est, √ 208 in longitudine: facit enim longior ad ipsam lineam excessus, proportionem duplam. Sic C B commensurabilis in longitudine est ad A C, facit enim A C ad C B proportionem triplam.

Quòd autem D B sit linea excessus, satis patet ex penultima primi: scilicet, 52 est differentia inter 208 & 156.

Circa hanc propositionem obseruandæ sunt proportiones numerorum quadratorũ ad numeros quadratos, atq; cauendæ. Si enim C B ad A C talem aliquam proportionem habuerit, respondebunt quidem lineæ propositioni huic tertiæ atque eius conuersæ: sed lineæ illæ inutiles erunt pro decimo Euclidis, cum sint omnes meræ rationales. Et ego quidem ex hac propositione & figuris exemplorũ eius, obseruaui proportiones illas quas circa propositionem elementarem primam posui, & quarum mentionem etiam feci lib. 1. cap. 2.

De propositione ultima elementari, & eius conuersa.

VLtima propositio elementaris, est opposita tertiæ elementari, & conuersa eius est opposita conuersæ ipsius tertiæ. Requirunt aũt, hæc ultima & cõuersa eius, lineã rationalem aut medialem, pro linea exempli longiore: aliàs enim lineæ exemplorum ipsarũ, nihil facerent ad usum decimi. Itaq; rationalis linea aut medialis, sumpta pro linea longiore exempli, diuidenda erit in partes duas incommensurabiles, per superficiem E. Quod ut fiat mox dicam, positis prius propositionibus ipsis.

Elementaris ultima.

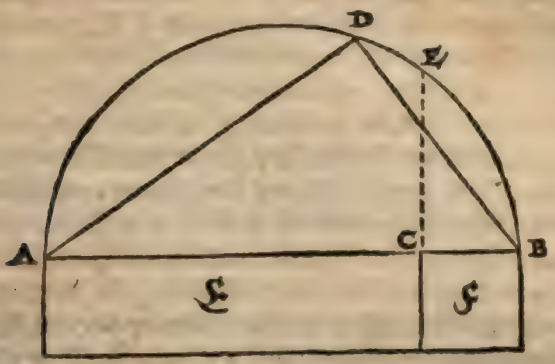
¶ Si fuerint due linee inequales, quarum longiorem diuidat in duas partes incommensurabiles, superficies equalis quarte parti quadrati breuioris linee, ita q; desit ad eius completionẽ superficies quadrata, erit longior potentior breuiore augmento quadrati linee incommensurabilis ipsi longiori in longitudine.

Conuersa ultimæ huius.

¶ Si fuerint due linee inequales, quarum longior sit potentior breuiore augmento quadrati linee incommensurabilis ipsi longiori in longitudine, adiungaturq; ei superficies equalis parti quarte quadrati breuioris linee, defuerit q; superficies

perficies quadrata, necesse est vt ipsa superficies adiuncta ad eandē lineā longiorē diuidat in duas portiones incōmensur.

Exemplum.



Linea AB, 12. AC, $6+\sqrt{\frac{1}{2}12}$.
CB, $6-\sqrt{\frac{1}{2}12}$. AD, $\sqrt{\frac{1}{2}96}$.
DB, $\sqrt{\frac{1}{2}48}$. CE, $\sqrt{\frac{1}{2}24}$.

Exempla harum propositionum sic formātur seu figurant. Primo omnium pone quadratum F, cuius costa sit residuum binomiale aut residuum bimediale, tunc latus longius superficiei Æ, erit linea binomialis, aut bimedialis (in superiorū propositionum exemplis erit commoda costa quadrati F, rationalis aut medialis, ad quam latus superficiei Æ longius habeat proportionem numeri ad numerum, dummodo numeri illi nō sint quadrati) & cum ex utraq; superficie Æ & F una fiat superficies, describe super eam semicirculum, ut commode possis signare lineam breuiorem exempli, atq; lineam excessus: utram libet autem primo poteris signare.

Si lineam exempli breuiorem primo volueris signare, tunc recipe lineam quæ dupla sit ad mediū proportionale inter costā quadrati F & latus longius superficiei Æ, erit enim linea talis mensura lineæ breuioris tui exempli. Patet. Nam medium tale

pro-

proportionale est latus tetragonicum areæ Æ, iuxta ultimam secundi. Et cum quadratum lineæ signandæ, sit ad aream illam quadrupla, ut propositiones dicunt, necesse est ut lineæ habeãt proportionem duplam, iuxta 10 octaui, &c. Signata aũt linea exempli breuiore (ut uides signatam A D) patebit spacium signandæ lineæ excessus, absq; maiore aliqua opera quæsitum.

Si uero lineam excessus seu augmenti, uelis primo signare, tunc abscinde costam quadrati ſ de latere longiore superficiei Æ, & remanebit tibi mensura, lineæ excessus seu augmenti signandæ. Vnde necesse est, ut C B existente commensurabili ipsi A C, cõmensurabilis etiam sit D B ipsi A B. Cum enim commensurabile subtrahitur à sibi commensurabili, necesse est ut relictũ remaneat commensurabile toti, & singulis partibus totius ipsi toti commensurabilibus, iuxta octauam decimi. Sic etiam D B existente commensurabili ipsi A B, necesse est ut C B commensurabilis sit ipsi C A, ut dictum est superius circa elementarem tertiam. Sic ex eadem ratione, si C B sit incõmensurabilis ipsi A C (quod ad propositiones has duas posteriores pertinet) necesse est ut D B sit etiam incõmensurabilis ad A B. Et uicissim, si D B sit incommensurabilis ad A B, necesse est ut C B sit incommensurabilis ad A C.

De usu propositionum elementarium.

MAgnum usum habent propositiones elementares ad ea quæ in decimo Euclidis tractant, quod paucis hoc loco libuit referre.

Cum enim occurrant propositiones nõ paucæ, in quibus requiruntur lineæ longitudine incommensurabiles sibi, ut sunt hæ decimi propositiones, 17. 18. 24. 25. 26. 30. 31. 32. & multæ aliæ. Item non paucæ occurrant, in quibus requiruntur lineæ sibi longitudine & potentia incommensurabiles, ut sunt hæ decimi, 27. 28. 29. 33. 34. 35. & aliæ nõnullæ. non mirũ est q; prima elemẽtaris (ut reliqua breuitatis gratia hoc loco transeã) ꝓponit requirẽdas lineas utroq; modo incõmensurabiles &c.

Item

¶ Item (ut de secunda elemẽtari etiam dicam) satis pulchrũ est uidere, ut ex binomijs primis producant̃ binomia secunda, & rursum ex secundis fiant prima: ut hic uides.

8 ponit √⅔48, ergo √⅔48 ponit 6.

Item √⅔48. 6. 8. √⅔48.

Eodem modo fiunt ex binomijs quartis, binomia quinta: & rursum ex quintis fiunt quarta.

Est etiam secunda elementaris mire utilis ad inuentiones linearum, quales requirunt propositiones 24. 25. 26. ut suo loco uidebimus.

¶ Ex tertia elementari fiunt binomia & residua primi ordinis peculiariter: reliqua suis locis exponam.

¶ Ex quarta elementari, producit Campanus lineas, quales mihi ab initio (dum decimum Euclidis meditarer attentius) fuerunt difficilimæ, antequam eas cœpissem cognoscere. Hæ sunt propositionum 27. 28. 29. lineæ. De reliquis dicam in locis suis ut inciderint.

De propositionibus decimi Euclidis, quas de duplici specie rationalium linearum proposuit. Cap. XV.

DVABVS propositionibus, Euclides, speciem rationalium linearum duplicem, illustrare uoluit, antequam species irrationalium linearum aggrederetur. Atque ita ordiri uoluit principalem libri sui decimi tractationem, ab illis propositionibus duabus: quarum prior ordine Campani est quintadecima, ordine uero Theonis est uigesima: altera aũt earum, cum ordine Campani sit sextadecima, ordine Theonis est uigesima prima.

De propositione priore, quæ est apud Camp. 15.

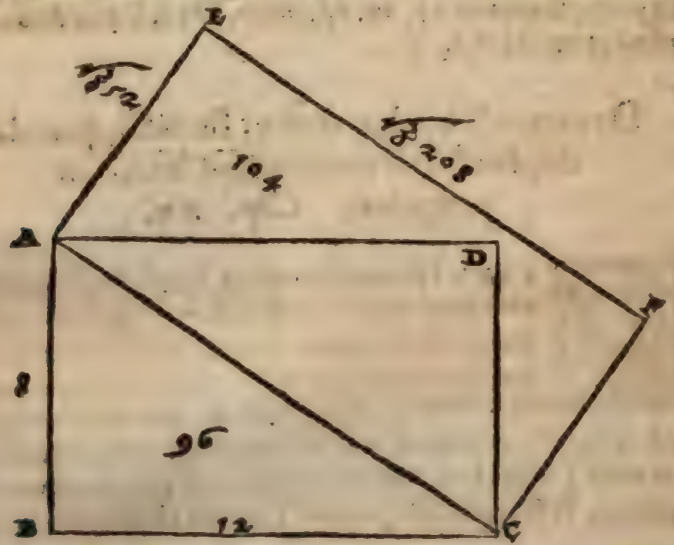
ECce ut Euclides incipiat à superficiebus rationalibus, contentis sublineis rationalibus primæ speciei, memor uidelicet definitionũ suarum, quibus significauit quãlibet ratiocinationẽ rerum irrationalium, oportere initiũ capere à re aliqua rationali. Sic autem proponit:

¶ Quelibet superficies rectangula, quam continent due linee, in longitudine rationales, rationalis est.

Vides certe, ut primam speciem rationalium linearum, id est rõnalitũ simplicit, seu (ut textus loquit) rationalitũ longitudine, uoluerit honestare propria propositione, alioqui sic ꝓpositisset:

¶ Quælibet superficies rectangula, quam continent duæ lineæ rationales, cõmensurabiles in longitudine, rationalis est.

Vt aũt differãt duæ ꝓportiões hæ (quarũ tñ prior Campani, altera Theonis esse uidetur) sequẽs figura luculenter declarat.



Sellicet quadrangulũ A B C D pertinet ad priorẽ propositionẽ. Quadrangulũ uero A C F E, ptinet ad posteriorẽ præcedentiũ.

Non autem discernit textus propositionis altera parte longiores superficies, à supficiebus quadratis, ut significet utrasq; superficies rectangulas esse utiles ad institutum suum. Id quod in sequentibus propositionibus manifeste probat, in quibus de utrisq; expressis uerbis differit. Quòd si rationē propositionis huius peculiarem aliquis à me petat, illud respondendum esse censeo, q̄ ex utraq; specie quadrangulorum rectangularium proueniunt lineæ rationales secundæ speciei (id est, rationales potentia tantū) per lineas rationales primæ speciei. Nam quælibet superficies quadrata, cōtenta sub lineis longitudine rationalibus, diametrum habet lineæ rationalis secundæ speciei, id est, rationalis potentia tantum: & hoc nunq̄ fallit. At si superficies quadrata rationalis, contineatur sub lineis rationalibus secundæ speciei (id est, sub lineis potētia tantum rationalibus) diameter modò linea primæ speciei rationalium, modò secūdæ speciei erit. Nam si costa quadrati fecerit $\sqrt{\frac{1}{2}48}$, faciet diameter eius $\sqrt{\frac{1}{2}96}$. Sed si costa fecerit $\sqrt{\frac{1}{2}50}$, faciet diameter eius 10.

Superficies uero rationalis, contenta sub lineis rationalibus primæ speciei (.i. longitudine rationalibus) inæqualibus, facit diametrum rationalem secundæ speciei, si caueantur proportiones laterum, quas posui capite præcedenti, circa propositionē elementarem primam. Nam sub proportionibus illic positis, facient diametrum, seu diagonalem lineam, primæ speciei, &c.

De propositione posteriore, quæ est apud Camp. 16.

IN ista propositione quæ apud Campanum est 16, apud Theonem uero 21, magis placet textus Theonis quàm Campani: sicut in superiori magis placuit textus Campani quàm Theonis. Hac enim ratione uidentur ambæ species rationalium linearum pulchræ propositæ.

Sic autem habet textus, Theonis sententia.

¶ Cum adiuncta fuerit linee rationali, superficies rationalis rectangula, latus eius secundum erit rationale, lateriq; primo commensurabile.

Campanus autem ponit suam sextamdecimã, ita ut sit conuersa suæ quintædecimæ, quẽadmodum Theon suam 21, hanc ponit ut sit conuersa suæ uigesimæ.

Sic autem habet Campani propositio.

¶ Cum adiuncta fuerit lineæ rationali in longitudine superficies rationalis rectangula, latus eius secundum erit rationale in longitudine, lateríq; primo in longitudine cõmensurabile.

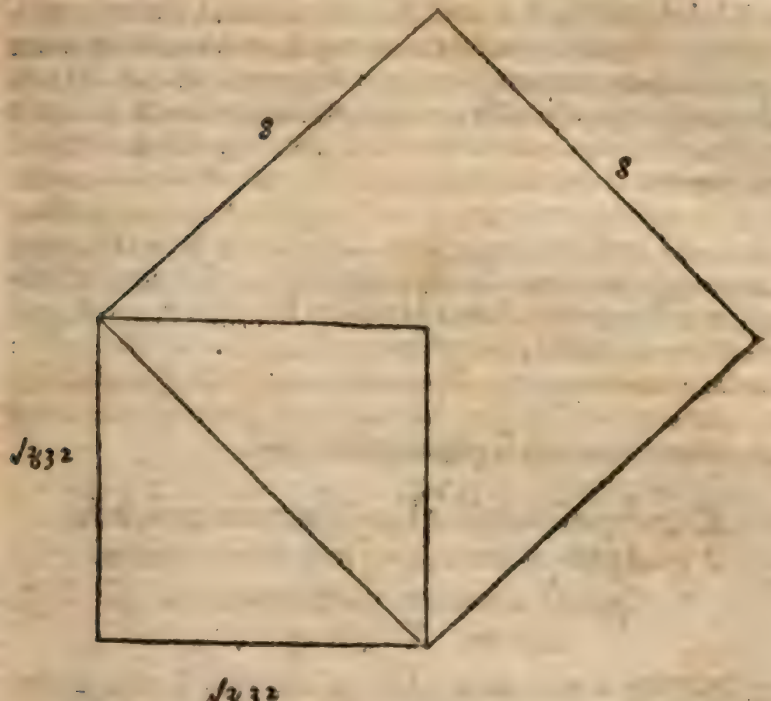
Sub hac ego diuersitate (data ratione) mediũ teneo, & Euclidem propositiones posuisse arbitror, sicut dixi. Fieri enim potuit, ut Euclidis propositiones, quæ ad manus Theonis peruenerũt post aliquot secula, alicubi fuerint mutatæ, quicquid tandem sit quod de Campani exemplaribus opinamur. Facit & hoc me liberiorem in iudicando, quòd propositiones Euclidis, non sunt euangelium Christi. Res sic habet.

Duæ lineæ rationales commensurabiles in longitudine, siue longitudine sint rationales, siue irrationales, nullam continere possunt superficiem aliam præter rationalem. Hoc generale est siue superficies sint quadratæ, siue altera parte longiores. Et quidem de altera parte longioribus, exemplum habes superioris propositionis.

Hic uero ponam exemplum quadratorum, quod sequitur. Est autem quodlibet ens suo æquali commensurabile. Sic costa costæ in quadrato eodem, &c.

Quadrata superficies, habẽs aream numeri quadrati, costam habet longitudine rationalem. Quæ uero aream habet numeri non quadrati, costam habet longitudine irrationalem, ut uides ex hoc exemplo sequenti.

Sed



¶ Sed, ut ad disputationem meam reuertar, hoc uide in textu propositionis Campani. Cum propositio eius sit de lineis longitudine rationalibus, superficiem continentibus: id est, sit de lineis primæ speciei solũmodo, quid opus erat adijcere hoc, Lateríq; primo in longitudine commensurabile. Quasi uero possibile sit, duas lineas longitudine rationales, esse incommensurabiles. Vides certe, ut propositio ista nesciens semetipsam frangat, & Theonis propositioni locum faciat. Recte uero & commode meminit commensurabilitatis, at non recte determinat lineas uocabulo longitudinis. Siquidem quælibet linea rationalis longitudine, commensurabilis est cuilibet lineæ ratio-

nali in longitudine: ut paulo superius indicaui. At non quælibet linea rationalis potentia tantum, cõmunicat cuilibet lineæ rationali potentia tantum: ut √8 12 communicat √8 48. At non cõmunicat cum √8 24. Et (ne dubites) cõmunicare & cõmensurabiles esse omnino idem importãt. Item impossibile est, lineã longitudine rationalẽ cõmunicare lineæ rõnali potẽtia tantũ.

Duæ aũt lineæ rationales incommensurabiles, non possunt cõtinere superficiem rationalem. Vnde si duæ lineæ rationales ex utraq; specie rationalium, contineant superficiem quadrangulam rectangulam. Linea quæ illam superficiem potest, erit medialis, ut habebit proxima propositio, quam ponam ordine debito. Hæc omnia mira breuitate complicat propositio Theonis, quorum consideratione adducor, ut credam eam esse Euclidis, & non eam quam Campanus hic ponit.

De propositionibus Euclidis, quas posuit de medialibus lineis, quæ sunt lineæ primæ speciei linearum suarum irrationalium. Caput XVI.

IRRATIONALIVM linearum species prima, uocatur Medialium. Quẽadmodum autem lineæ irrationales longitudine tantum, uocantur rationales potentia tantum, eò q; possint in superficies rationales: sic lineæ irrationales primæ speciei linearum irrationalium, dicuntur mediales, eò quòd possint in superficies mediales.

Posse aũt in superficiem aliquam, dicitur linea, cuius aream ipsa reddit multiplicata in se: ut linea quæ sua longitudine facit 6, dicitur posse 36, &c.

Sunt igitur lineæ mediales, lineæ irrationales longitudine & potentia, potentes superficiẽ medialem. Vnde neq; hæc √8 6. est medialis, neq; hæc √88 6, sed hæc √888 6, &c.

De

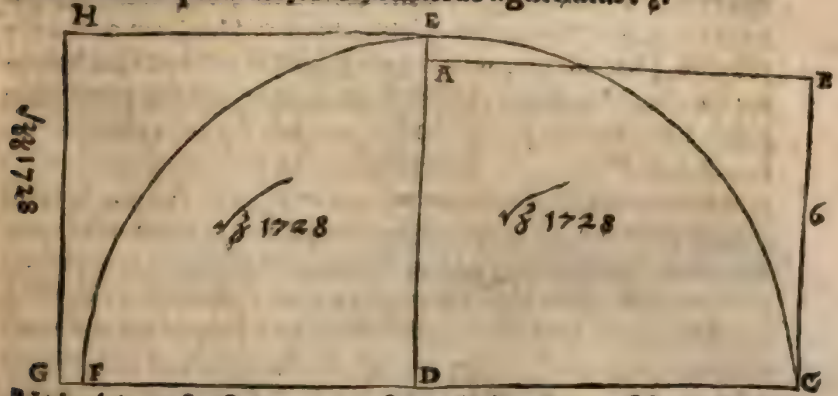
De propositione prima medialium linearum.

NVnc tandem uidebis usum proprium elementaris primæ, ex propositione prima de medialibus lineis posita, quæ est de inuentione medialium linearum, ut merito sit in isto ordine prima. Quæ cum sit apud Campanum XIX, apud Theonem est XXII.

Sic autem habet:

[Quelibet superficies, quam continent duæ lineæ rationales, potentia tantum commensurabiles, est irrationalis, dicituŕq superficies medialis. Eiusq latus tetragonicum, quod in illã superficiẽ potest, est irrõnale, diciturq linea medialis.]

Quasi dicat: Sic inuenies lineã medialem, si coniungas duas lineas rationales potentia tantum commensurabiles, directe, (nam ad angulũ rectum coniunctæ, superficiem medialem continent) & per 9 sexti disponas mediũ proportionale inter ipsas coniunctas, tunc erit medium illud proportionale, linea medialis: est enim medium illud, latus tetragonicum, quod in illam superficiem medialem potest. Est autem superficies medialis apud Euclidem talis solummodo, ad qualem cõtrahitur numerus medialis quadrate, id est, numerus signi huius √ɜ.



Vides hic, ut supficies A B C D sit medialis cõtenta sub A B & B C lineis rõnalibus, potẽtia tm cõmẽsurabilibus. s. A B facit √ɜ48.

&

& poteſt 48. & B C facit 6, & poteſt 36. Eſt autem medialis ſuperficies, cum faciat √⅜1728. Deinde uides, ut illæ duæ lineæ A B & B C ſint coniunctæ directe, conſtituantq; F D C, & inter eas erectum mediũ proportionale B D, faciens ſua longitudine √⅜⅜1728. Eſt aũt hoc ſignum √⅜⅜ peculiare lineis medialibus.

De propoſitione ſecunda medialium, quæ apud Campanum eſt XX.

NVncupauerat (in propoſitione præcedenti) partes inſtrumentales medialium linearũ, uidelicet lineas rationales, potentia tantum commenſurabiles: ideo nunc (propoſitione hac) oſtendit modum reductionis medialium ad huiuſmodi partes inſtrumentales, dicens:

CVm adiuncta fuerit linee rationali in longitudine, ſuperficies equalis quadrato linee medialis, latus eius ſecundũ potentialiter tantum rationale erit, lateriq; primo in longitudine incommenſurabile.

Certe non curat Euclides hoc, ut iſta propoſitio ſit conuerſa prioris, alias lineæ rationali non addidiſſet determinationem hanc, in longitudine. Et confirmat hoc meam ſententiam de duabus propoſitionibus linearum rationalium, paulo ſuperius recitatam. Neq; enim illæ debuerunt eſſe ad inuicem conuerſæ præciſe. Hoc autem curat & agit Euclides, ut hanc ſpeciem irrationalium linearum (id eſt, medialium) expediat propoſitionibus ſimilibus, iis ꝓpoſitionibus, quas de ſingulis alijs ſpeciebus erat poſiturus. Sic autẽ uidebis eum tractare ſingulas ſpecies irrationalium linearum reliquas, ut (cum reliquæ ſpecies omnes præter hanc primam contineant lineas compoſitas, aut tanquam compoſitas) poſt tractationem partium compoſitionis earum, incipiat tractare partes earum inſtrumentales, idq; nõ aliter faciat quàm hic, uidelicet ut una propoſitione doceat inuentionem uniuſcuiuſq; ſpeciei, & alia ſignificet reductionẽ ad eaſdẽ partes inſtrumentales, mediante linea rationali in longitudine, cui applicata ſit ſupficies quadrangula rectãgula &c.

Eſt

Est autem propositio ista facilis, maxime si exemplum adhibeas. Recipiamus itaq; exemplum superioris propositionis. Scilicet superficies A B C D (quæ æqualis est quadrato E D G H, estq; hoc quadratum lineæ medialis H G) applicata est lineæ rationali in longitudine B C. Ergo necesse est, ut latus alterum superficiei A B C D, uidelicet A B sit potentia tantum rationale, & lateri B C incommensurabile.

Propositio tertia medialium, quæ Campano est 21.

OMnis linea cõmensurabilis linee mediali, medialis ẽ. Vt si diameter circuli sit linea medialis, necesse est ut etiam semidiameter eiusdem circuli sit linea medialis. Et quamuis hoc generaliter uerum sit, nihilominus tamen uoluit Euclides de qualibet specie sua ponere propositionem specialem, de re hac, forte ut commensurabilium & incommensurabilium considerationem faceret commendatiorem. Sed de his suis locis dicam.

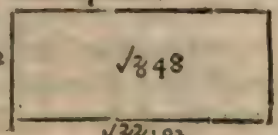
Data itaq; linea mediali, quædam mediales ei commensurabiles erunt in longitudine. Vt huic $\sqrt{\sqrt{36}}$, hæc $\sqrt{\sqrt{3136}}$. Et quædam potentia tantum, ut huic $\sqrt{\sqrt{36}}$, hæc $\sqrt{\sqrt{324}}$. Et quædam ei neutro modo cõmensurabiles erunt, ut huic $\sqrt{\sqrt{36}}$, hæc $\sqrt{\sqrt{18}}$.

De propositione quarta medialium linearum, quæ Theoni est 25.

BReui propositione hac, mediale non excedit mediale, rationali parumper dissimulata, donec suum alium locũ inueniat, pro ea nunc illam uideamus, quam Theon facit uigesimam quintam.

QUelibet superficies quam continent duæ lineæ mediales, commensurabiles in longitudine, medialis est.

Exemplum.



Sed miram hic uide naturam linearum, ex collatione mediálium & rationalium potentia tantum.

Mediales lineæ potentia tantum commensurabiles, continent aliquando superficiem rationalem, ut habet propositio sequens. At si longitudine sint commensurabiles, nunquam possunt continere superficiem rationalem, ut dicit ꝓpositio hæc.

Rationales uero lineæ potentia tantum, si potentia tantum sint commensurabiles, non possunt continere superficiem rationalem. At si longitudine sint commensurabiles, semper continebunt superficiem rationalem.

Itaq; mediales lineæ duæ, quarum numeri, diuisione unius per alterum, faciunt numerum rationalem, nunquam facient numerum rationalem, multiplicatione unius per alterum, ut habet propositio hæc.

Et mediales lineæ duæ, quarũ numeri multiplicatione unius per alterum, faciunt numerum rationalem, diuisione unius per alterum, nunquam faciunt numerum rationalem, ut habet propositio sequens.

At duæ lineæ rationales potentia tantum, quarum numeri diuisione unius per alterum, faciunt numerum rationalem, etiã multiplicatione unius per alterũ, faciunt numerũ rationalem.

Et duæ lineæ rationales potentia tantum, quarum numeri, multiplicatione unius per alterum, non faciunt numerũ rationalem, diuisione unius per alterum etiam non faciunt numerum rationalem.

De propositione quinta medialium linearum.

INcipit Euclides hac propositione sequẽti respicere ad compositionem bimedialium linearum, ex lineis medialibus. Et eô pertinent problemata duo illa, ex quibus Theon facit propositionem 28 & 29, quibus locũ alium dabo.

Sic autem dicit hæc quinta.

QUeliꝫet superficies quã continent duæ linee mediales, potentia tantũ cõmensurabiles, aut rõnalis est aut medialis.

Exem-

mediales lineas, si coniungantur, aut residuales bimedialiter, si ab inuicem subtrahãtur. Notum est aũt, ut ex talium compositione aut absciſione, nihil fiat aut remaneat nisi medialis linea.

De propoſitionibus Euclidis quas poſuit de ſecunda ſpecie irrationalium linearum ſuarum, id eſt, de binomialibus lineis. Cap. XVII.

NAſcuntur primo omnium lineæ potentia tantũm rationales, de rationalibus longitudine (id eſt, ſecunda ſpecies naſcitur ex prima) & fit hoc per primam elementarem. Scilicet ſi fuerint duæ lineæ longitudine rationales, directæ coniunctæ, & non fuerit inter eas proportio numeri quadrati ad numerũ quadratũ, tunc mediũ proportionale inter eas, erit linea rationalis ſecundæ ſpeciei, i. potentia tantũ rationalis erit linea illa.

Naſcuntur ſecundo lineæ mediales, id eſt, lineæ primæ ſpeciei irrationalium, de rationalibus lineis binis, ex utraq; ſpecie rationalium ſumptis, uel ex ſecunda rationalium ſpecie, ſi ad inuicem fuerint incommenſurabiles. Fit etiam hoc, modo iam dicto, per primam uidelicet elementarem: ſcilicet medium proportionale inter lineas tales, ſemper erit medialis linea.

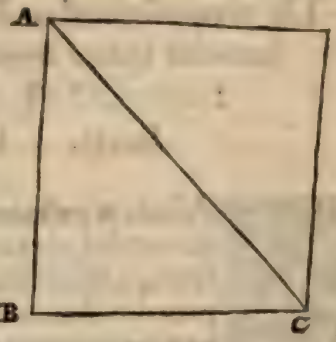
Naſcuntur tertio lineæ binomiales (id eſt, lineæ ſecundæ ſpeciei irrationalium linearum) de rationalibus lineis, uidelicet ſi duæ lineæ rationales recipiantur ex utraq; ſpecie rationalium, uel duæ incommenſurabiles ex ſecunda ſpecie rationalium, coniungãturq; illæ lineæ directe (id eſt, ſic, ut ex duabus rectis una recta fiat) ſemper fiet ex tali coniunctione ſeu compoſitione, linea una binomialis. Et hoc eſt, quod dicit propoſitio prima binomialium hæc ſequens, quæ Campano eſt 30.

¶ Si duæ lineæ rationales potentialiter tantum communicantes

nicantes in longum directum q̄ continguntur, tota linea ex his composita, erit irrationalis, dicetur q̄ Binomium.

Vt si ex costa quadrati rationalis, & ex diametro eiusdem quadrati, fiat una linea recta, erit illa necessario binomialis.

Vt sit A B, 12, erit A C, $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 288. Itaq; si ex A B & A C fiat una linea recta, cō ponetur ($\sqrt{\frac{1}{8}}$ 288 + 12) linea binomialis.



Sic si A B faciat $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 288, faciet A C, 24. Itaq; ex A B & A C, erit binomialis linea 24 + $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 288.

Sic si A B faciat $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 24, faciet A C $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 48. Itaq; ex A B & A C erit binomialis linea hæc, $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 48 + $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 24.

Nascuntur deinde ex binomialibus lineis reliquarum specierum irrationalium lineæ. Quod ut fiat, suis locis singulis explicabunt propositiones ad hæc positæ ab Euclide.

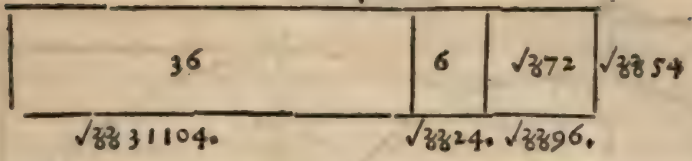
Et cum contrariorum eadem sit disciplina, pulchre opponitur resolutio compositioni, per aliam propositionem Euclidis sequentem, quæ apud Campanum est 36. Ea sic dicit:

¶ Impossibile est binomium diuidi in duas alias lineas, q̄ ex quibus coniunctū est et nominatū, sub earum termino.

Obserua hic, ut de prima specie irrationalium (id est, de medialibus lineis) nulla propositio huiusmodi compositionis & resolutionis posita sit, neq; poni potuerunt tales. Sed de singulis reliquis speciebus, tales aliquas posuit Euclides. Hac igitur ratione separata est species medialium linearum, à speciebus reliquis, tanq; simplex à compositis, & à compositarū similibus, ut in superioribus capitibus de hac re plura me dixisse arbitror.

Itaq; binomialis linea resoluitur in duas lineas illas ex quibus est composita, quæ uidelicet sunt rationales potentia tantum

Exemplum.



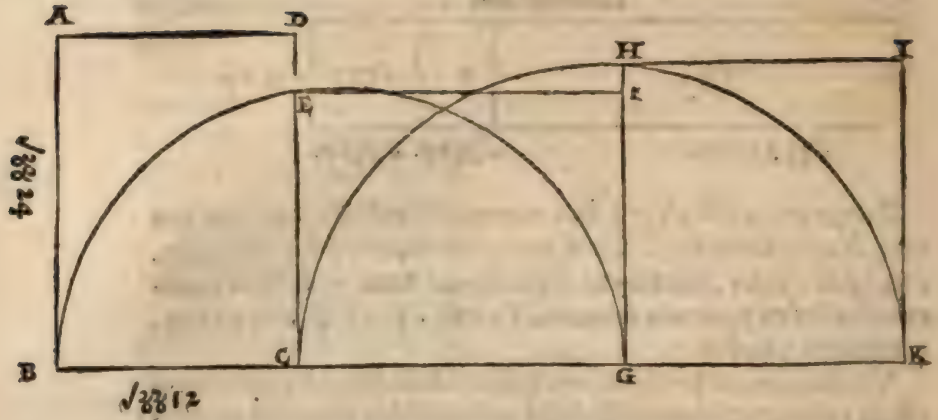
Primo √ 96 & √ 54 sunt commensurabiles potentia tantum, & continent superficiem medialem hanc √ 72. Secundo, √ 54 & √ 24, continent superficiem hanc 6, & sunt commensurabiles potentia tantum. Tertio, √ 54 & √ 31104, continent 36, &c.

Vnde medium proportionale, inter duas lineas mediales potentia tantum commensurabiles, aut est linea medialis, ut dum lineæ illæ continent superficiem medialem: aut est rationalis potentia tantum, ut dum mediales illæ continent superficiem rationalem numeri non quadrati: aut est rationalis in longitudine, ut dum mediales lineæ illæ, continent superficiem rationalem numeri quadrati.

De lineis medialibus duabus, longitudine & potentia incommensurabilibus.

SI fuerint duæ lineæ mediales incommensurabiles longitudine & potentia, continebunt illæ lineæ superficiem irrationalem ab Euclide non receptam. Et quemadmodum ille superficies tales non recipit, sic lineas quæ in illas superficies possunt, non admittit. Quòd si receperis lineam potentiæ illius prædictæ, cum altero laterum superficiei, cõstitues aliam speciem superficierum irrationalium, atq; aliam speciem irrationalium linearum ex quadratione huiusmodi superficiei: & poterit continuatio talis progredi sine fine.

Sequitur exemplum.



Cum A B linea faciat √24,& B C faciat √12,facit superficies A B C D √288: & in superficiemillam poteſt linea E C, quæ facit √288.

Deinde ſuperficies cõtenta ſub E C & E F (cum C G ſit æqualis C D) facit √17728,& in ſuperficiem illam poteſt H G linea,quæ facit √17728.

Deinde ſuperficies contenta ſub H G & H I (cum G K linea ſit æqualis lineæ G F) facit √1805923232: & linea quæ in ſuperficiem illam poteſt, facit √1805923232.

Et ſic deinceps ſine fine.

Obſeruandum eſt etiam hoc loco,quòd ex medialibus duabus,longitudine & potentia incommenſurabilibus, non componitur bimedialis linea ab Euclide recepta: nec ſubtractione unius ab altera fit reſidualis bimedialiter, quam Euclides recipiat intra ſpecies ſuas: ideo etiam noluit (& ſi ipſe Euclides uoluit, Theon noluit) ponere propoſitionem aliquam de medialibus neutro modo commenſurabilibus. Simili ratione noluit Campanus ponere Theonis 25,q̃ eſt de medialibus utroq; modo commenſurabilibus,cô quòd nec lineæ tales,faciant bimediales

tum commensurabiles. Vt (exempli gratia) 12 + √ 48 diuidi tur in 12 & √ 48 : & impossibile est ut binomium illud diuida tur in duas alias lineas quæ sint rationales potentia tantum commensurabiles. Sunt autem partes illæ positæ 12 & √ 48. ex quibus nominatum est hoc binomium 12 + √ 48 sub earū partiū termino seu descriptione, qualem habet propositio præ cedens, id est, prima capitis huius propositio.

Potest quidem 12 + √ 48 diuidi in 6 & 6 + √ 48. item in 12 + √ 12 & √ 12. item in 6 + √ 12 & 6 + √ 12. Et sic de alijs. Sed ex talibus diuisionibus non fiunt duæ lineæ rationa les, potentia tantum commensurabiles.

Sequitur tertia huius capitis propositio, quæ apud Campanum est 17.

¶ Duas lineas inuenire rationales, potentia tantum com mensurabiles, quarū longior plus possit breuiore, quadrato linee sibi in longitudine commensurabilis.

Præmissis duabus ppositionibus quæ de binomijs loquun tur generaliter, sequuntur nunc duæ aliæ, quæ de binomijs lo quuntur specialiter. Harum prior est, quam nunc tractamus, ea est apud Campanum 17 Euclidis, at apud Theonem est 30 Euclidis. Proponit uero hæc inuentionem binomialium linea rum, primi ordinis seu primæ speciei : quales rursum subdiui duntur in tres species alias. id est, in binomia prima, in secunda & in tertia.

Inuentio autem illa quam proponit propositio hæc, optime perficitur secundum propositionem elementarem tertiam sic.

Regula inuentionis huius.

Recipe duas lineas rationales commensurabiles, quarum proportio non sit tanquam numeri quadrati ad numerum qua dratum, & inter eas constitue medium proportionale, & linea dupla illius medij, erit portio binomij breuior. Linea uero cōposita ex duabus receptis lineis, erit portio binomij longior.

Exem-

Exemplum.

Sint receptæ 8 & 6, erit medium proportionale inter eas $\sqrt{\text{ß}}48$. Vnde portio binomij minor, erit $\sqrt{\text{ß}}192$: & 14 erit portio eius maior. Itaq; binomium inuentũ sic stabit, $14+\sqrt{\text{ß}}192$.

Huius ordinis binomia, uidelicet prima, secunda, & tertia, sunt quadrata. Et de illorum inuentione sunt problemata tria sequentia.

¶ Binomium primum inuenire.

Recipe duas lineas longitudine rationales, quarum proportio non sit tanquam numeri quadrati ad numerum quadratũ, & operare iuxta regulam proximam superius positam.

Vt si receperis 6 & 18, respondebit figura propositionis elementaris tertiæ (quæ superius data est folio 155). Scilicet A D faciet $\sqrt{\text{ß}}432$, eritq; portio binomij minor, & A B faciet 24. Vnde hoc erit binomium primum hoc modo inuẽtum, $24+\sqrt{\text{ß}}432$.

¶ Binomium secundum inuenire.

¶ Binomium tertium inuenire.

Recipe duas lineas potentia tantũ rationales, quæ sint commensurabiles, ita tamen ut non habeant ad inuicem proportionem numeri quadrati ad numerum quadratum, & operare iuxta regulam superius positã. Et si inter receptas duas inciderit medium proportionale, quod sit longitudine rationale, tunc produces binomium secundum. Si autem medium proportionale fuerit potentia tantum rationale, tunc produces binomium tertium.

Exemplum primi.

Recepta figura folij 155, recipe pro linea A C $\sqrt{\text{ß}}243$, & pro C B recipe $\sqrt{\text{ß}}27$, tunc D C faciet 9. Ergo A D faciet 18, & A B faciet $\sqrt{\text{ß}}432$. Vnde binomium secundum sic stabit in numeris, $\sqrt{\text{ß}}432+18$: scilicet B A D faciet nunc binomium secundum.

Exemplum secundi.

Recepta figura hic suprà indicata, recipe pro linea A C $\sqrt{\text{ß}}54$,

&

& pro C B recipe $\sqrt{8}6$, tunc D C faciet $\sqrt{8}18$. Ergo A D faciet $\sqrt{8}72$: & A B faciet $\sqrt{8}96$. Itaq; B A D faciet modò binomium tertium hoc, $\sqrt{8}96+\sqrt{8}72$.

Sequitur propositio quarta capitis huius, quæ est Campani 18.

¶ Duas lineas inuenire rationales, potentia tantum commensurabiles, quarum longior plus possit breuiore, quantū est quadratum lineæ sibi incommensurabilis in longitudine.

Proponit hæc inuentionem binomiorum ordinis secundi, id est, binomiorum non quadratorum, uidelicet quartorum, quintorum, & sextorum. Et sumitur regula inuentionis huius iuxta propositionem elementarem quartam.

Regula.

Recipe lineam rationalem, quam diuide in duas lineas irrationales longitudine & potentia incommensurabiles, & inter eas constitue medium proportionale, & erit linea dupla ad medium illud, breuior portio binomij inueniendi. Linea uero, quæ primo fuerat recepta, erit portio binomij eiusdem longior.

Exemplum.

Sit recepta linea, faciens 24, hanc diuide in $12+\sqrt{8}12$, & $12-\sqrt{8}12$, mediū proportionale inter partes diuisionis illius facit $\sqrt{8}132$. Ergo portio binomij breuior, faciet $\sqrt{8}528$; & longior portio eiusdem, faciet 24. Itaq; inuentum binomium sic stabit, $24+\sqrt{8}528$.

¶ Binomium quartum inuenire.

Recepta figura propositionis elementaris quartæ (superius ostensa folio 156) recipe pro A B lineam longitudine rationalem: ut si A B faciat 24, diuido eā in $12+\sqrt{8}48$, & $12-\sqrt{8}48$, id est, in A C & C B: erit igitur medium proportionale inter partes diuisionis huius hoc, $\sqrt{8}528$. Erit igitur A D (id est, breuior portio binomij inueniendi) $\sqrt{8}2112$; longior autem portio, erit A B, faciens 24.

Campanus autem ponit ſuam ſextamdecimã, ita ut ſit conuerſa ſuæ quintædecimæ, quẽadmodum Theon ſuam 21, hanc ponit ut ſit conuerſa ſuæ uigeſimæ.

Sic autem habet Campani propoſitio.

¶ Cum adiuncta fuerit lineæ rationali in longitudine ſuperficies rationalis rectangula, latus eius ſecundum erit rationale in longitudine, lateríq; primo in longitudine cõmenſurabile.

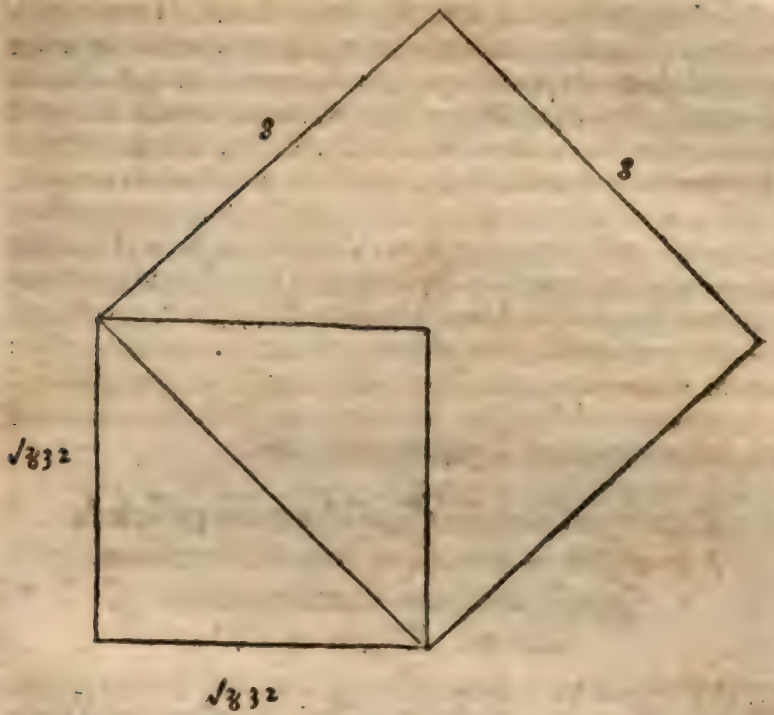
Sub hac ego diuerſitate (data ratione) mediũ teneo, & Euclidem propoſitiones poſuiſſe arbitror, ſicut dixi. Fieri enim potuit, ut Euclidis propoſitiones, quæ ad manus Theonis peruenerũt poſt aliquot ſecula, alicubi fuerint mutatæ, quicquid tandem ſit quod de Campani exemplaribus opinamur. Facit & hoc me liberiorem in iudicando, quòd propoſitiones Euclidis, non ſunt euangelium Chriſti. Res ſic habet.

Duæ lineæ rationales commenſurabiles in longitudine, ſiue longitudine ſint rationales, ſiue irrationales, nullam continere poſſunt ſuperficiem aliam præter rationalem. Hoc generale eſt ſiue ſuperficies ſint quadratæ, ſiue altera parte longiores. Et quidem de altera parte longioribus, exemplum habes ſuperioris propoſitionis.

Hic uero ponam exemplum quadratorum, quod ſequitur. Eſt autem quodlibet ens ſuo æquali commenſurabile. Sic coſta coſtæ in quadrato eodem, &c.

Quadrata ſuperficies, habẽs aream numeri quadrati, coſtam habet longitudine rationalem. Quæ uero aream habet numeri non quadrati, coſtam habet longitudine irrationalem, ut uides ex hoc exemplo ſequenti.

Sed



¶ Sed, ut ad disputationem meam reuertar, hoc uide in textu propositionis Campani. Cum propositio eius sit de lineis longitudine rationalibus, superficiem continentibus: id est, sit de lineis primæ speciei solũmodo, quid opus erat adijcere hoc, Lateríq; primo in longitudine commensurabile. Quasi uero possibile sit, duas lineas longitudine rationales, esse incommensurabiles. Vides certe, ut propositio ista nesciens semetipsam frangat, & Theonis propositioni locum faciat. Recte uero & commode meminit commensurabilitatis, at non recte determinat lineas uocabulo longitudinis. Siquidem quælibet linea rationalis longitudine, commensurabilis est cuilibet lineæ ratio-

nali in longitudine: ut paulo superius indicaui. At non quælibet linea rationalis potentia tantum, cõmunicat cuilibet lineæ rationali potentia tantum; ut √12 communicat √48. At non cõmunicat cum √24. Et (ne dubites) cõmunicare & cõmensurabiles esse omnino idem importãt. Item impossibile est, lineã longitudine rationalẽ cõmunicare lineæ rõnali potẽtia tantũ.

Duæ aũt lineæ rationales incommensurabiles, non possunt cõtinere superficiem rationalem. Vnde si duæ lineæ rationales ex utraq; specie rationalium, contineant superficiem quadrangulam rectangulam. Linea quæ illam superficiem potest, erit medialis, ut habebit proxima propositio, quam ponam ordine debito. Hæc omnia mira breuitate complicat propositio Theonis, quorum consideratione adducor, ut credam eam esse Euclidis, & non eam quam Campanus hic ponit.

De propositionibus Euclidis, quas posuit de medialibus lineis, quæ sunt lineæ primæ speciei linearum suarum irrationalium. Caput XVI.

IRRATIONALIVM linearum species prima, uocatur Medialium. Quẽadmodum autem lineæ irrationales longitudine tantum, uocantur rationales potentia tantum, eò q; possint in superficies rationales: sic lineæ irrationales primæ speciei linearum irrationalium, dicuntur mediales, eò quòd possint in superficies mediales.

Posse aũt in superficiem aliquam, dicitur linea, cuius aream ipsa reddit multiplicata in se: ut linea quæ sua longitudine facit 6, dicitur posse 36, &c.

Sunt igitur lineæ mediales, lineæ irrationales longitudine & potentia, potentes superficiẽ medialem. Vnde neq; hæc √6 est medialis, neq; hæc √√6, sed hæc √√√6, &c.

De

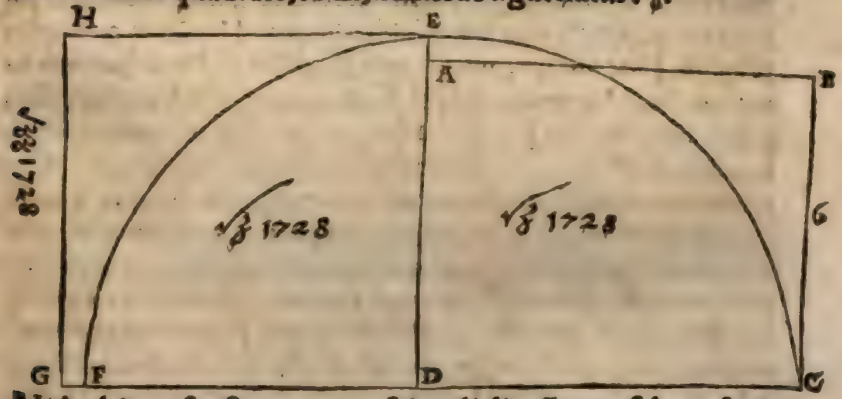
De propositione prima medialium linearum.

NVnc tandem uidebis usum proprium elementaris primæ, ex propositione prima de medialibus lineis posita, quæ est de inuentione medialium linearum, ut merito sit in isto ordine prima. Quæ cum sit apud Campanum XIX, apud Theonem est XXII.

Sic autem habet:

¶ Quelibet superficies, quam continent due linee rationales, potentia tantum commensurabiles, est irrationalis, dicitur'q; superficies medialis. Eiusq; latus tetragonicum, quod in illã superficiẽ potest, est irrõnale, diciturq; linea medialis.]

Quasi dicat: Sic inuenies lineã medialem, si coniungas duas lineas rationales potentia tantum commensurabiles, directe, (nam ad angulũ rectum coniunctæ, superficiem medialem continent) & per 9 sexti disponas mediũ proportionale inter ipsas coniunctas, tunc erit medium illud proportionale, linea medialis: est enim medium illud, latus tetragonicum, quod in illam superficiem medialem potest. Est autem superficies medialis apud Euclidem talis solummodo, ad qualem cõtrahitur numerus medialis quadrate, id est, numerus signi huius $\sqrt{\ }$.



Vides hic, ut superficies A B C D sit medialis cõtenta sub A B & B C lineis rõnalibus, potẽtia tm cõmẽsurabilibus. s. A B facit $\sqrt{\ }$ 48.

&

& poteſt 48. & B C facit 6, & poteſt 36. Eſt autem medialis ſuperficies, cum faciat √1728. Deinde uides, ut illæ duæ lineæ A B & B C ſint coniunctæ directe, conſtituantq; F D C, & inter eas erectum mediũ proportionale B D, faciens ſua longitudine √√1728. Eſt aũt hoc ſignum √√ peculiare lineis medialibus.

De propoſitione ſecunda medialium, quæ apud Campanum eſt XX.

NVncupauerat (in propoſitione præcedenti) partes inſtrumentales medialium linearũ, uidelicet lineas rationales, potentia tantum commenſurabiles: ideo nunc (propoſitione hac) oſtendit modum reductionis medialium ad huiuſmodi partes inſtrumentales, dicens:

*V*Cum adiuncta fuerit linee rationali in longitudine, ſuperficies equalis quadrato linee medialis, latus eius ſecundũ potentialiter tantum rationale erit, lateriq; primo in longitudine incommenſurabile.

Certe non curat Euclides hoc, ut iſta propoſitio ſit conuerſa prioris, aliàs lineæ rationali non addidiſſet determinationem hanc, in longitudine. Et confirmat hoc meam ſententiam de duabus propoſitionibus linearum rationalium, paulo ſuperius recitatam. Neq; enim illæ debuerunt eſſe ad inuicem conuerſæ præciſe. Hoc autem curat & agit Euclides, ut hanc ſpeciem irrationalium linearum (id eſt, medialium) expediat propoſitionibus ſimilibus, iis ꝓpoſitionibus, quas de ſingulis aliis ſpeciebus erat poſiturus. Sic autẽ uidebis eum tractare ſingulas ſpecies irrationalium linearum reliquas, ut (cum reliquæ ſpecies omnes præter hanc primam contineant lineas compoſitas, aut tanquam compoſitas) poſt tractationem partium compoſitionis earum, incipiat tractare partes earum inſtrumentales, idq; nõ aliter faciat quàm hic, uidelicet ut una propoſitione doceat inuentionem uniuſcuiuſq; ſpeciei, & alia ſignificet reductionẽ ad eaſdẽ partes inſtrumentales, mediante linea rationali in longitudine, cui applicata ſit ſupficies quadrangula rectãgula &c.

Eſt

Est autem propositio ista facilis, maxime si exemplum adhibeas. Recipiamus itaq; exemplum superioris propositionis. Scilicet superficies A B C D (quæ æqualis est quadrato E D G H, estq; hoc quadratum lineæ medialis H G) applicata est lineæ rationali in longitudine B C. Ergo necesse est, ut latus alterum superficiei A B C D, uidelicet A B sit potentia tantum rationale, & lateri B C incommensurabile.

Propositio tertia medialium, quæ Campano est 21.

OMnis linea cõmensurabilis lineæ mediali, medialis ē. Vt si diameter circuli sit linea medialis, necesse est ut etiam semidiameter eiusdem circuli sit linea medialis. Et quamuis hoc generaliter uerum sit, nihilominus tamen uoluit Euclides de qualibet specie sua ponere propositionem specialem, de re hac, forte ut commensurabilium & incommensurabilium considerationem faceret commendatiorem. Sed de his suis locis dicam.

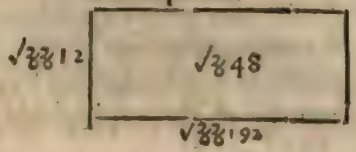
Data itaq; linea mediali, quædam mediales ei commensurabiles erunt in longitudine. Vt huic $\sqrt{\sqrt{6}}$, hæc $\sqrt{\sqrt{96}}$. Et quædam potentia tantum, ut huic $\sqrt{\sqrt{6}}$, hæc $\sqrt{\sqrt{24}}$. Et quædam ei neutro modo cõmensurabiles erunt, ut huic $\sqrt{\sqrt{6}}$, hæc $\sqrt{\sqrt{12}}$.

De propositione quarta medialium linearum, quæ Theoni est 25.

BReui propositione hac, mediale non excedit mediale, rationali parumper dissimulata, donec suum alium locũ inueniat, pro ea nunc illam uideamus, quam Theon facit uigesimam quintam.

QUelibet superficies quam continent duæ lineæ mediales, commensurabiles in longitudine, medialis est.

Exemplum.



mediales lineas, si coniungantur, aut residuales bimedialiter, si ab inuicem subtrahãtur. Notum est aũt, ut ex talium compositione aut absciſione, nihil fiat aut remaneat niſi medialis linea.

De propoſitionibus Euclidis quas poſuit de ſecunda ſpecie irrationalium linearum ſuarum, id eſt, de binomialibus lineis. Cap. XVII.

NAſcuntur primo omnium lineæ potentia tantũm rationales, de rationalibus longitudine (id eſt, ſecunda ſpecies naſcitur ex prima) & fit hoc per primam elementarem. Scilicet ſi fuerint duæ lineæ longitudine rationales, directæ coniunctæ, & non fuerit inter eas proportio numeri quadrati ad numerũ quadratũ, tunc mediũ proportionale inter eas, erit linea rationalis ſecundæ ſpeciei, i. potentia tantũ rationalis erit linea illa.

Naſcuntur ſecundo lineæ mediales, id eſt, lineæ primæ ſpeciei irrationalium, de rationalibus lineis binis, ex utraq; ſpecie rationalium ſumptis, uel ex ſecunda rationalium ſpecie, ſi ad inuicem fuerint incommenſurabiles. Fit etiam hoc, modo iam dicto, per primam uidelicet elementarem: ſcilicet medium proportionale inter lineas tales, ſemper erit medialis linea.

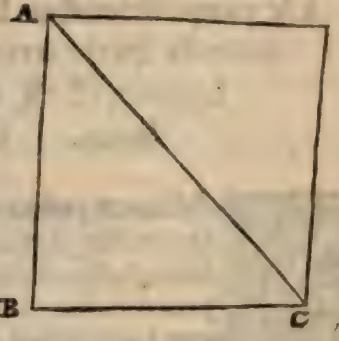
Naſcuntur tertio lineæ binomiales (id eſt, lineæ ſecundæ ſpeciei irrationalium linearum) de rationalibus lineis, uidelicet ſi duæ lineæ rationales recipiantur ex utraq; ſpecie rationalium, uel duæ incommenſurabiles ex ſecunda ſpecie rationalium, coniungãturq; illæ lineæ directe (id eſt, ſic, ut ex duabus rectis una recta fiat) ſemper fiet ex tali coniunctione ſeu compoſitione, linea una binomialis. Et hoc eſt, quod dicit propoſitio prima binomialium hæc ſequens, quæ Campano eſt 30.

¶ Si duæ lineæ rationales potentialiter tantum communicantes

nicantes in longum directum q̄ contungantur, tota linea ex his composita, erit irrationalis, dicetur q̄ Binomium.

Vt si ex costa quadrati rationalis, & ex diametro eiusdem quadrati, fiat una linea recta, erit illa necessario binomialis.

Vt sit A B, 12, erit A C, $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 288. Itaq; si ex A B & A C fiat una linea recta, cō ponetur ($\sqrt{\frac{1}{8}}$288 + 12) linea binomialis.



Sic si A B faciat $\sqrt{\frac{1}{8}}$ 288, faciet A C, 24. Itaq; ex A B & A C, erit binomialis linea 24 + $\sqrt{\frac{1}{8}}$288.

Sic si A B faciat $\sqrt{\frac{1}{8}}$24, faciet A C $\sqrt{\frac{1}{8}}$48. Itaq; ex A B & A C erit binomialis linea hæc, $\sqrt{\frac{1}{8}}$48 + $\sqrt{\frac{1}{8}}$24.

Nascuntur deinde ex binomialibus lineis reliquarum specierum irrationalium lineæ. Quod ut fiat, suis locis singulis explicabunt propositiones ad hæc positæ ab Euclide.

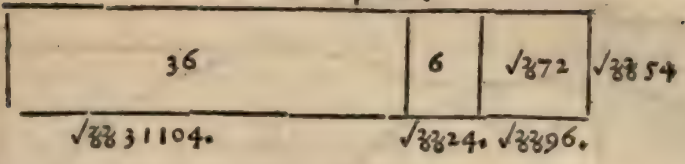
Et cum contrariorum eadem sit disciplina, pulchre opponitur resolutio compositioni, per aliam propositionem Euclidis sequentem, quæ apud Campanum est 36. Ea sic dicit:

¶ Impossibile est binomium diuidi in duas alias lineas, q̄ ex quibus coniunctū est et nominatū, sub earum termino.

Obserua hic, ut de prima specie irrationalium (id est, de medialibus lineis) nulla propositio huiusmodi compositionis & resolutionis posita sit, neq; poni potuerunt tales. Sed de singulis reliquis speciebus, tales aliquas posuit Euclides. Hac igitur ratione separata est species medialium linearum, à speciebus reliquis, tanq̄ simplex à compositis, & à compositarū similibus, ut in superioribus capitibus de hac re plura me dixisse arbitror.

Itaq; binomialis linea resoluitur in duas lineas illas ex quibus est composita, quæ uidelicet sunt rationales potentia tantum

Exemplum.



Primo √8896 & √8854 sunt commensurabiles potentia tantum, & continent superficiem medialem hanc √372. Secundo, √8854 & √8824, continent superficiem hanc 6, & sunt commensurabiles potentia tantum. Tertio, √8854 & √8831104, continent 36, &c.

Vnde medium proportionale, inter duas lineas mediales potentia tantum commensurabiles, aut est linea medialis, ut dum lineæ illæ continent superficiem medialem: aut est rationalis potentia tantum, ut dum mediales illæ continent superficiem rationalem numeri non quadrati: aut est rationalis in longitudine, ut dum mediales lineæ illæ, continent superficiem rationalem numeri quadrati.

De lineis medialibus duabus, longitudine & potentia incommensurabilibus.

SI fuerint duæ lineæ mediales incommensurabiles longitudine & potentia, continebunt illæ lineæ superficiem irrationalem ab Euclide non receptam. Et quemadmodum ille superficies tales non recipit, sic lineas quæ in illas superficies possunt, non admittit. Quòd si receperis lineam potentiæ illius prædictæ, cum altero laterum superficiei, cõstitues aliam speciem superficierum irrationalium, atq; aliam speciem irrationalium linearum ex quadratione huiusmodi superficiei: & poterit continuatio talis progredi sine fine.

Sequitur exemplum.

tum commensurabiles. Vt (exempli gratia) 12 + √ 48 diuidi tur in 12 & √ 48 : & impossibile est ut binomium illud diuida tur in duas alias lineas quæ sint rationales potentia tantum commensurabiles. Sunt autem partes illæ positæ 12 & √ 48. ex quibus nominatum est hoc binomium 12 + √ 48 sub earū partiū termino seu descriptione, qualem habet propositio præ cedens, id est, prima capitis huius propositio.

Potest quidem 12 + √ 48 diuidi in 6 & 6 + √ 48. item in 12 + √ 12 & √ 12, item in 6 + √ 12 & 6 + √ 12. Et sic de alijs. Sed ex talibus diuisionibus non fiunt duæ lineæ rationa les, potentia tantum commensurabiles.

Sequitur tertia huius capitis propositio, quæ apud Campanum est 17.

¶ Duas lineas inuenire rationales, potentia tantum com mensurabiles, quarū longior plus possit breuiore, quadrato linee sibi in longitudine commensurabilis.

Præmissis duabus ppositionibus quæ de binomijs loquun tur generaliter, sequuntur nunc duæ aliæ, quæ de binomijs lo quuntur specialiter. Harum prior est, quam nunc tractamus, ea est apud Campanum 17 Euclidis, at apud Theonem est 30 Euclidis. Proponit uero hæc inuentionem binomialium linea rum, primi ordinis seu primæ speciei : quales rursum subdiui duntur in tres species alias. id est, in binomia prima, in secunda & in tertia.

Inuentio autem illa quam proponit propositio hæc, optime perficitur secundum propositionem elementarem tertiam sic.

Regula inuentionis huius.

Recipe duas lineas rationales commensurabiles, quarum proportio non sit tanquam numeri quadrati ad numerum qua dratum, & inter eas constitue medium proportionale, & linea dupla illius medij, erit portio binomij breuior. Linea uero cōposita ex duabus receptis lineis, erit portio binomij longior.

Exem-

Exemplum.

Sint receptæ 8 & 6, erit medium proportionale inter eas $\sqrt{\text{ß}}48$. Vnde portio binomij minor, erit $\sqrt{\text{ß}}192$: & 14 erit portio eius maior. Itaq; binomium inuentũ sic stabit, $14+\sqrt{\text{ß}}192$.

Huius ordinis binomia, uidelicet prima, secunda, & tertia, sunt quadrata. Et de illorum inuentione sunt problemata tria sequentia.

¶ Binomium primum inuenire.

Recipe duas lineas longitudine rationales, quarum proportio non sit tanquam numeri quadrati ad numerum quadratũ, & operare iuxta regulam proximam superius positam.

Vt si receperis 6 & 18, respondebit figura propositionis elementaris tertiæ (quæ superius data est folio 155). Scilicet A D faciet $\sqrt{\text{ß}}432$, eritq; portio binomij minor, & A B faciet 24. Vnde hoc erit binomium primum hoc modo inuẽtum, $24+\sqrt{\text{ß}}432$.

¶ Binomium secundum inuenire.

¶ Binomium tertium inuenire.

Recipe duas lineas potentia tantũ rationales, quæ sint commensurabiles, ita tamen ut non habeant ad inuicem proportionem numeri quadrati ad numerum quadratum, & operare iuxta regulam superius positã. Et si inter receptas duas inciderit medium proportionale, quod sit longitudine rationale, tunc produces binomium secundum. Si autem medium proportionale fuerit potentia tantum rationale, tunc produces binomium tertium.

Exemplum primi.

Recepta figura folij 155, recipe pro linea A C $\sqrt{\text{ß}}243$, & pro C B recipe $\sqrt{\text{ß}}27$, tunc D C faciet 9. Ergo A D faciet 18, & A B faciet $\sqrt{\text{ß}}432$. Vnde binomium secundum sic stabit in numeris, $\sqrt{\text{ß}}432+18$; scilicet B A D faciet nunc binomium secundum.

Exemplum secundi.

Recepta figura hic suprà indicata, recipe pro linea A C $\sqrt{\text{ß}}54$,

&

& pro C B recipe $\sqrt{\aleph}6$, tunc D C faciet $\sqrt{\aleph}18$. Ergo A D faciet $\sqrt{\aleph}72$: & A B faciet $\sqrt{\aleph}96$. Itaq; B A D faciet modò binomium tertium hoc, $\sqrt{\aleph}96+\sqrt{\aleph}72$.

Sequitur propositio quarta capitis huius, quæ est Campani 18.

¶ Duas lineas inuenire rationales, potentia tantum commensurabiles, quarum longior plus possit breuiore, quantũ est quadratum lineæ sibi incommensurabilis in longitudine.

Proponit hæc inuentionem binomiorum ordinis secundi, id est, binomiorum non quadratorum, uidelicet quartorum, quintorum, & sextorum. Et sumitur regula inuentionis huius iuxta propositionem elementarem quartam.

Regula.

Recipe lineam rationalem, quam diuide in duas lineas irrationales longitudine & potentia incommensurabiles, & inter eas constitue medium proportionale, & erit linea dupla ad medium illud, breuior portio binomij inueniendi. Linea uero, quæ primo fuerat recepta, erit portio binomij eiusdem longior.

Exemplum.

Sit recepta linea, faciens 24, hanc diuido in $12+\sqrt{\aleph}12$, & $12-\sqrt{\aleph}12$, mediũ proportionale inter partes diuisionis illius facit $\sqrt{\aleph}132$. Ergo portio binomij breuior, faciet $\sqrt{\aleph}528$: & longior portio eiusdem, faciet 24. Itaq; inuentum binomium sic stabit, $24+\sqrt{\aleph}528$.

¶ Binomium quartum inuenire.

Recepta figura propositionis elementaris quartæ (superius ostensa folio 156) recipe pro A B lineam longitudine rationalem: ut si A B faciat 24, diuido eã in $12+\sqrt{\aleph}48$, & $12-\sqrt{\aleph}48$, id est, in A C & C B: erit igitur medium proportionale inter partes diuisionis huius hoc, $\sqrt{\aleph}528$. Erit igitur A D (id est, breuior portio binomij inueniendi) $\sqrt{\aleph}2112$; longior autem portio, erit A B, faciens 24.

¶ Binomium quintum inuenire.

¶ Binomium sextum inuenire.

Recipe pro A B lineam potentia tantum rationalem. Vt si A B faciat $\sqrt{\text{z}}96$, diuide eam in $\sqrt{\text{z}}24+\sqrt{\text{z}}8$ & $\sqrt{\text{z}}24-\sqrt{\text{z}}8$, id est, in A C & C B. Erit igitur medium proportionale inter partes diuisionis huius 4. Igitur linea A D faciet 8, & est portio binomij minor. Faciet igitur B A D (id est, $\sqrt{\text{z}}96+8$) binomium quintum.

At si medium proportionale fuerit linea potentia tantum rationalis, incommensurabilis lineæ A B, tunc producetur binomium sextum. Vt si A B faciat $\sqrt{\text{z}}48$, sitq; diuisa in A C (faciente $\sqrt{\text{z}}12+\sqrt{\text{z}}5$) & C B (faciente $\sqrt{\text{z}}12-\sqrt{\text{z}}5$) tunc medium proportionale faciet $\sqrt{\text{z}}7$, & linea A D faciet $\sqrt{\text{z}}28$. Faciet itaq; B A D (id est, $\sqrt{\text{z}}48+\sqrt{\text{z}}28$) binomium sextum.

Si uero medium proportionale esset commensurabile lineæ A B, tunc nullum binomium fieret ex B A D, sed fieret linea rationalis potentia tantum. Vt si A B faciat $\sqrt{\text{z}}96$, diuidaturq; in $\sqrt{\text{z}}24+\sqrt{\text{z}}18$ & $\sqrt{\text{z}}24-\sqrt{\text{z}}18$, faciet medium proportionale $\sqrt{\text{z}}6$, & A D faciet $\sqrt{\text{z}}24$. Itaq; B A D faciet $\sqrt{\text{z}}216$, lineam uidelicet potentia tantum rationalem.

¶ Definitiones binomiorum, uocat Theon definitiones secundas, propter primas illas quæ à principio libri decimi ponuntur, licet fortassis suæ sint, & non Euclidis.

Prima.

Si fuerit binomium, cuius longior portio potentior sit breuiore, augmento quadrati, linee commensurabilis eidem longiori in longitudine, fueritq; eadem longior, commensurabilis in longitudine, alicui linee rationali in longitudine, ipsum vocabitur binomium primum.

Hoc est, binomium quadratum, cuius portio longior fuerit linea rationalis in longitudine, uocabitur binomium primum.

Secunda.

Si fuerit binomium, cuius longior portio potentior sit

breuiore

breuiore,augmento quadrati linee commensurabilis eidem longiori in longitudine,fueritq; breuior portio commensurabilis in longitudine,alicui linee rōnali in longitudine, ipsum vocabitur binomium secundum.

Hoc est,binomium quadratum, cuius portio breuior fuerit linea rationalis in longitudine,uocabitur binomium secundū.

Tertia.

Si fuerit binomium, cuius longior portio potentior sit breuiore augmento quadrati linee commensurabilis eidem longiori in longitudine,fueritq; neutra portionum commensurabilis in longitudine alicui linee rationali in longitudine, ipsum vocabitur binomium tertium.

Hoc est,binomium quadratum, cuius neutra portio fuerit longitudine rationalis,uocabitur binomium tertium.

Illa itaq; binomia sunt quadrata, in quibus linea excessus commensurabilis est in longitudine,portioni longiori. Vnde si linea excessus fuerit incommensurabilis in longitudine portioni longiori,non erit binomium illud quadratum,ut sunt binomia sequentium trium definitionum.

Quarta definitio.

Si fuerit binomium, cuius longior portio potentior sit breuiore,augmēto quadrati linee incommensurabilis eidem longiori in longitudine, fueritq; eadem longior commensurabilis in longitudine alicui linee rationali in longitudine, ipsum vocabitur binomium quartum.

Hoc est, binomium non quadratum, cuius portio longior fuerit rationalis in longitudine,uocabitur binomium quartū.

Quinta.

Si fuerit binomium, cuius longior portio potentior sit breuiore augmento quadrati linee incommēsurabilis eidem longiori in longitudine,fueritq; breuior portio cōmensurabilis in longitudine alicui linee rationali in longitudine,ipsum vocabitur binomium quintum.

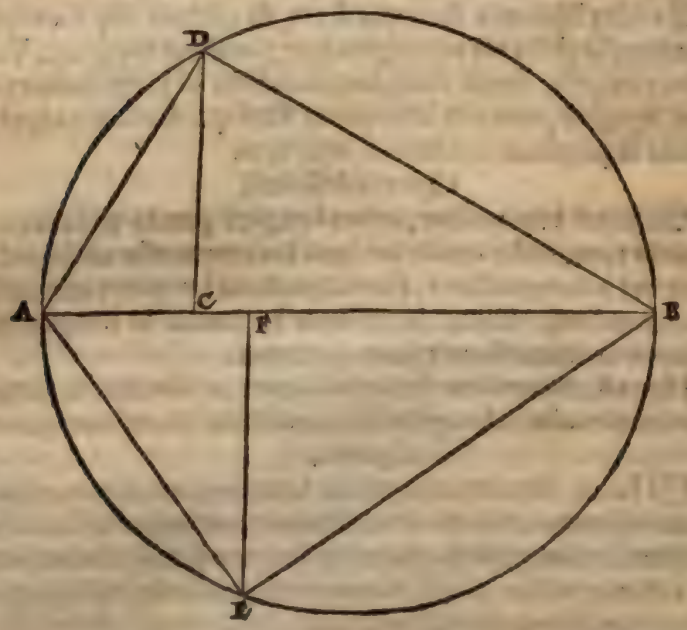
Hoc eſt, binomium non quadratum, cuius portio breuior fuerit linea rationalis in longitudine, ipſum uocabitur binomium quintum.

Sexta.

Si fuerit binomium, cuius longior portio potentior ſit breuiore, augmento quadrati, linee incõmenſurabilis eidem longiori in longitudine, fueritq; neutra portionum commenſurabilis in longitudine, alicui linee rationali in longitudine, ipſum vocabitur binomium ſextum.

Hoc eſt, binomium non quadratum, cuius neutra portionũ fuerit longitudine rationalis, uocabitur binomium ſextum.

¶ Intra circulũ unum ſpecies binomiorũ omnes conſignare.



Recipe

Recipe circulum diametri in longitudine rationalis, & primo constitue medium proportionale inter quartam partem diametri, & partem eius reliquam, sicut uides C D poni inter A C & C B. Secundo constitue medium proportionale inter tertiam partem diametri, & partem eius reliquam, sicut uides F E poni inter A F & F B. Tertio claude orthogonios, hoc est, trahe lineas A D B E A rectas.

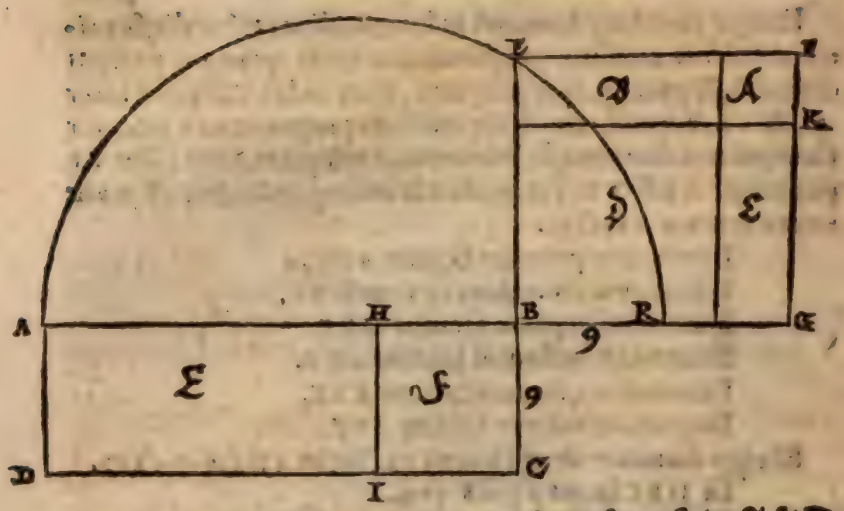
Binomium primum faciunt A D C.
Binomium secundum faciunt D B C.
Binomium tertium faciunt D B E.
Binomium quartum faciunt A B E.
Binomium quintum faciunt E B F.
Binomium sextum faciunt A E F.

Si ergo diameter circuli fecerit 12, faciet A D C, $6+\sqrt{\frac{1}{2}27}$.
Et D B C faciet $\sqrt{\frac{1}{2}108}+9$.
Et D B E faciet $\sqrt{\frac{1}{2}108}+\sqrt{\frac{1}{2}96}$.
Et A B E faciet $12+\sqrt{\frac{1}{2}96}$.
Et E B F faciet $\sqrt{\frac{1}{2}96}+8$.
Et A E F faciet $\sqrt{\frac{1}{2}48}+\sqrt{\frac{1}{2}32}$.

Propositio quinta capitis huius, & ea est 48 Euclidis apud Campanum.

¶ Si fuerit superficies binomio primo, lineaq; in longitudine rationali contenta, latus quod in eam superficiē potest, binomium esse necesse est.

Vt superficies A B C D est superficies contenta sub duabus lineis illis A B & B C. Faciat igitur A B, $19+\sqrt{\frac{1}{2}72}$ (scilicet A H, faciat 19, & H B faciat $\sqrt{\frac{1}{2}72}$) faciatq; B C, 9, tunc B B faciet $\sqrt{\frac{1}{2}162}+3$: scilicet F K facit 3, & K G facit $\sqrt{\frac{1}{2}162}$. Est aūt E B seu F G, latus quod in superficiem A B C D potest, hoc est, B E facit quadratum, cuius area æqualis sit areæ superficiei A B C D, sicut uides quadratum E B G F esse æquale superficiei A B C D, facit enim utraq; earum $171+\sqrt{\frac{1}{2}5832}$. Quantumeñ



facit superficies ℒ, tantum facere debent superficies 𝔄 & 𝔇: & quantum facit 𝔉, tantum facere debent 𝔅 & ℭ. Debet autē area ipsius 𝔄 facere 9, & area 𝔇 162, & area 𝔅 √ 81458, & tantundem facere debet etiam ℭ.

Cum autem A B linea sit binomialis prima, sitq; B C linea longitudine rationalis, necesse est superficiem ℒ 𝔉 esse superficiem binomialem primam, ut deducitur ex ea propositione, quæ in hoc capite erit septima seu ultima.

Sentētia igitur propositionis huius est, hæc: Superficies quadrangula rectangula, contenta sub linea longitudine rationali, & binomiali prima, est binomialis prima, & si superficies illa quadretur, necesse est lineam quadraturæ illius, esse binomialem lineam. Et quia talis linea modò est binomium primum, modò binomium secundum, modò tertium, modò quartum, modô quintum, modò sextum, ideo in fine propositionis non additur uocabulo [Binomij] aliqua determinatio. Vnde si A B faciat 19 + √ 372, & B C faciat 9, erit linea potēs in superficiem ℒ 𝔉 (id est, linea B B) binomium quintum. Si autem B C faciat

ciat 8 (A B faciente $19+\sqrt{\text{R}}72$) erit linea E B binomium quartum. Si autem B C faciat 6, erit linea E B binomiũ sextum &c.

Sic ex superficie $97+\sqrt{\text{R}}2352$, fit latus tetragonicum, existens binomium primum: faciet enim $7+\sqrt{\text{R}}48$.

Item ex supficie $34+\sqrt{\text{R}}1152$, fit latus tetragonicũ, existens binomiũ secũdum: facit eñ radix q̃drata areæ illius $\sqrt{\text{R}}18+4$.

Item ex $98+\sqrt{\text{R}}9600$, facit radix quadrata binomium tertium, uidelicet $\sqrt{\text{R}}50+\sqrt{\text{R}}48$, &c.

Est igitur hæc propositio talis, ut requirat extractiones radicum quadratarum de binomijs primis.

Sic illa quæ hanc apud Campanum sequitur, uidelicet 49, requirit extractiones radicum ex binomijs secundis. Et alia sequens (id est, Campani 50) requirit extractiones radicum de binomijs tertijs. Deinde Campani 51, requirit extractiones radicum de binomijs quartis. Et 52 Campani, requirit extractiones radicum de binomijs quintis. Et 53 Campani, requirit extractiones radicum de binomijs sextis. Sed illæ propositiones in locis alijs tractabuntur.

De radicum extractionibus ex binomijs, habet caput libri huius decimum.

Propositio sexta capitis huius, quæ est apud Campanum 54.

¶ Si linee in longitudine rationali, adiungatur rectangulum, equale quadrato binomij, latus eius secundum erit binomium primum.

Vt, sicut uides in figura iam data, rectangulũ A B C D (quod æquale est quadrato E F G B) adiungit̃ lineæ B C in longitudine rationali. Est aũt E F G B quadratum huius lineæ E B, quæ est binomium. Itaq; E F G B est quadratum binomij, id est, latus eius tetragonicum est binomium. Erit igitur necesse ut alterum latus rectanguli A B C D (id est, latus A B) sit binomium primum.

Et cũ hæc ꝓpositio sit cõuersa præcedentis, fueritq; illa præcedens, de extractione radicis ex supficiebus binomialib. primis, quales

quales radices oportet esse binomiales lineas, ideo hac præsenti propositione significatur, ex multiplicatiõe, seu ex ductu lineæ binomialis, in se produci quadratũ quod sit æquale superficiei alicui binomiali primæ. Et tale quadratum, si redigatur in superficiem rectangulam altera parte longiorem, cuius unum latus sit linea longitudine rationalis, necesse erit (ut docet hæc præsens propositio) alterũ latus illius superficiei quadrangulæ altera parte longioris, esse lineam binomialem primam.

Binomium autem sive sit primum, sive secundum, sive tertium, quartum, quintum, sive sextum, semper producit binomium primum, dum in se fuerit multiplicatum.

Sequuntur hanc propositionem (ordine Euclidis) quinq; aliæ propositiones, quæ alibi tractabuntur. Quarum prima requirit talem multiplicationem quadratam, quæ producat binomium secundum. Secunda requirit multiplicationem quadratam producentem binomium tertium. Tertia requirit multiplicationem quadratam, quæ producat binomium quartum. Quarta requirit talem quadratam multiplicationẽ, quæ faciat binomium quintum. Quinta propositio requirit multiplicationem quadratam, facientem binomium sextum. Sed hæ propositiones in alijs locis suis tractabuntur, ut dixi.

Sequitur propositio septima seu ultima capitis huius, quam Campanus facit 60 in ordine.

QUelibet linea commensurabilis alicui Binomiorum, sub eadem specie binomium esse probatur.

Hoc est, linea commensurabilis lineæ binomiali primæ, necessario est linea binomialis prima. Item linea commensurabilis lineæ binomiali secundæ, est binomialis secunda. Sic binomiali tertiæ cõmensurabilis, est binomialis tertia. & sic de alijs. Videlicet, commensurabilis quartæ, quarta est. Quintæ commensurabilis, quinta est. Sextæ, sexta est.

Est præterea propositio hæc probatio quædam superiorum duarum

duarum. Nam si superficies sit, cuius alterum latus sit linea longitudine rationalis, & alterum sit linea binomialis prima, necesse est superficiem illam esse binomialem primam. Quod em̃ propositio hæc docet de lineis binomialibus, uerum est etiam de superficiebus, & de numeris binomialibus. Commensurabilis autem est numerus binomialis lineæ, numero, binomiali superficiei, cuius unũ latus fuerit linea rationalis in longitudine. Ergo si horum alterum fuerit binomium primum, erit & reliquum binomium primum, &c.

De propositionibus Euclidis, tractantibus bimediales primas, id est, speciem irrationalium linearum tertiam. Caput XVIII.

OBMISSA est capite decimosexto proportio quædam medialium linearum, à qua caput hoc decimumoctauum cõuenit incipere. Quod cum sit de bimedialibus primis, sitq; bimedialis prima, nihil aliud quàm compositio duorum medialium per additionem unius ad alterum facta, non tamen quorumcunq;, sed quæ sint commensurabilia potentia tantum, & quorum multiplicatio inter se, faciat rationale simpliciter, meritò quæritur quid fiat ex compositione duorum medialium potẽtia incõmensurabiliũ, aut longitudine cõmensurabilium.

Sic autem habet propositio illa capitis huius prima.

VQuelibet differentia, qua abundat mediale à mediali, irrationalis esse probatur.

Requirit hæc propositio collationẽ medialium inter se quarumcunq;, quatenus sufficientiam eius expositam habeamus.

1. Mediale collatum ad mediale, si fuerint ad inuicem longitudine commensurabilia, tunc differẽtia qua abundat maius

& minore, erit medialis. Vt si conferantur hæc duo medialia, √ꝫꝫ2754. √ꝫꝫ34. quæ cum sint commensurabilia longitudine, erit differentia eorum necessario medialis. Est autem differentia eorum √ꝫꝫ544 irrōnalis uidelicet longitudine & potentia.

2. Item mediale collatum ad mediale, si fuerint ad inuicem potentia tantum commensurabilia, tunc differentia qua abundat unum ab altero, erit irrationalis longitudine & potentia: erit enim aut residuum bimedialis primi, aut residuum bimedialis secundi. Exemplum primi.

Vt si conferantur hæc duo medialia, √ꝫꝫ72, & √ꝫꝫ18, abundabit maius supra minus, per hoc residuum bimediale primū, √ꝫꝫ72 — √ꝫꝫ18. Exemplum secundi.

Vt si conferantur hæc duo medialia, √ꝫꝫ450 & √ꝫꝫ18, erit differentia maioris ultra minus, in isto residuo bimediali secundo, √ꝫꝫ450 — √ꝫꝫ18: & est illa quoq; differentia irrationalis, utroq; modo, uidelicet longitudine & potentia.

3. Item mediale collatum ad mediale, si fuerint ad inuicem utroq; modo incommensurabilia, tunc differentia qua abundat unum ab altero, est irrationalis utroq; modo, & intra species tredecim irrationalium linearum non recipitur. Vt si hæc duo medialia conferantur, √ꝫꝫ216 & √ꝫꝫ18, erit differentia eorum hæc, √ꝫꝫ216 — √ꝫꝫ18.

1. Iam si componantur duæ lineæ mediales, quarum differentia est medialis, non mutat compositio illa speciem. Nam linea inde composita manet medialis.

2. Si uero componantur duæ lineæ mediales, quarum differentia non recipiatur intra species tredecim irrationalium linearum: reiicitur etiam compositio talium linearum, ut intra species tredecim illas, non recipiantur lineæ tales.

3. At si componantur duæ lineæ mediales, quarum differentia mutet speciem, & intra tredecim species recipiatur: recipitur etiam compositio talium linearum intra species illas 13. Compositæ ēm lineæ illæ tales sunt, de quibus caput hoc atque sequens agent.

Pro-

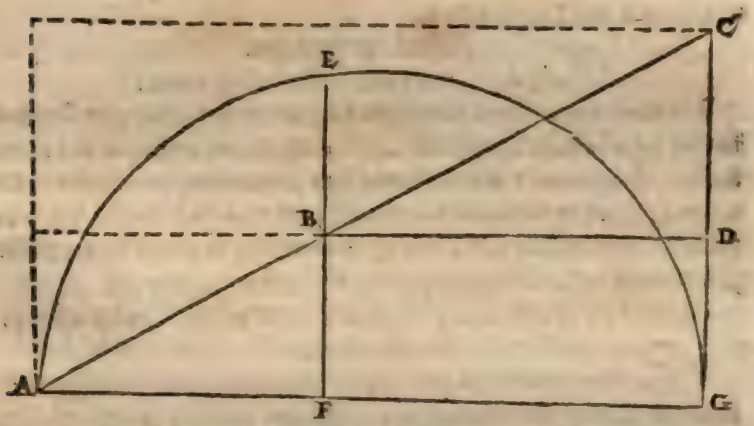
Propositio secunda capitis huius, est Theonis 28, à Campano autem obmissa est.

¶ Duas lineas inuenire mediales, potentia tantum commensurabiles, quæ superficiem rationalem contineant.

Hoc est, inuenire duas partes constituentes lineam bimedialem primam. Vnde hæc propositio continet particulas, quibus describuntur lineæ bimediales primæ.

Facilis est aũt inuentio huiusmodi partium. Recipitur enim binomialis linea ad placitum, & inter portiones eius duas, constituitur medium proportionale, quod erit portio una bimedialis lineæ inueniendæ: altera portio inuenitur iuxta 10 sexti.

Figura inuentionis huius est ista.



Sit A G linea binomialis, faciens $\sqrt{\sqrt{12}+3}$. Faciat aũt A F 3, & F G faciat $\sqrt{\sqrt{12}}$, tunc medium proportionale inter illas portiones erectum, uidelicet F E, faciet $\sqrt{\sqrt{108}}$. Ad huius itaq; medij quantitatem recipio A B, ita ut A B sit æqualis ipsi F E. Itaq; A B linea, secundum eam acceptionẽ per circinum accepta, continuetur, donec ipsam abscindat orthogonalis erecta G C: atq; ita faciet A C bimedialem primam, cuius partes compositionis

sunt A B & B C. Cum enim A F faciat A B, necesse est (per decimam sexti) F G seu B D facere B C.

Lineæ illæ in numeris sic stabunt ad regulam De tri.

3. √ȣ108. √ȣ12. √ȣ192.

Certe uides terminum secundum, & quartum, constituere bimediale primum. Cum enim quatuor termini illi sint continue proportionales, necesse est ut multiplicatione secundi in quartum, tantum fiat, quantū fit ex multiplciatione tertij in se. Facit autē √ȣ12 in se 12. ergo √ȣȣ108 in √ȣȣ192, facit etiā 12. id quod arguit portiones illas inuētas constituere bimedialem primam. Mediales aūt lineæ quæ continent superficiem rationalem (ut quarum numeri inter se multiplicati, faciunt numerū rationalem) necessario sunt commensurabiles potentia tantū, ut ostendi suprā capite 16.

Aliud exemplum.

√ȣ6. √ȣȣ216. 6. √ȣȣ7776.

Vides certe ut quartus terminus multiplicatus per secundū, faciat 36, id est, rationalem numerum, cum tertius in se tantum faciat, & quatuor illi termini sint continue proportionales. Cum igitur terminus secundus & quartus, sint medialiū lineaꝝ numeri, oportet ut ipsæ lineæ compositæ faciant bimedialem primam: id quod sequens propositio docet, quæ est

Tertia propositio capitis huius, quæ apud Camp. est 31.

Ea sic dicit:

¶ Si duæ mediales potentia tantum commensurabiles, superficiemq; rationalem continētes, directe coniungantur, tota linea ex his composita, erit irrationalis, dicaturq; bimediale primum.

Vides ut hæc propositio usum ostendat inuentionis illius, quam præcedens propositio requirit.

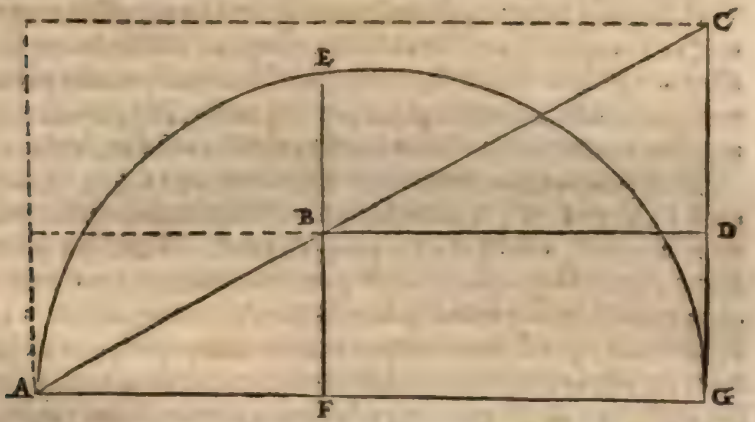
Vt si ex A B (faciente √ȣȣ108, inuentaq; per A F & F G) & ex B C (faciente √ȣȣ192, inuētaq; per A F, & A B, & F G, seu B D) fiat una linea illa A C, erit ipsa A C bimedialis prima, ut satis dictum

ctum est superius circa præcedentem propositionem.

Propositio quarta capitis huius, quæ apud Campanum est XXXVII, sic dicit:

¶ Bimediali primo diuiso in duas lineas mediales (secundum terminum suum) impossibile est idem bimediale diuidi in alias duas lineas mediales sub earum termino.

Hoc est, bimedialis prima huius naturæ est, ut uno modo possit diuidi solummodo, ita ut partes diuisionis contineant superficiem medialem.



Vt si AC (faciens $\sqrt{\sqrt{108}} + \sqrt{\sqrt{192}}$) resoluatur in AB & BC, continebunt portiones illæ superficiem rationalem (si ad angulum rectum apponantur) facientem 12. Et (præter hanc unam diuisionem) impossibile est ut AC diuidatur in duas alias partes quæ appositæ ad angulum rectum, contineant superficiem rationalem.

Propositio quinta capitis huius, quæ est apud Campanum 24, sic dicit:

¶ Duas lineas inuenire mediales potentia tantum commensurabiles, superficiemq; rationalem continentes, quarū

longior sit potentior breuiore quadrato lineæ commensurabilis eidem longiori in longitudine.

Iam diuidit Euclides speciem bimedialium primarum linearum, in duas alias species, quarum prior describitur per hanc propositionem præsentem, & posterior describitur per propositionem sequentem.

Sunt igitur lineæ bimediales primæ, sub priore specie tales, ut portiones eius illæ, quæ rationalem continent superficiem, habeant lineam excessus quadratorum, quæ sit commensurabilis in longitudine ipsi portioni longiori.

Portiones autem tales inueniuntur iuxta propositionem elementarem secundam. Si uidelicet receperis binomialem lineã aliquam ordinis primi, hoc est, quæ sit uel binomialis prima, uel binomialis secunda, uel binomialis tertia, & opereris iuxta modum inueniendi positum circa propositionẽ cap. huius 2.

Vt si recipias binomium hoc secundum, $\sqrt{\frac{3}{4}}12+3$, faciasq; ex A F 3, & ex F G $\sqrt{\frac{3}{4}}12$, tunc faciet A C bimedialem huius prioris subspeciei, uidelicet $\sqrt{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}192+\sqrt{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}108$. Potentia autem maioris portionis est $\sqrt{\frac{3}{4}}192$, & potentia minoris portionis est $\sqrt{\frac{3}{4}}108$. Excedit aũt maior potentia, potentiam minorem in hac differentia $\sqrt{\frac{3}{4}}12$. Linea autem excessus huius est $\sqrt{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}12$: & hæc linea excessus est cõmensurabilis ipsi portioni longiori. Patet. Nam $\sqrt{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}192$ diuisa per $\sqrt{\frac{3}{4}\frac{3}{4}}12$, facit quotientem hunc rationalem 4. Ergo est ei commensurabilis in longitudine &c.

Propositio sexta capitis huius, quæ apud Campanum est 25.

¶ Duas lineas inuenire mediales potentia tantum commensurabiles, superficiemq; rationalem continentes, quarũ longior sit potentior breuiore quadrato lineæ incommensurabilis eidem longiori in longitudine.

Hac propositione describunt portiones bimedialis primæ, posterioris subspeciei. Huius subspeciei lineæ, diuidũtur in portiones continentes superficiem rationalem: sed linea excessus

earum

earum potentiarū est potentia tantū commēsurabilis portioni longiori. Portiones aūt istæ inueniunt etiā iuxta elementarē 2.

Recipitur autem binomium ordinis secundi, scilicet aut binomium quartum, aut binomium quintum, aut binomium sextum recipitur. In illis enim linea excessus est longiori portioni incommensurabilis in longitudine. Ideo oportet ut linea excessus medialium, quæ inueniuntur per portiones binomialiū talium, sint (iuxta elementarem secundam) tales, quæ habeant lineam excessus, incommensurabilem longitudine, ipsi portioni bimedialis longiori.

Vt si recipias binomium quartum istud, $6 + \sqrt{\sqrt{6}}$, faciasq; ex A F $\sqrt{\sqrt{6}}$, & ex F G 6, tunc faciet F E, seu A E $\sqrt{\sqrt{\sqrt{216}}}$, & B C faciet $\sqrt{\sqrt{\sqrt{7776}}}$, iuxta modum illum quem posui circa propositionem secundam capitis huius. Potentiarum differentia est $\sqrt{\sqrt{5400}}$. Vnde linea excessus huius facit $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5400}}}$, & hæc est potentia tantum commensurabilis portioni longiori, id est, $\sqrt{\sqrt{\sqrt{7776}}}$: facit enim diuisio unius per alteram $\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{5}}}$ &c.

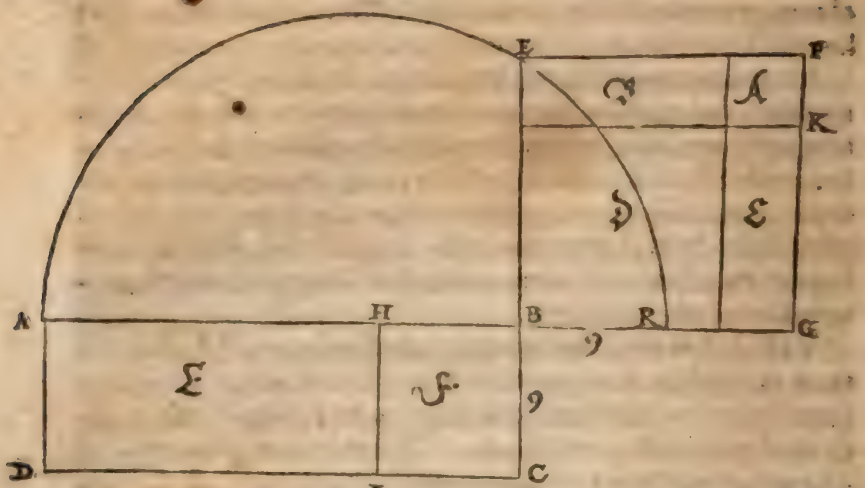
Propositio capitis huius septima, quæ apud Campanum est 49.

Si fuerit superficies linea in longitudine rationali, binomioq; secundo contenta, latus eius tetragonicum erit bimediale primum.

Hoc est, si fuerit superficies quadrangula rectangula binomialis secunda, erit radix eius quadrata bimedialis prima.

Vt si A B faciat $\sqrt{\sqrt{294}} + 12$ (faciente A H $\sqrt{\sqrt{294}}$, & H B faciente 12) faciatq; B C 9, tunc Æ F superficies erit binomialis secunda: faciet enim $\sqrt{\sqrt{23814}} + 108$. Huius radix quadrata, (id est, medium proportionale inter A B & B C, seu B K, quod est B E) faciet $\sqrt{\sqrt{\sqrt{17496}}} + \sqrt{\sqrt{\sqrt{486}}}$: scilicet F K lineola, faciet $\sqrt{\sqrt{\sqrt{486}}}$, & linea K G faciet $\sqrt{\sqrt{\sqrt{17496}}}$. Si autem multiplicetur F K in K G, producit superficies ℭ, aut (quod idem est) superficies ℬ. Aequari autem debent ambæ superficies, uidelicet ℭ & ℬ, superficiei ℱ. Et hac ratione probabis operationem

tuam



tuam. Cum autem superficies ℱ faciat 108, necesse est ut superficies ℭ faciat 54.

Et sic habemus iam alium modum producendi lineas bimediales primas, uidelicet per extractionem radicis quadratæ ex binomio secundo.

Propositio capitis huius octaua, quæ apud Campanum est 55.

¶ Si linee in longitudine rationali adiũgatur superficies equalis quadrato bimedialis primi, latus eius reliquum, binomium secundum esse oportebit.

Hæc propositio est conuersa præcedentis, & dicit, ꝙ linea bimedialis prima, possit superficiem quadratam talem, quæ si redigatur in altera parte longiorem, cuius unum latus sit linea in longitudine rationalis, oporteat latus reliquum esse lineam binomialem secundam. Oportet enim ut talis superficies sit binomialis secunda. Cum autem alterum ex lateribus eius fuerit in lõgitudine rationale, necesse est ut numerus superficiei illius,

commensu

commensurabilis sit numero lateris reliqui, eô quòd numerus superficiei diuisus per numerum lateris illius reliqui, faciat numerum rationalem, illum uidelicet quem habet latus ipsum rationale in longitudine. Vnde oportet (per propositionem ultimam præcedentis capitis) latus illud alterum esse lineam binomialem secundam, cum superficies sit binomialis secunda.

Vt si B B (sicut uides in figura iam primum data) sit linea faciens sua longitudine $\sqrt{\text{ж}}17496 + \sqrt{\text{ж}}486$, cum sit bimedialis prima, potest superficiem quadratam binomialem secundam, facientem numerum hunc, $\sqrt{\text{ж}}23814 + 108$. Itaq; si quadratū B A D C, redigatur in superficiem E F, ita ut B C faciat numerum rationalem (ut est 9) oportebit A B esse binomialem secundam, cum E F sit superficies binomialis secunda. Vnde si diuiseris $\sqrt{\text{ж}}23814 + 108$ per 9, proueniet ex diuisione illa, $\sqrt{\text{ж}}294 + 12$. Summa est.

Sicut extractio radicis de binomio secundo facit bimediale primum, ut uult propositio præcedens: ita multiplicatio bimedialis primi quadrata, producit binomium secundum, quod si recipiat latus unum longitudine rationale, erit reliquum binomiale secundum. Et si unum fuerit binomiale secūdum, necesse erit reliquum esse longitudine rationale.

Propositio capitis huius ultima, quæ est apud Campanum 61.

QVelibet linea commensurabilis alterutri bimedialiū, sub eadem specie bimedialis esse conuincitur.

Vides ut propositio hæc partim pertineat ad caput sequēs. Sententia enim est, quòd duabus lineis bimedialibus propositis, quæ longitudine sint commensurabiles, si altera earum sit bimedialis prima, necesse sit etiam reliquam esse bimedialem primam. Et si altera earum sit bimedialis secunda, necesse sit & reliquam esse bimedialem secundam. Adde.

Si altera earum sit sub priore specie bimedialium primarū, erit & reliqua sub priore specie bimedialium primarū. Si uero

altera earũ sit sub posteriore specie bimedialiũ primarũ, necesse est & reliquã esse sub posteriore specie bimedialiũ primarum.

Item si altera earum sit sub priore specie bimedialium secundarum, erit & reliqua sub priore specie bimedialium secundarum. Si uero altera earum sit sub specie posteriore bimedialium secundarum, erit & reliqua sub posteriore specie bimedialium secundarum. Exempla ad ista singula facile formabis quotquot libuerit.

De propositionibus tractantibus bimediales secundas, constituentes speciem irrationalium linearum quartam.

Caput XIX.

NVMERI portionum bimedialibus lineis adhibiti, optimum nobis iudicium faciunt de speciebus suis. Nam sua multiplicatione inter se, rationalem numerum facientes, mox absq; ulteriore discussione, produnt lineam compositam ex portionibus illis, quarum numeri ipsi sunt, esse bimedialem primã, ut nihil opus sit descriptioni linearum speciei illius addere particulam illam, quòd portiones debeant esse potentia tantum commensurabiles, cum impossibile sit portiones lineæ bimedialis continere superficiem rationalem, & eas non esse commensurabiles potentia tantum. Sed de lineis bimedialibus (de quibus erit caput præsens) iudicare debemus, non ex sola multiplicatione numerorũ (portionibus attributorum) inter se, sed etiam ex diuisione eorum inter se. Nam si proponantur duæ lineæ mediales, cùm assignatione suorum numerorũ, quorum multiplicatio inter se faciat numerum medialem quadrate, id quod est lineas ipsas continere superficiem medialem, non statim certus sum de propositis lineis, quòd sint portiones lineæ bimedialis

bimedialis secundæ, eò quòd mediales lineæ, medialem constituentes lineam, etiam contineant superficiem medialem. Oportebit ergo me rem ulterius explorare diuisione unius per reliquum, & si sic etiam prouenerit quotiens medialis quadrate, tunc tandem certus sum, mihi fuisse propositas lineas quæ constituant bimedialem secundam: ut $\sqrt{\frac{1}{8}}216$ & $\sqrt{\frac{1}{8}}384$, multiplicatione sua inter se faciunt $\sqrt{\frac{1}{8}}288$. & diuisione maioris per minorem, faciunt $\sqrt{\frac{1}{8}}1\frac{1}{2}$. Certus igitur iam sum numeros istos constituere bimedialem secundum. Vnde in propositionibus capitis huius non superabundat particula hæc, potentia tantum commẽsurabilis, sed superabundat in propositionibus capitis præcedentis.

Propositio prima capitis huius, quæ apud Theonem est 29. à Campano autem neglecta est.

¶ Duas lineas inuenire mediales potentia tantum commensurabiles, quæ superficiem contineant medialem.

Hoc est, inuenire portiones lineæ bimedialis secundæ. De talibus uero lineis erit hoc caput, cum constituant speciem irrationalium linearum quartam apud Euclidem. Satis autem paulo superius dixi, ut hæc particula propositionis (potentia tantum commensurabilis) superfluat quidem in propositionibus capitis superioris: in propositionibus uero capitis huius non superfluat.

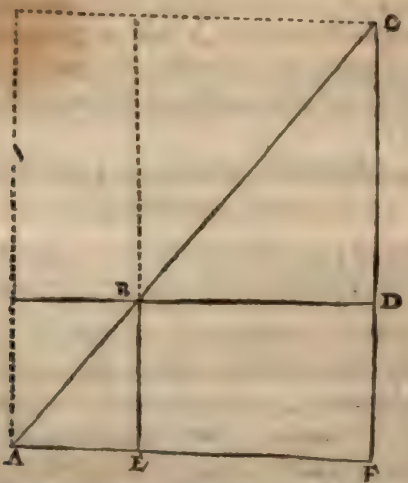
Pro inuentione autẽ linearum huiusmodi, obseruanda uenit hæc medialium conditio.

¶ Si fuerint quatuor lineæ mediales ad inuicem proportionales, fuerintq; duæ mediales priores tales, ut constituant bimedialem primam: duæ uero mediæ mediales, tales sint, ut constituant bimedialem ab Euclide non receptã intra suas species, necesse est ut duæ mediales posteriores, constituant bimedialem secundam.

Iuxta hæc recipio duas portiones bimedialis primæ, pro

duobus terminis regulæ De tri, & pro tertio termino recipio medialem, quæ ad secundam sit incommensurabilis utroq; modo, id est, & potẽtia & longitudine, atq; ita per regulam De tri (id est, per decimam sexti) quæro terminũ quartum. Et erunt duo termini posteriores lineæ tales, quæ constituant bimedialem secundam.

Figura inuentionis huius.



Vt si pro A E recipias $\sqrt{\sqrt{108}}$, & pro E F recipias $\sqrt{\sqrt{192}}$, & pro A B recipias $\sqrt{\sqrt{216}}$, tunc pro B C ueniet $\sqrt{\sqrt{384}}$.

Scilicet,

A E dat B D (seu E F) ergo A B dat B C.

Hoc est,

$\sqrt{\sqrt{108}}$. $\sqrt{\sqrt{192}}$. $\sqrt{\sqrt{216}}$. $\sqrt{\sqrt{384}}$.

Itaq; linea A C, id est, $\sqrt{\sqrt{216}}+\sqrt{\sqrt{384}}$, erit bimediale secundũ. Sunt enim portiones eius commensurabiles potentia tantum, constituuntq; superficiem medialem, si ad angulum rectum coniungantur.

Propositio

Propositio capitis huius secunda, quæ apud Campanum est 32.

¶Si duæ lineæ mediales potentia tantum commensurabiles, superficiem cp medialem continẽtes, directe coniungantur, tota linea erit irrationalis, dicetur cp bimediale secundũ.

Repetit ista propositio descriptionem bimedialium secundarum, atcp usum ostendit inuentionis illius quam præcedens propositio requirit. Scilicet præcedens requirit partes materiales linearum bimedialium secundarum, ideo sequitur hæc recto ordine, quæ doceat inuentas partes directe componere, atque ita bimediales primas fabricare. Vt si ex A B & B C superioris figuræ, fiat A C.

Propositio capitis huius tertia, quæ apud Campanum est 38.

¶Bimediale secundum, nisi in duas lineas tantum, sub termino suo diuidi non potest.

Sicut præcedens propositio loquitur de compositione bimedialis secundæ, ex suis partibus materialibus: ita hæc propositio loquitur de resolutione lineæ bimedialis in suas partes illas materiales. Scilicet quælibet linea bimedialis, duas solũmodo partes habet materiales, quæ sub hoc termino sint, quem habet propositio præcedens: uidelicet quæ sint commensurabiles potentia tantum, contineantcp superficiem medialem, quales partes sunt hæ, $\sqrt{288}216$. $\sqrt{288}384$. constituentes hanc lineam bimedialem $\sqrt{288}384 + \sqrt{288}216$. Itacp non potest diuidi illa linea bimedialis secunda, nisi tantum in duas lineas illas $\sqrt{288}216$, & $\sqrt{288}384$. Præter has, inquam, partes, non habet bimedialis data alias, quæ sint incommensurabiles potentia tantum, constituentes medialem superficiem.

Propositio capitis huius quarta, quæ apud Campanum est neglecta: quamuis enim eam ponat, tamen non dignatur eam numero ordinis. Apud Theonem tamen est trigesima secunda.

¶ Duas lineas inuenire mediales, potentia tantum commensurabiles, superficiemq; medialem continentes, quarum longior breuiore, tanto amplius possit, quantũ est quadratũ alicuius linee, ipsi longiori in longitudine cõmensurabilis.

Hoc est, inuenire lineam bimedialem secundam, quæ contineatur sub priore specie bimedialium secundarum. Quemadmodum enim bimediales primæ, subdiuiduntur in duas alias species, uidelicet in speciem bimedialium primarum priorem, & in speciem bimedialium primarum posteriorem: sic bimediales secundæ, subdiuiduntur in bimediales secundas prioris speciei, & in bimediales secundas posterioris speciei.

Inuentionis huius modus est ille, quem posui circa propositionem capitis huius primam. Attamen oportet ut duæ priores mediales faciant bimedialem primam prioris speciei, tunc enim (si tertiam receperis medialem, quæ secundæ mediali sit incommensurabilis longitudine & potentia) quarta inuenta per regulam De tri, seu per decimam sexti, componet cum ipsa tertia, lineam bimedialem secundam, speciei prioris, id est, lineã talem, ut respondeat propositioni huic quam nunc tracto.

Recipe igitur exemplum superius positum, circa propositionem capitis huius primam. Scilicet pro A E recipe $\sqrt{\sqrt{108}}$, & pro E F recipe $\sqrt{\sqrt{192}}$. Constituunt autem illæ duæ positæ lineæ, lineam bimedialem primam, speciei prioris. Vnde si receperis pro tertia linea (id est, pro A B) $\sqrt{\sqrt{216}}$, quæ ad priores duas, utroq; modo est incommensurabilis (si enim ad unam, etiam ad alteram &c.) oportet ut tertia illa recepta, quartaq; illa inueniẽda (hoc est, A B & B C) constituant bimedialem secundam speciei prioris. Nam iuxta elementarem secundam, oportet ut quarta illa, id est B C seu $\sqrt{\sqrt{384}}$, potentior sit quàm A B seu $\sqrt{\sqrt{216}}$, quantum est quadratum lineæ commensurabilis ipsi $\sqrt{\sqrt{384}}$ in longitudine, cum duæ priores sint tales, scilicet $\sqrt{\sqrt{192}}$ potentior est quàm sit $\sqrt{\sqrt{108}}$, quadrato lineæ commensurabilis ipsi $\sqrt{\sqrt{192}}$ in longitudine &c.

Propo

Propositio capitis huius quinta, quæ apud Campanum est 26.

¶ Duas lineas inuenire potentia tantum commensurabiles, superficiemq; medialem continentes, quarũ longior breuiore tanto amplius possit, quãtum est quadratum alicuius lineæ incommensurabilis ipsi longiori in longitudine.

Et hoc est inuenire lineam subspeciei posterioris bimedialium secundarum. Modus inueniendi satis est expositus circa propositionem præcedentem. Oportet autem ut duæ lineæ mediales (per quas duæ illæ inueniuntur) sint tales, quæ constituant bimedialem primam posterioris speciei: sic enim fiet, ut duæ mediales inueniendæ, component bimedialem secundam posterioris subspeciei.

Vt si pro A E recipias $\sqrt{\sqrt{54}}$, & pro E F seu pro B D recipias $\sqrt{\sqrt{1944}}$, & pro A B recipias $\sqrt{\sqrt{108}}$: oportebit ut pro B C cuentur recipienda $\sqrt{\sqrt{3888}}$. Cum igitur priores duæ, id est $\sqrt{\sqrt{54}}$ & $\sqrt{\sqrt{1944}}$, contineant superficiem rationalem, uidelicet 18, necesse est duas posteriores (scilicet $\sqrt{\sqrt{108}}$ & $\sqrt{\sqrt{3888}}$) continere superficiem medialem, eò quòd tertia, id est $\sqrt{\sqrt{108}}$, duabus prioribus incommensurabilis sit utroq; modo. Item necesse est, per elementarem secundam, ut duæ posteriores sint potentia tantum commensurabiles, & maior tanto amplius possit quàm minor, quantum facit quadratum lineæ incommensurabilis ipsi maiori in longitudine, hoc inquam necesse est, eò q; duæ priores mediales sint tales.

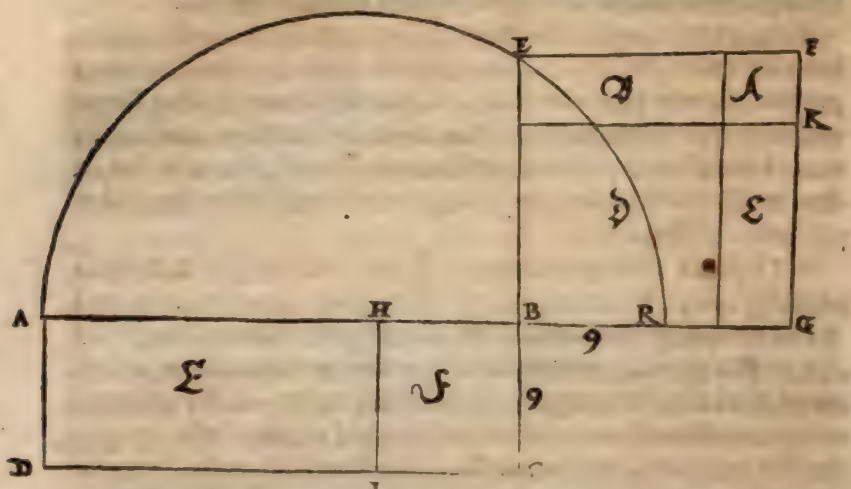
Propositio capitis huius sexta, quæ apud Campanum est 50.

¶ Si fuerit superficies binomio tertio, ac linea rationali in longitudine contenta, linea in eam potens erit bimediale secundum.

Hac propositione significatur modus alius à superiore illo, propositionis primæ capitis huius, quo inueniantur lineæ bimediales secundæ.

Si

Si enim fuerit superficies binomialis tertia, necesse est radicē eius quadratam (ea est linea potens in binomialem tertiam) esse lineam bimedialem secundam. Necesse etiam est, ut superficies contenta sub linea longitudine rationali una, altera q̄ binomiali tertia, sit binomialis tertia; ut in superioribus ostendi.



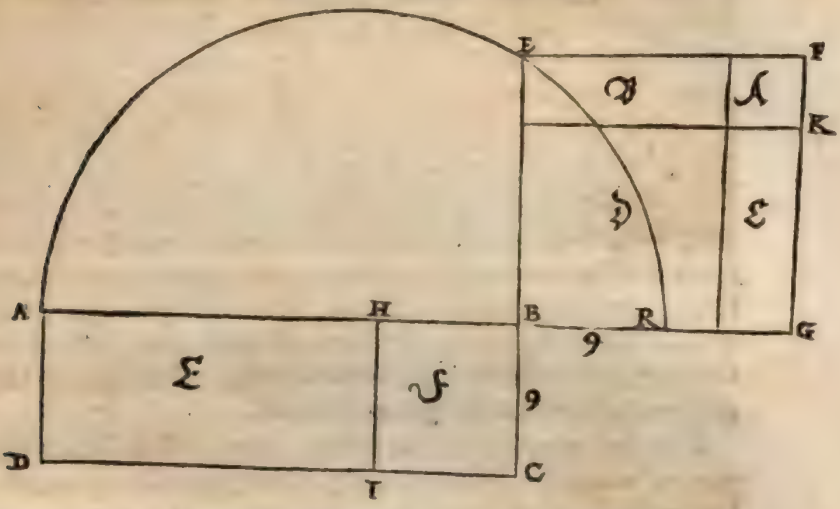
Vt si A B faciat $\sqrt{8}27+\sqrt{8}24$, & B C faciat 8, faciet superficies A B C D $\sqrt{8}1728+\sqrt{8}1536$, quā oportet esse superficiem binomialem tertiam, eò quòd numero eius commensurabilis sit numerus lateris eius irrationalis. Vnde medium proportionale inter A B & B C, id est B E, erit linea bimedialis secunda, eò q̄ possit superficiem æqualem superficiei A B C D.

Propositio capitis huius ultima, quæ apud Campanum est 56.

¶ Cum adiuncta fuerit linee in longitudine rationali superficies rectangula, equalis quadrato bimedialis secundi, latus eius secundum binomium tertium esse necesse est.

Hæc est conuersa præcedentis. Vnde sicut præcedens docet radicem

radicem quadratam extrahendam de binomio tertio, esse lineam bimedialem secundam: ita haec signat multiplicatione bimedialis secundi in se, produci binomium tertium.



Scilicet linea BE potest superficiem EFGB, compositam ex BA & DC. Cum igitur BE facit $\sqrt{8768}+\sqrt{8192}$, facit superficiei quadratae pars, BA, $\sqrt{8384}+\sqrt{8192}$, & pars eius DC facit $\sqrt{8768}+\sqrt{8384}$. Et licet utraq; earum sit binomialis sexta, tamen ad se additae, ita ut sub linea rationali in longitudine contineantur, tanquam sub latere uno, facient ambae partes sic compositae, binomialem superficiem tertiam. Nam latus alterũ erit linea binomialis tertia, ut necesse sit superficiem illam etiam esse binomialem tertiam.

De propositionibus Euclidis tractantibus lineas maiores, quæ constituunt speciem irrationalium linearum suarum quintam. Caput XX.

SVPERIORES species linearum compositarum tales sunt, ut partes compositionis earum, seu materiales, sint simplices. Sequentium uero species linearum compositarum omnes, habent partes materiales compositas: scilicet quælibet linea contenta sub specie aliqua sequentium, duas habet partes compositionis, quarum una est linea quadrati habentis additum, mediante signo additorum; & altera est linea quadrati habentis subtractum, mediante signo subtractorum. ut uidebis in exemplis propositionum specierum illarum.

Harum autem specierum prima, continet sub se lineas quæ uocantur maiores, & tales lineæ possunt superficiem binomialem quartam, ut uidebimus.

Propositio capitis huius prima, quæ apud Campanum est 27.

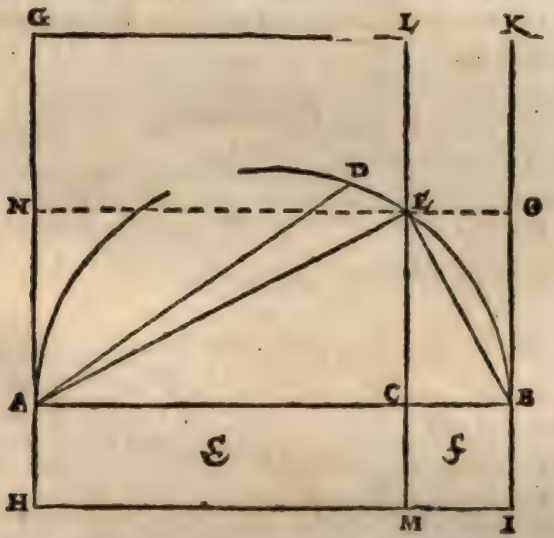
DUas lineas inuenire potentia incommensurabiles, superficiemq; medialem continentes, quarũ quadrata pariter accepta sint rationale.

Hoc est, inuenire partes duas materiales, componentes lineam maiorem.

Modũ inuentionis huius deducit Campanus ex elementari quarta, hoc modo: Ipse recipit duas lineas elemẽtaris quartæ, (ut figura folio 156 ostendit) longiorem & breuiorem, componentes binomialem ordinis secundi, id est, aut binomialẽ quartam, aut quintam, aut sextam.

Vt

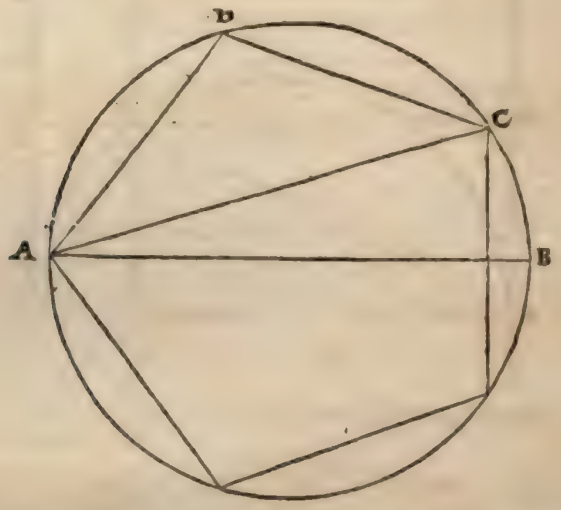
Vt si AB longior faciat 12, & AD breuior faciat $\sqrt{\frac{3}{4}}96$. Sit autem AB diuisa in AC & CB (faciente AC $6+\sqrt{\frac{3}{4}}12$, & CB faciente $6-\sqrt{\frac{3}{4}}12$) sic enim medium proportionale CE inter AC & CB faciet $\sqrt{\frac{3}{4}}24$, cuius dupla sit linea elementaris breuior $\sqrt{\frac{3}{4}}96$. Iam si feceris duo quadrangula altera parte longiora, quorū maius contineatur sub AC atq; medio ꝓportionali CE, alterum uero quadrangulum contineatur sub eodem medio proportionali atq; sub CB, tunc ambæ lineæ diagonales duorū quadrangulorum illorum, componūt lineam maiorem, suntq; illæ lineæ, quæ respondeant propositioni huic nostræ primæ. Vnde hæc erit figura exempli ꝓpositionis huius, quæ sequitur.



Cum igit AD faciat $\sqrt{\frac{3}{4}}96$, faciet CE $\sqrt{\frac{3}{4}}24$. Et AC, $6+\sqrt{\frac{3}{4}}12$, & CB faciet $6-\sqrt{\frac{3}{4}}12$. Quare AE faciet $\sqrt{\frac{3}{4}}.72+\sqrt{\frac{3}{4}}1728$. Et EB faciet $\sqrt{\frac{3}{4}}.72-\sqrt{\frac{3}{4}}1728$. Itaq; AE & EB sunt lineæ inuentæ iuxta propositionem præsentem. Sunt enim potentia incommensurabiles, quemadmodum omnes lineæ quæ sub diuersis

ſpeciebus linearum irrationalium tredecim illarum inueniuntur. Et cõtinent ſuperficiem medialem huius numeri $\sqrt{\ }3456$, Et quadrata pariter accepta, componunt ſuperficiem numeri huius 144. Quod eſt quadratum G H I K, cuius radix quadrata eſt A B, ſeu H I. Ex quo ſequitur quadratum lineæ E B, æquari quadrangulo L K I M. Et quadratum lineæ A E, æquari quadrangulo G L M H. Sequitur ulterius, lineam A E eſſe medium proportionale inter G H & H M. Item lineam E B eſſe medium proportionale inter K I & I M.

Item ſi circulo (diametrum habenti rationalem) inſcribatur pentagonus æquiangulus, tunc latus unum pentagoni illius cum linea ſubtenſa uni angulorum reſpondebunt propoſitioni noſtræ præſenti.



Vt ſi A B diameter faciat 24, faciet latus A D $\sqrt{\ }.360-\sqrt{\ }25920$: & linea A C faciet $\sqrt{\ }.360+\sqrt{\ }25920$. Sunt igitur lineæ C A & A D, quales requirit propoſitio capitis huius prima.

Propoſitio

Propoſitio capitis huius ſecunda, quæ apud Campanum eſt 33.

¶ Cum coniuncte fuerint due linee potentialiter incõmenſurabiles, ſuperficiemq; bimedialem continentes, quarum ambo quadrata pariter accepta ſint rationale, tota linea erit irrationalis, dicturq; linea maior.

Hoc eſt quod ſuperius dixi, partes, quales hic deſcribuntur, componere lineam maiorem. Vt ſi ex latere pentagoni, A D & ex A C linea angulo pentagoni ſubtenſa, fiat una linea, erit ipſa linea maior. Sic A E & E B figuræ nunc poſitæ, componunt lineam maiorem.

Vt ſi A C faciat $\sqrt{\text{ɣ}}45+3$, & C B faciat 3, tunc faciet C E 6, & A E faciet $\sqrt{\text{ɣ}}.90+\sqrt{\text{ɣ}}1620$, & E B faciet $\sqrt{\text{ɣ}}.90-\sqrt{\text{ɣ}}1620$. Et ſi ex A E & E B fiat una linea, tunc ipſa faciet $\sqrt{\text{ɣ}}.180+\sqrt{\text{ɣ}}25920$. Modum additionis huius uide ſuperius capite libri huius duodecimo.

Quælibet igitur linea maior componitur ex linea una maiore, & ex altera quæ uocatur minor. De lineis autem minoribus infrà ſuo loco dicam.

Propoſitio capitis huius tertia, quæ apud Campanum eſt 39.

¶ Linea maior, niſi in duas lineas tantum, ex quibus conſtat, ſub earum termino diuidi non poteſt.

Quemadmodum propoſitio præcedēs fuit de compoſitione lineæ maioris, ex partibus compoſitionis ſuæ materialibus: ita hæc propoſitio eſt de reſolutione lineæ maioris, in partes compoſitionis ſuæ. Quælibet igitur linea maior, reſoluitur in unam aliam lineã maiorẽ, & in alteram q̃ uocetur linea minor.

Vt ſi A C & C B (ſicut uides in figura proxime data) faciant $\sqrt{\text{ɣ}}24+\sqrt{\text{ɣ}}12$, & $\sqrt{\text{ɣ}}24-\sqrt{\text{ɣ}}12$, tunc C E faciet $\sqrt{\text{ɣ}}12$, & A E faciet $\sqrt{\text{ɣ}}.48+\sqrt{\text{ɣ}}1152$, & E B faciet $\sqrt{\text{ɣ}}.48-\sqrt{\text{ɣ}}1152$. Si autem ex A E & E B fiat una linea, tunc ipſa faciet $\sqrt{\text{ɣ}}.96+\sqrt{\text{ɣ}}4608$.

Non autem diuidi potest seu resolui $\sqrt{\frac{1}{8}}.96+\sqrt{\frac{1}{8}}4608$ in duas alias partes suas, quæ sint potentia incommensurabiles, contineantq; superficiem medialem, atque earum quadrata ad se addita faciant superficiem rationalem, nisi tantum in duas illas, $\sqrt{\frac{1}{8}}.48+\sqrt{\frac{1}{8}}1152$, & $\sqrt{\frac{1}{8}}.48-\sqrt{\frac{1}{8}}1152$, ex quibus constat. Præter has inquam partes duas, impossibile erit alias duas inuenire lineas aut partes, quibus conueniat prædictus terminus seu p̄dicta descriptio, in quas resolui possit $\sqrt{\frac{1}{8}}.96+\sqrt{\frac{1}{8}}4608$, aut ex quibus ipsa constet.

De resolutione autem huiusmodi linearum, consule capita libri huius decimum & duodecimum.

Propositio capitis huius quarta, quæ apud Campanum est 51.

¶ Si linea rationali in longitudine binomio q̄ quarto superficies contineatur, linea que in eam potest superficiem, est linea maior.

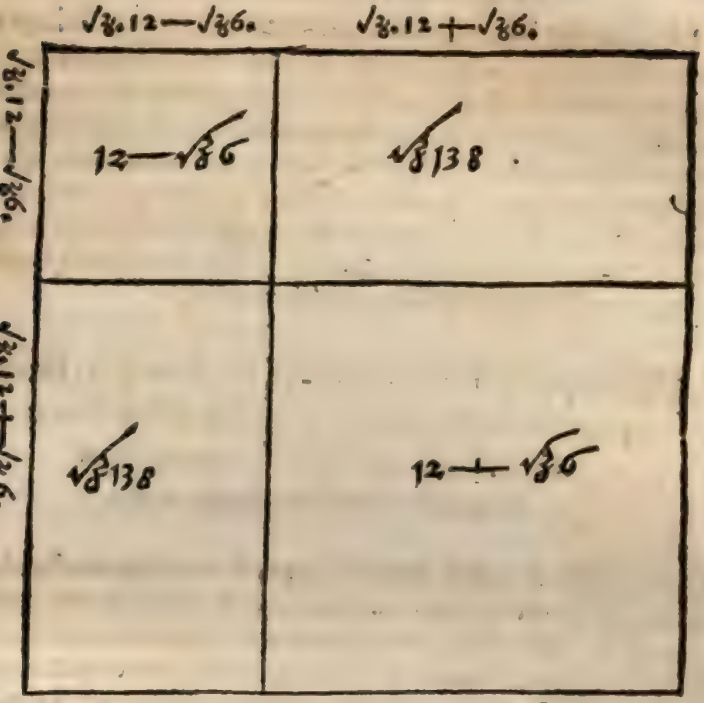
Hic significatur alia ratio inueniendi lineas maiores. Posita enim superficie binomiali quarta, erit radix eius quadrata linea maior. Vnde si superficies binomialis quarta, contineatur sub duobus lateribus, quorū unum sit linea in longitudine rationalis, & alterum sit binomium quartum, tunc medium proportionale inter duo latera illa, erit linea maior.

Propositio capitis huius quinta, quæ apud Campanum est 57.

¶ Si linee in longitudine rationali adiungatur rectangulum æquum quadrato linee maioris, erit alterum latus eius binomium quartum.

Hæc est conuersa præcedentis. Docet igitur ex ductu lineæ maioris, fieri superficiem quadratam, cuius numerus sit binomialis quartus, ideoq; reduci possit in altera parte longiorem, cuius unum latus cōmensurabile sit cum superficie ipsa: quod cum ita fit, necesse erit alterum latus esse in longitudine rationale. Hæc omnia facile uides ex figura sequenti.

Ex



Ex hac figura etiam pulchre apparent, ea quæ dicta sunt in propositionibus duabus primis huius capitis: uidelicet particulæ, quibus describuntur lineæ componẽtes lineam maiorem materialiter, pulchre hic depinguntur.

Propositio capitis huius ultima, quæ est apud Campanum 62.

QUelibet linea commensurabilis lineæ maiori, est et ipsa linea maior.

Vt si diameter circuli alicuius sit linea maior, necesse est latus hexagoni circulo illi inscribendi, esse lineam maiorem &c.

Signi-

Significatur hac propositione, lineam maiorem habere partes alias præter eas, quas primis duabus propositionibus capitis huius descripsit. Sed cum illæ partes prædictæ atq; descriptæ, dicantur partes materiales, possunt partes illæ (de quibus uidetur hæc præsens propositio docere) uocari partes ipsi toti commensurabiles. Deinde etiam sunt aliæ partes eius, quæ uocari possint partes instrumentales: sed illæ partes non intrant compositionem linearum, quarum partes uocantur. Sed hæc pertinent ad propositiones duas superiores.

De propositionibus Euclidis tractantibus lineas potentes mediale & rationale: & hæ lineæ constituunt speciem irrationalium linearum sextam. Cap. XXI.

VNA hæc species, quam hoc capite tractabimus, dicitur species linearum potentium rationale & mediale: cum tamen duæ sint tales, uidelicet species linearū maiorum, & hæc species quā nunc tractabo. Scilicet hæc est linea maior, $\sqrt{\frac{1}{2}}.12+\sqrt{\frac{1}{2}}6$: ea potest superficiem hanc, $12+\sqrt{\frac{1}{2}}6$. id est, potest rationale hoc 12, & mediale hoc $\sqrt{\frac{1}{2}}6$. Hæc uero linea, $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}12+2$, pertinet ad caput hoc præsens, uocaturq; potens rationale & mediale, eò quòd possit hanc superficiem $\sqrt{\frac{1}{2}}12+2$, id est, potest rationale hoc 2, & mediale hoc $\sqrt{\frac{1}{2}}12$.

Poterat autem hoc discrimen seruari, ut lineæ prioris speciei uocarentur Potentes rationale & mediale: huius uero speciei lineæ uocarentur Potentes mediale & rationale. Sed placere nobis debet ueterum autoritas, qua factum est, ut lineæ speciei prioris uocatæ sint lineæ maiores, & iam liberum sit lineas huius alterius speciei uocare indifferenter Potentes mediale & rationale, aut potentes rationale & mediale.

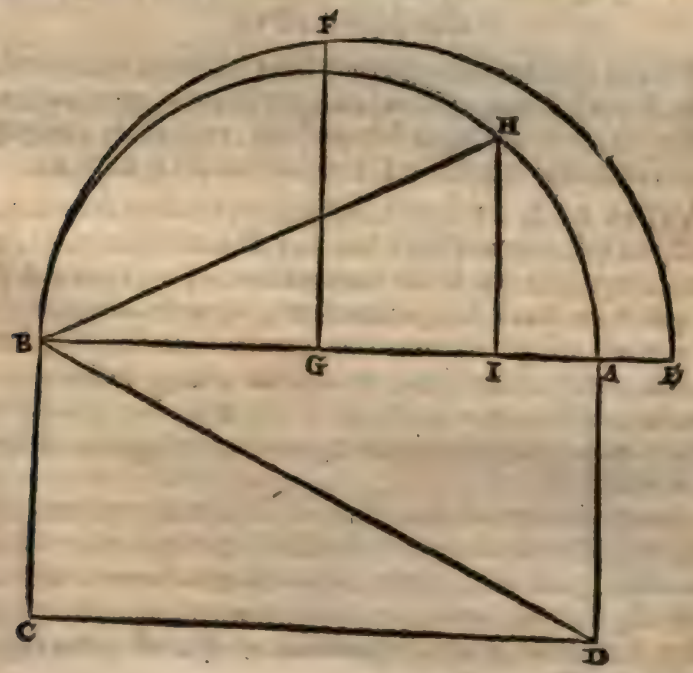
Prima

Prima propositio capitis huius, est apud Campanum 28, hæc ita proponit:

¶ Duas lineas inuenire potentia incommensurabiles, superficiemq; rationalem cõtinentes, quarum ambo quadrata pariter accepta sint mediale.

Hoc est, inuenire partes materiales componentes lineas speciei huius sextæ, linearum irrationalium, quas uocamus specialiter Potentes rationale & mediale, sicut paulo superius dixi.

Recipe quadrangulum rectangulum cõtentum sub duabus lineis longitudine rationalibus, proportionemq; duplam ad inuicem habentibus (ut uides quadrangulum A B C D contentum sub A B & B C) lineam autem longiorem produc ad men-



ſuram lineæ diagonalis quadranguli illius (ut B E ſit æqualis B D) Deinde erige duo media proportionalia, à linea B E, unum à medio puncto lineæ A B, quæ ſit medium proportionale inter B G & G E, & alterũ medium proportionale erigatur à medio puncto lineæ G E, quæ mediet proportionaliter inter B I & I A.

Sit linea A B, 12: & erit B C, 6.

Lineæ autem quas requirit propoſitio, ſunt B H & G F. Facit autem B H, $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}6480+36$: & G F facit, $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}6480-36$.

Hæc inuentio nunquam te fallet, rationem poſtea dicam.

Numeri reliquarum linearum.

B G facit 6. G E facit $\sqrt{\frac{1}{2}}180-6$.

B I facit $\sqrt{\frac{1}{2}}45+3$. I A facit $9-\sqrt{\frac{1}{2}}45$.

Propoſitio capitis huius ſecunda, quæ apud Campanum eſt 34.

¶ Cum coniunctæ fuerint duæ lineæ potentia incõmenſuræ bilæ, ſuperficiemq; rationalem continentes, quarum ambo quadrata pariter accepta ſint mediale, tota linea compoſita erit irrationalis, dicturq; Potens rationale et mediale.

Vt ſi ex B H & G F, ſuperioris figuræ proximæ, feceris unam lineã, erit ipſa potens rõnale hoc 144, & mediale hoc $\sqrt{\frac{1}{2}}25920$, cum compoſitio illa faciat lineam hanc, $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}25920+144$. Et quia linea illa eſt ſemper medium proportionale inter A B D & A B, hoc eſt, ipſa eſt linea quadraturæ ſuperficiei binomialis quintæ, cõtentæ ſub linea A B rationali in longitudine, & linea binomiali quinta compoſita ex D B & B A, ideo per quartam capitis huius propoſitionem oportet ut ſit potens rationale & mediale.

Campani autem demonſtratio (ſalua reuerentia tanti uiri) non eſt ſolida, id quod exemplis ſatis patet quæ dabo. Campanus enim, dum docet inuenire lineam potentem rationale & mediale, recipit lineas iuxta elementarem quartam, tribuitq; lineæ A C partes, quales requirit ſua 25, quæ eſt ſexta cap. 18. libri huius, &c.

hoc est, in potentem rationale & mediale, atq; in componentem mediale cum rationali. Et hæ duæ partes sunt sub termino quē habent superiores duæ propositiones, id est, sunt potētia incommensurabiles, & superficiem rationalem cōtinent, & quadrata earum pariter accepta sunt mediale.

Item $\sqrt{\sqrt{864}+24}$, est certe potēs rationale & mediale. Hæc diuiditur in $\sqrt{\sqrt{216}+\sqrt{72}}$, & $\sqrt{\sqrt{216}-\sqrt{72}}$. Hoc & in potentem duo medialia, & in componentem mediale cum mediali. Nihilominus tamen partes hæ sunt sub termino, qualem describunt propositiones duæ superiores capitis huius.

Qua in re considerandum est, ut species hæc potentium rationale & mediale, subdiuidatur in duas species, quarum prior contineat lineas resolubiles in duas partes se componentes, quarum longior maneat sub specie hac potentium rationale & mediale: ut est $\sqrt{\sqrt{6480}+36}$. Posterior uero contineat lineas resolubiles in duas partes se componētes, quarum maior non maneat sub specie hac, sed transeat in speciem linearum potentium duo medialia, de quibus erit caput sequens: ut est, $\sqrt{\sqrt{864}+24}$.

Regulæ.

Vtriusq; uero speciei numeri facile reperiuntur.

Primæ speciei numeri sic inueniunt. Recipe duos numeros quadratos, qui additi ad se faciant numerum non quadratum. Illum igitur numerum non quadratum recipe pro prima particula exempli, præposito illi signo radicali zensico. Pro secunda particula recipe radicem quadratā alterius ex duobus reliquis quadratis: ut 36 & 9, faciunt 45 &c. Itaq; $\sqrt{\sqrt{45}+3}$, & $\sqrt{\sqrt{45}-3}$, componunt potentem rationale & mediale prioris speciei, uidelicet $\sqrt{\sqrt{180}+12}$.

Secundæ speciei numeri sic inueniuntur. Recipe duos numeros, quorum alter sit quadratus, & reliquus sit non quadratus, qui additi ad se, faciant numerum non quadratum. Illum igitur ex aggregatione prouenientem, recipe pro prima particula

exempli, præposito illi signo radicali zensico. Pro secunda particula recipe numerum non quadratum illum, qui prius ad quadratum addebatur, eíq; idem signum præpone &c. Vt 234 ad 144, faciunt 378. Itaq; $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}378+\sqrt{\sqrt{}}234$, & $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}378-\sqrt{\sqrt{}}234$, componunt potentē rationale & mediale posterioris speciei, uidelicet $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}1512+24$.

Propositio capitis huius quarta, quæ apud Campanum est 52.

¶ Si fuerit superficies linee rationali atque binomio quinto contenta, linea que in eam potest, conuincitur esse potens mediale et rationale.

Exemplum huius ostensum est superius circa propositionē capi. huius 2. ex figura propositionis primæ capitis huius.

Scilicet linea figuræ illius A B D est binomium quintum, faciens $12+\sqrt{\sqrt{}}180$. Si igitur ex A B & B D fiat una linea recta, eíq; coniungatur ad angulum rectum linea alia æqualis lineæ A B, tunc fiet superficies binomialis quinta, faciens $\sqrt{\sqrt{}}25920+144$. Huius igit̄ radix quadrata facit $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}25920+144$. hoc est, potentem rationale & mediale, ut est linea composita ex B H & G F, illius figuræ prædictæ.

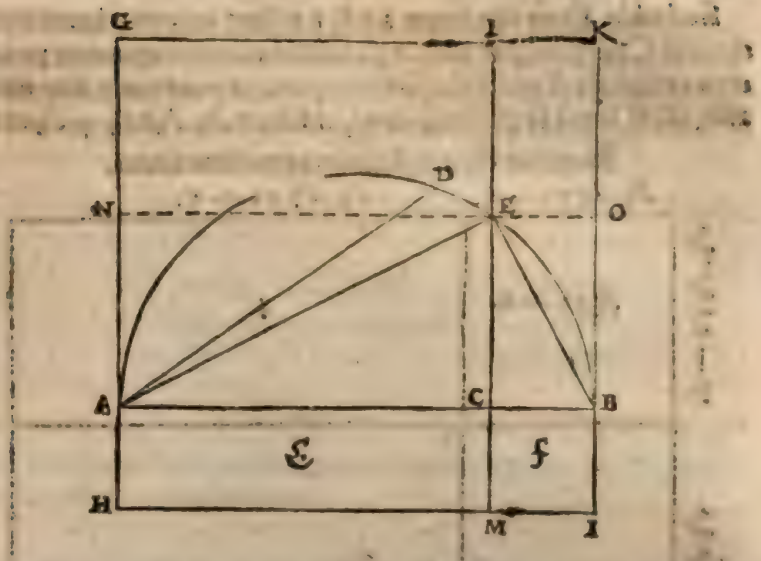
Itaq; hac propositione docet Euclides optimum atq; certissimum modum inueniendi lineas potentes rōnale & mediale.

Propositio capitis huius quinta, quæ apud Campanum est 58.

¶ Si linee in longitudine rōnali adiungatur quadrangulū altera parte lōgius, qđ sit equale quadrato linee potētis rōnale et mediale, alterū latus eius binomiū quintū esse necesse est.

Hæc est conuersa præcedentis, docens quadratum lineæ potentis rationale & mediale, posse redigi in superficiem binomialem quintā: quod fit, dum ad ipsam lineā quadrati illius (id est ad lineam potētem rationale & mediale) inueniunt̄ duæ lineæ (tanquā ad medium proportionale) extremæ, quarum una sit longitudine rationalis, & altera sit binomialis quinta.

Vt

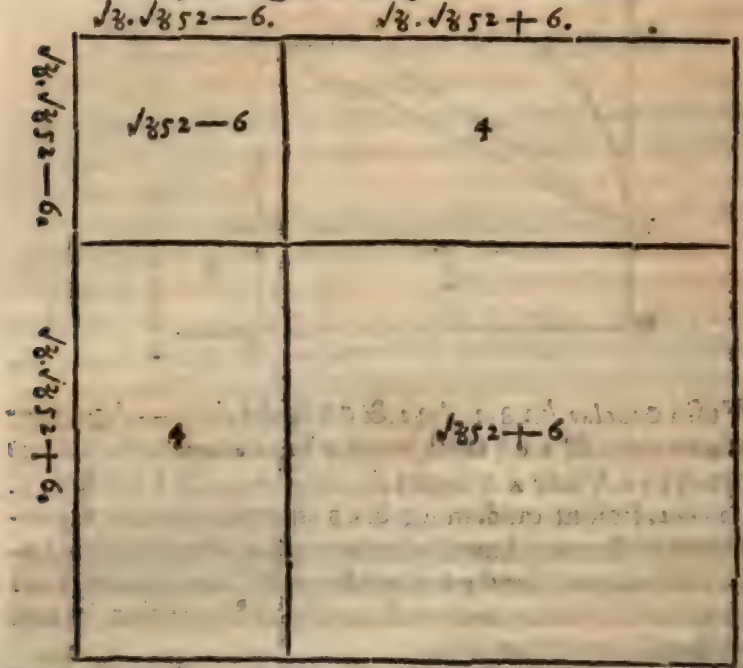


Vt ſi A C faciat $\sqrt{\sqrt{8}}+\sqrt{\sqrt{2}}$, & C B faciat $\sqrt{\sqrt{8}}-\sqrt{\sqrt{2}}$, tunc C E faciet $\sqrt{\sqrt{2}}$, & A D (id eſt, breuior linea elemẽtaris quartæ) faciet $\sqrt{\sqrt{32}}$. Vnde A E faciet $\sqrt{.}\sqrt{32}+4$: & E B faciet $\sqrt{.}\sqrt{32}-4$. Et ſunt quidem A E & E B lineæ reſpondentes propoſitioni noſtræ atq; ſuperiori, quæ requirit inuentionem huiuſmodi linearum: fiuntq; hoc modo multa, imo innumera exempla. Sed iſta inuentio non eſt conſtans & perpetua, ut iam oſtendam ſequenti exemplo.

Recipiatur enim pro A C $\sqrt{\sqrt{54}}+\sqrt{\sqrt{24}}$ (reſpondent autẽ particulæ $\sqrt{\sqrt{54}}$ & $\sqrt{\sqrt{24}}$ propoſitioni Campani 25, id eſt, ſextæ capitis 18, æque ut hæ duæ, $\sqrt{\sqrt{8}}$, & $\sqrt{\sqrt{2}}$, quæ ſunt particulæ exempli proximi ſuperioris &c.) & pro C B recipienda uenit $\sqrt{\sqrt{54}}-\sqrt{\sqrt{24}}$, atq; ita pro A D (id eſt, breuiore linea exempli elementaris quartæ) prouenit $\sqrt{\sqrt{96}}$, cum pro C E (id eſt, medio proportionali inter A C & C B) prouenit $\sqrt{\sqrt{6}}$. Itaq; A E faciet $\sqrt{.}\sqrt{3216}+12$; & E B, $\sqrt{.}\sqrt{3216}-12$ faciet,

Sed uide. Duæ illæ lineæ A E & E B, sunt inuentæ iuxta traditionem Campani, per omnia, & tamen non componunt potentem rationale & mediale, sed componunt potentem duo media alia (id est, lineã sequẽtis speciei, uidelicet $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}864+\sqrt{\sqrt{}}288$.

Sequitur figura descriptarum linearum.



Sed figura hæc, atq; similes, satis declarantur superius cap. 12.

Propositio capitis huius tertia, quæ apud Campanum est 40.

¶ Linea potens rationale et mediale, nisi in lineas duas tantum sub termino earum non diuiditur.

Vt $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}6480+36$, est potens rationale 36, & mediale $\sqrt{\sqrt{}}6480$. Ea diuiditur in $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}1620+36$, & $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}1620-36$.

hoc

Vt si ad lineam compositam ex B H & F G (figuræ primæ propositionis capitis huius) inueniantur duæ illæ, prima A B, secūda A B D; uel illa prima B C, & illa secūda A B D duplicata &c.

Propositio capitis huius ultima, quæ est apud Campanum 63.

¶ Si aliqua linea cōmensurabilis fuerit linee potēti rōnale et mediale, ipsa comprobatur esse potens rōnale et mediale.

Vt data linea potente rationale & mediale, erit etiam potēs rationale & mediale, eius pars dimidia, pars tertia, quarta, quinta &c. Item eius dupla, tripla, quadrupla, quintupla &c. Item partis eius tertiæ, dupla, tripla &c.

Docet igitur hæc propositio ex una linea speciei huius, formare infinitas lineas eiusdem speciei, uidelicet per multiplicationem uel per diuisionem.

De propositionibus tractantibus lineas irrationales septimæ speciei, quæ sunt potentes duo medialia. Cap. XXII.

INIT hæc species linearum potentium duo medialia, species linearum compositarum. Diuidaturq; species hæc in duas subspecies, quemadmodum illa superior, de qua dixi in capite p̄cedenti.

¶ Primo enim sunt quædam lineæ potētes duo medialia, quæ resoluuntur in partes compositionis suæ, ita ut longior earum maneat sub hac specie, ut linea numeri huius $\sqrt{\sqrt{256}+\sqrt{32}}$, resoluit in $\sqrt{\sqrt{14}+\sqrt{6}}$ & $\sqrt{\sqrt{14}-\sqrt{6}}$: manet autem longior (id est, $\sqrt{\sqrt{14}+\sqrt{6}}$) sub hac specie, id est, etiam est potens duo medialia.

¶ Secundo sunt quædam lineæ potētes duo medialia, quæ resoluuntur in partes compositionis suæ, quarum longior non maneat

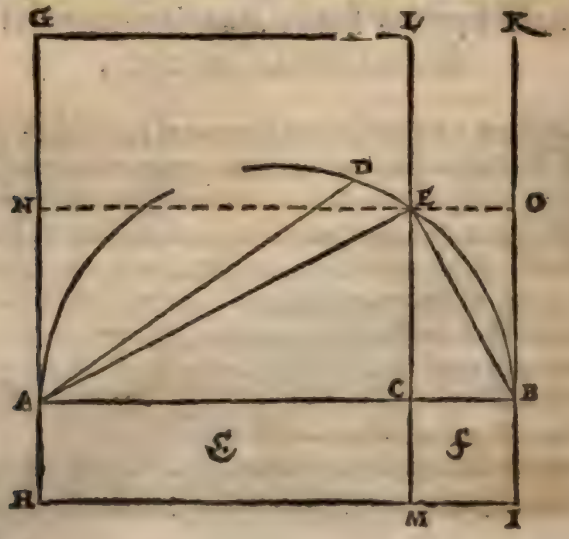
maneat sub specie hac, sed transeat ad speciem præcedentis capitis: ut $\sqrt{\sqrt{8}.\sqrt{\sqrt{68}+\sqrt{8}}}$, resolvitur in $\sqrt{\sqrt{8}.\sqrt{\sqrt{8}17+3}}$, & in $\sqrt{\sqrt{8}.\sqrt{\sqrt{8}17-3}}$. Transit aũt longior harũ partium (.i. $\sqrt{\sqrt{8}.\sqrt{\sqrt{8}17+3}}$) in speciem potentium rationale & mediale, ut satis vides.

Propositio capitis huius prima, quæ est apud Camp. 29.

¶ Duas lineas invenire potentia incommensurabiles, superficiemq; medialem continentes, quarum quadrata pariter accepta sint mediale, incommensurabile duplo superficiei vnius linee in alteram.

Hoc est, invenire lineas duas, componentes lineam potentẽ duo medialia, quẽadmodũ proxima sequens ꝓpositio docebit.

De modo autem inveniendi lineas, quales hæc propositio describit, similia dicenda veniunt ijs quæ dicta sunt circa duas propositiones capitis præcedentis priores. Neq; enim hoc loco constans est Campani & aliorum ratio inveniendi lineas tales per propositionem capitis 19 quintam, quæ est apud Campanum 26; quod iterum volo ostendere exemplis.



Vt

Vt sit A C $\sqrt{\sqrt{18}}+\sqrt{\sqrt{8}}$ (certe $\sqrt{\sqrt{18}}$ & $\sqrt{\sqrt{8}}$ respondent propositioni illi prædictæ) erit C B $\sqrt{\sqrt{18}}-\sqrt{\sqrt{8}}$, & C E faciet $\sqrt{\sqrt{2}}$, & A D breuior (iuxta elemẽtarem quartam) faciet $\sqrt{\sqrt{32}}$. Itaq; A E faciet $\sqrt{}.\sqrt{72}+\sqrt{48}$, & E B faciet $\sqrt{}.\sqrt{72}-\sqrt{48}$. Hæ lineæ, recte quidem iuxta Campani traditionem componunt potentem duo medialia, hanc $\sqrt{}.\sqrt{288}+\sqrt{96}$.

Sed si pro A C recipias $\sqrt{\sqrt{54}}$ & $\sqrt{\sqrt{6}}$, quæ etiam respondent prædictæ propositioni 26 Campani, faciet C B $\sqrt{\sqrt{54}}-\sqrt{\sqrt{6}}$, & C E faciet $\sqrt{24}$ (& A D $\sqrt{96}$) faciet; q; A E $\sqrt{}.\sqrt{216}+\sqrt{72}$, & E B faciet $\sqrt{}.\sqrt{216}-\sqrt{72}$. Sed hæ partes nõ respondẽt propositioni præsenti. Non enim componunt potentem duo medialia, sed componunt potentem rationale & mediale: uidelicet hanc componunt $\sqrt{}.\sqrt{864}+24$. Itaq; non est constans inuentio, quæ docetur per elementarem quartam, dum recipiuntur pro A C lineæ propositionis, quæ apud Campanũ est 26.

Est igitur alius modus inuentionis huius ponendus, qui nunq; fallat; ut ex superiori figura folio 181 patet.

Recipe pro B C lineam aliquam medialem. Vt si B C faciat $\sqrt{\sqrt{48}}$, faciet B A $\sqrt{\sqrt{768}}$, eò quòd A B sit dupla ad B C: & faciet B D $\sqrt{\sqrt{1200}}$. Itaq; B H faciet $\sqrt{}.\sqrt{240}+\sqrt{48}$, & G F, $\sqrt{}.\sqrt{240}-\sqrt{48}$. Et illæ duæ lineæ sunt, quales requirit propositio nostra præsens. Rationem autem, cur figura illa non possit fallere, si B C sit linea medialis, facile colligere poteris ex ijs quæ dicta sunt capite superiori, circa propositionem 4 capitis illius.

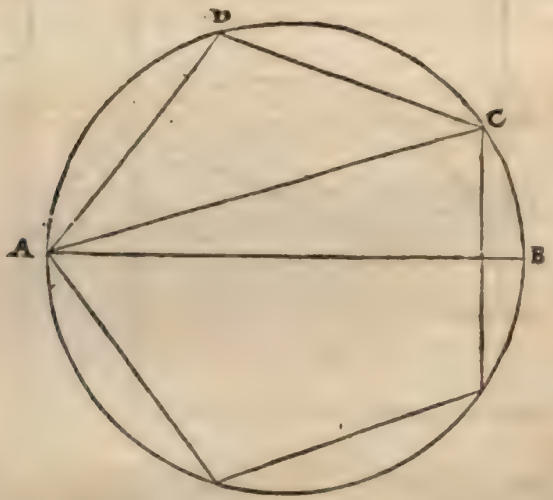
Numeri reliquarum linearum.

B G facit $\sqrt{\sqrt{48}}$. G E facit $\sqrt{\sqrt{1200}}-\sqrt{\sqrt{48}}$.

Hæ duæ lineæ inter se multiplicatæ, faciunt quadratum ipsius G F, id est, breuioris inter eas, quas propositio nostra requirit. Vides autem & hic mox, ut producta linea ponat longiorem, quæ possit duo medialia necessario. Longior autem illa etiam est medium proportionale inter G B D & B C. Linea uero composita ex duabus inuentis, id est, ex B H & G F, est medium proportionale inter A B D & A B, ut superius etiã significatum est.

ſpeciebus lineatum irrationalium tredecim illarum inueniuntur. Et cõtinent ſuperficiem medialem huius numeri $\sqrt{8}3456$, Et quadrata pariter accepta, componunt ſuperficiem numeri huius 144. Quod eſt quadratum G H I K, cuius radix quadrata eſt A B, ſeu H I. Ex quo ſequitur quadratum lineæ E B, æquari quadrangulo L K I M. Et quadratum lineæ A E, æquari quadrangulo G L M H. Sequitur ulterius, lineam A E eſſe medium proportionale inter G H & H M. Item lineam E B eſſe medium proportionale inter K I & I M.

Item ſi circulo (diametrum habenti rationalem) inſcribatur pentagonus æquiangulus, tunc latus unum pentagoni illius cum linea ſubtenſa uni angulorum reſpondebunt propoſitioni noſtræ præſenti.



Vt ſi A B diameter faciat 24, faciet latus A D $\sqrt{8}.360-\sqrt{8}$ 25920: & linea A C faciet $\sqrt{8}.360+\sqrt{8}25920$. Sunt igitur lineæ C A & A D, quales requirit propoſitio capitis huius prima.

Propoſitio

Propositio capitis huius secunda, quæ apud Campanum est 33.

¶ Cum coniuncte fuerint duæ lineæ potentialiter incõmensurabiles, superficiemq; bimedialem continentes, quarum ambo quadrata pariter accepta sint rationale, tota linea erit irrationalis, dicaturq; linea maior.

Hoc est quod superius dixi, partes, quales hic describuntur, componere lineam maiorem. Vt si ex latere pentagoni, A D & ex A C linea angulo pentagoni subtensa, fiat una linea, erit ipsa linea maior. Sic A E & E B figuræ nunc positæ, componunt lineam maiorem.

Vt si A C faciat $\sqrt{\frac{}{}}45+3$, & C B faciat 3, tunc faciet C E 6, & A E faciet $\sqrt{\frac{}{}}.90+\sqrt{\frac{}{}}1620$, & E B faciet $\sqrt{\frac{}{}}.90-\sqrt{\frac{}{}}1620$. Et si ex A E & E B fiat una linea, tunc ipsa faciet $\sqrt{\frac{}{}}.180+\sqrt{\frac{}{}}25920$. Modum additionis huius uide superius capite libri huius duodecimo.

Quælibet igitur linea maior componitur ex linea una maiore, & ex altera quæ uocatur minor. De lineis autem minoribus infrà suo loco dicam.

Propositio capitis huius tertia, quæ apud Campanum est 39.

¶ Linea maior, nisi in duas lineas tantum, ex quibus constat, sub earum termino diuidi non potest.

Quemadmodum propositio præcedēs fuit de compositione lineæ maioris, ex partibus compositionis suæ materialibus: ita hæc propositio est de resolutione lineæ maioris, in partes compositionis suæ. Quælibet igitur linea maior, resoluitur in unam aliam lineā maiorē, & in alteram q̄ uocetur linea minor.

Vt si A C & C B (sicut uides in figura proxime data) faciant $\sqrt{\frac{}{}}24+\sqrt{\frac{}{}}12$, & $\sqrt{\frac{}{}}24-\sqrt{\frac{}{}}12$, tunc C E faciet $\sqrt{\frac{}{}}12$, & A E faciet $\sqrt{\frac{}{}}.48+\sqrt{\frac{}{}}1152$, & E B faciet $\sqrt{\frac{}{}}.48-\sqrt{\frac{}{}}1152$. Si autem ex A E & E B fiat una linea, tunc ipsa faciet $\sqrt{\frac{}{}}.96+\sqrt{\frac{}{}}4608$.

Non autem diuidi potest seu resolui $\sqrt{\frac{1}{8}}.96 + \sqrt{\frac{1}{8}}4608$ in duas alias partes suas, quæ sint potentia incommensurabiles, contineantq; superficiem medialem, atque earum quadrata ad se addita faciant superficiem rationalem, nisi tantum in duas illas, $\sqrt{\frac{1}{8}}.48 + \sqrt{\frac{1}{8}}1152$, & $\sqrt{\frac{1}{8}}.48 - \sqrt{\frac{1}{8}}1152$, ex quibus constat. Præter has inquam partes duas, impossibile erit alias duas inuenire lineas aut partes, quibus conueniat prædictus terminus seu p̄dicta descriptio, in quas resolui possit $\sqrt{\frac{1}{8}}.96 + \sqrt{\frac{1}{8}}4608$, aut ex quibus ipsa constet.

De resolutione autem huiusmodi linearum, consule capita libri huius decimum & duodecimum.

Propositio capitis huius quarta, quæ apud Campanum est 51.

¶ Si linea rationali in longitudine binomio q̄ quarto superficies contineatur, linea que in eam potest superficiem, est linea maior.

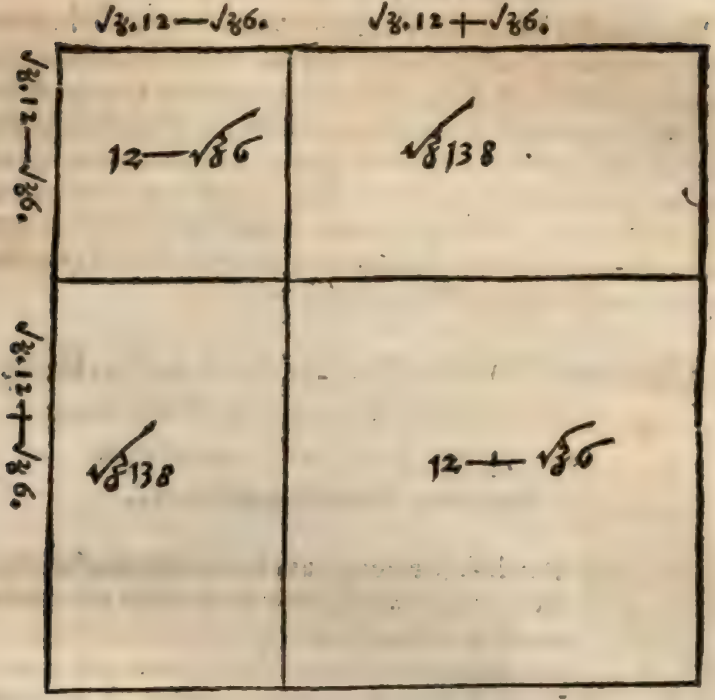
Hic significatur alia ratio inueniendi lineas maiores. Posita enim superficie binomiali quarta, erit radix eius quadrata linea maior. Vnde si superficies binomialis quarta, contineatur sub duobus lateribus, quorū unum sit linea in longitudine rationalis, & alterum sit binomium quartum, tunc medium proportionale inter duo latera illa, erit linea maior.

Propositio capitis huius quinta, quæ apud Campanum est 57.

¶ Si linee in longitudine rationali adiungatur rectangulum æquum quadrato linee maioris, erit alterum latus eius binomium quartum.

Hæc est conuersa præcedentis. Docet igitur ex ductu lineæ maioris, fieri superficiem quadratam, cuius numerus sit binomialis quartus, ideoq; reduci possit in altera parte longiorem, cuius unum latus cōmensurabile sit cum superficie ipsa: quod cum ita sit, necesse erit alterum latus esse in longitudine rationale. Hæc omnia facile uides ex figura sequenti.

Ex



Ex hac figura etiam pulchre apparent, ea quæ dicta sunt in propositionibus duabus primis huius capitis: uidelicet particulæ, quibus describuntur lineæ componẽtes lineam maiorem materialiter, pulchre hic depinguntur.

Propositio capitis huius ultima, quæ est apud Campanum 62.

QUelibet linea commensurabilis lineæ maiori, est et ipsa linea maior.

Vt si diameter circuli alicuius sit linea maior, necesse est latus hexagoni circulo illi inscribendi, esse lineam maiorem &c.

Signi-

Significatur hac propositione, lineam maiorem habere partes alias præter eas, quas primis duabus propositionibus capitis huius descripsit. Sed cum illæ partes prædictæ atq; descriptæ, dicantur partes materiales, possunt partes illæ (de quibus uidetur hæc præsens propositio docere) uocari partes ipsi toti commensurabiles. Deinde etiam sunt aliæ partes eius, quæ uocari possint partes instrumentales: sed illæ partes non intrant compositionem linearum, quarum partes uocantur. Sed hæc pertinent ad propositiones duas superiores.

De propositionibus Euclidis tractantibus lineas potentes mediale & rationale: & hæ lineæ constituunt speciem irrationalium linearum sextam. Cap. XXI.

VNA hæc species, quam hoc capite tractabimus, dicitur species linearum potentium rationale & mediale: cum tamen duæ sint tales, uidelicet species linearū maiorum, & hæc species quā nunc tractabo. Scilicet hæc est linea maior, $\sqrt{\frac{1}{2}}.12+\sqrt{\frac{1}{2}}6$: ea potest superficiem hanc, $12+\sqrt{\frac{1}{2}}6$. id est, potest rationale hoc 12, & mediale hoc $\sqrt{\frac{1}{2}}6$. Hæc uero linea, $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}12+2$, pertinet ad caput hoc præsens, uocaturq; potens rationale & mediale, eò quòd possit hanc superficiem $\sqrt{\frac{1}{2}}12+2$, id est, potest rationale hoc 2, & mediale hoc $\sqrt{\frac{1}{2}}12$.

Poterat autem hoc discrimen seruari, ut lineæ prioris speciei uocarentur Potentes rationale & mediale: huius uero speciei lineæ uocarentur Potentes mediale & rationale. Sed placere nobis debet ueterum autoritas, qua factum est, ut lineæ speciei prioris uocatæ sint lineæ maiores, & iam liberum sit lineas huius alterius speciei uocare indifferenter Potentes mediale & rationale, aut potentes rationale & mediale.

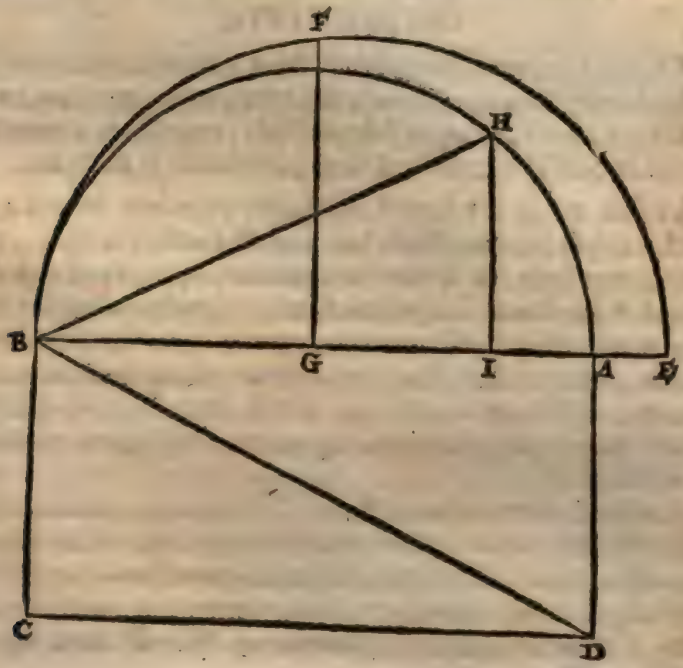
Prima

Prima propositio capitis huius, est apud Campanum 28, hæc ita proponit:

¶ Duas lineas inuenire potentia incommensurabiles, superficiemq; rationalem cõtinentes, quarum ambo quadrata pariter accepta sint mediale.

Hoc est, inuenire partes materiales componentes lineas speciei huius sextæ, linearum irrationalium, quas uocamus specialiter Potentes rationale & mediale, sicut paulo superius dixi.

Recipe quadrangulum rectangulum cõtentum sub duabus lineis longitudine rationalibus, proportionemq; duplam ad inuicem habentibus (ut uides quadrangulum A B C D contentum sub A B & B C) lineam autem longiorem produc ad men-



hoc est, in potentem rationale & mediale, atq; in componẽtem mediale cum rationali. Et hæ duæ partes sunt sub termino quẽ habent superiores duæ propositiones, id est, sunt potẽtia incommensurabiles, & superficiem rationalem cõtinent, & quadrata earum pariter accepta sunt mediale.

Item $\sqrt{\sqrt{864}+24}$, est certe potẽs rationale & mediale. Hæc diuiditur in $\sqrt{\sqrt{216}+\sqrt{72}}$, & $\sqrt{\sqrt{216}-\sqrt{72}}$. Hoc & in potentem duo medialia, & in componentem mediale cum mediali. Nihilominus tamen partes hæ sunt sub termino, qualem describunt propositiones duæ superiores capitis huius.

Qua in re considerandum est, ut species hæc potentium rationale & mediale, subdiuidatur in duas species, quarum prior contineat lineas resolubiles in duas partes se componentes, quarum longior maneat sub specie hac potentium rationale & mediale: ut est $\sqrt{\sqrt{6480}+36}$. Posterior uero contineat lineas resolubiles in duas partes se componẽtes, quarum maior non maneat sub specie hac, sed transeat in speciem linearum potentium duo medialia, de quibus erit caput sequens: ut est, $\sqrt{\sqrt{864}+24}$.

Regulæ.

Vtriusq; uero speciei numeri facile reperiuntur.

Primæ speciei numeri sic inueniunt. Recipe duos numeros quadratos, qui additi ad se faciant numerum non quadratum. Illum igitur numerum non quadratum recipe pro prima particula exempli, præposito illi signo radicali censico. Pro secunda particula recipe radicem quadratã alterius ex duobus reliquis quadratis: ut 36 & 9, faciunt 45 &c. Itaq; $\sqrt{\sqrt{45}+3}$, & $\sqrt{\sqrt{45}-3}$, componunt potentem rationale & mediale prioris speciei, uidelicet $\sqrt{\sqrt{180}+12}$.

Secundæ speciei numeri sic inueniuntur. Recipe duos numeros, quorum alter sit quadratus, & reliquus sit non quadratus, qui additi ad se, faciant numerum non quadratum. Illum igitur ex aggregatione prouenientem, recipe pro prima particula

exempli, præposito illi signo radicali zensico. Pro secunda particula recipe numerum non quadratum illum, qui prius ad quadratum addebatur, eíq; idem signum præpone &c. Vt 234 ad 144, faciunt 378. Itaq; $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}378+\sqrt{\sqrt{}}234$, & $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}378-\sqrt{\sqrt{}}234$, componunt potentē rationale & mediale posterioris speciei, uidelicet $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}1512+24$.

Propositio capitis huius quarta, quæ apud Campanum est 52.

Si fuerit superficies linee rationali atque binomio quinto contenta, linea que in eam potest, conuincitur esse potens mediale et rationale.

Exemplum huius ostensum est superius circa propositionē capi, huius 2. ex figura propositionis primæ capitis huius.

Scilicet linea figuræ illius A B D est binomium quintum, faciens $12+\sqrt{\sqrt{}}180$. Si igitur ex A B & B D fiat una linea recta, eíq; coniungatur ad angulum rectum linea alia æqualis lineæ A B, tunc fiet superficies binomialis quinta, faciens $\sqrt{\sqrt{}}25920+144$. Huius igitē radix quadrata facit $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}25920+144$. hoc est, potentem rationale & mediale, ut est linea composita ex B H & G F, illius figuræ prædictæ.

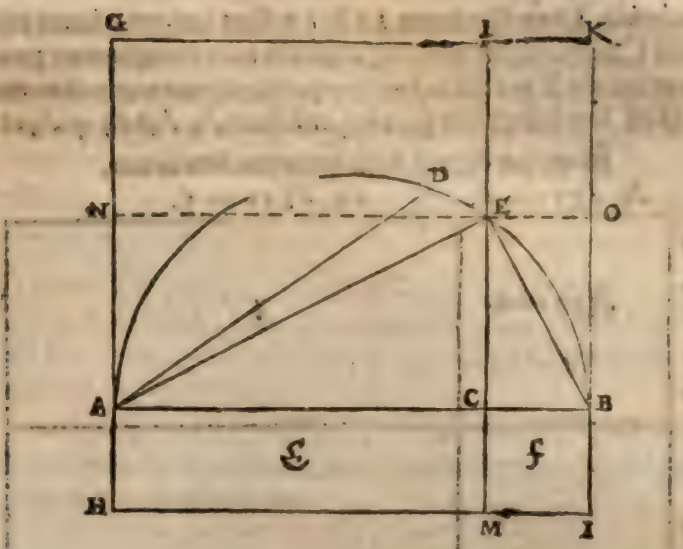
Itaq; hac propositione docet Euclides optimum atq; certissimum modum inueniendi lineas potentes rōnale & mediale.

Propositio capitis huius quinta, quæ apud Campanum est 58.

Si linee in longitudine rōnali adiungatur quadrangulū altera parte lōgius, qd̄ sit equale quadrato linee potētis rōnale et mediale, alterū latus eius binomiū quintū esse necesse est.

Hæc est conuersa præcedentis, docens quadratum lineæ potentis rationale & mediale, posse redigi in superficiem binomialem quintā: quod fit, dum ad ipsam lineā quadrati illius (id est ad lineam potētem rationale & mediale) inueniunt̄ duæ lineæ (tanquā ad medium proportionale) extremæ, quarum una sit longitudine rationalis, & altera sit binomialis quinta.

Vt



Vt ſi A C faciat √88 8 + √88 2, & C B faciat √88 8 — √88 2, tunc C E faciet √88 2, & A D (id eſt, breuior linea elemẽtaris quartæ) faciet √88 32. Vnde A E faciet √8. √8 32 + 4: & E B faciet √8. √8 32 — 4. Et ſunt quidem A E & E B lineæ reſpondentes propoſitioni noſtræ atq; ſuperiori, quæ requirit inuentionem huiuſmodi linearum: fiuntq; hoc modo multa, imo innumera exempla. Sed iſta inuentio non eſt conſtans & perpetua, ut iam oſtendam ſequenti exemplo.

Recipiatur enim pro A C √88 54 + √88 24 (reſpondent autẽ particulæ √88 54 & √88 24 propoſitioni Campani 25, id eſt, ſextæ capitis 18, æque ut hæ duæ, √88 8, & √88 2, quæ ſunt particulæ exempli proximi ſuperioris &c.) & pro C B recipienda uenit √88 54 — √88 24, atq; ita pro A D (id eſt, breuiore linea exempli elementaris quartæ) proueniet √88 96, cum pro C E (id eſt, medio proportionali inter A C & C B) proueniat √88 6. Itaq; A E faciet √8. √8 216 + 12; & E B √8. √8 216 — 12 faciet.

Vt si ad lineam compositam ex B H & F G (figuræ primæ propositionis capitis huius) inueniantur duæ illæ, prima A B, secūda A B D; uel illa prima B C, & illa secūda ABD duplicata &c.

Propositio capitis huius ultima, quæ est apud Campanum 63.

¶ Si aliqua linea cōmensurabilis fuerit lineæ potēti rōnale et mediale, ipsa comprobatur esse potens rōnale et mediale.

Vt data linea potente rationale & mediale, erit etiam potēs rationale & mediale, eius pars dimidia, pars tertia, quarta, quinta &c. Item eius dupla, tripla, quadrupla, quintupla &c. Item partis eius tertiæ, dupla, tripla &c.

Docet igitur hæc propositio ex una linea speciei huius, formare infinitas lineas eiusdem speciei, uidelicet per multiplicationem uel per diuisionem.

De propositionibus tractantibus lineas irrationales septimæ speciei, quæ sunt potentes duo medialia. Cap. XXII.

INIT hæc species linearum potentium duo medialia, species linearum compositarum. Diuidaturq; species hæc in duas subspecies, quemadmodum illa superior, de qua dixi in capite p̄cedenti.

¶ Primo enim sunt quædam lineæ potētes duo medialia, quæ resoluuntur in partes compositionis suæ, ita ut longior earum maneat sub hac specie, ut linea numeri huius $\sqrt{8}.\sqrt{8}56+\sqrt{8}32$, resoluit̄ in $\sqrt{8}.\sqrt{8}14+\sqrt{8}6$ & $\sqrt{8}.\sqrt{8}14-\sqrt{8}6$: manet autem longior (id est, $\sqrt{8}.\sqrt{8}14+\sqrt{8}6$) sub hac specie, id est, etiam est potens duo medialia.

¶ Secundo sunt quædam lineæ potētes duo medialia, quæ resoluuntur in partes compositionis suæ, quarum longior non maneat

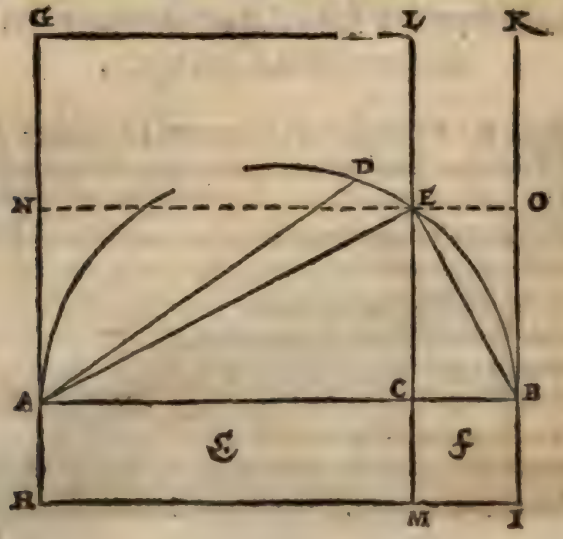
maneat sub specie hac, sed transeat ad speciem præcedentis capitis: ut $\sqrt{8}.\sqrt{8}68+\sqrt{8}8$, resoluitur in $\sqrt{8}.\sqrt{8}17+3$, & in $\sqrt{8}.\sqrt{8}17-3$. Transit aũt longior harũ partium (.i. $\sqrt{8}.\sqrt{8}17+3$) in speciem potentium rationale & mediale, ut satis uides.

Propositio capitis huius prima, quæ est apud Camp. 29.

¶ Duas lineas inuenire potentia incommensurabiles, superficiemq; medialem continentes, quarum quadrata pariter accepta sint mediale, incommensurabile duplo superficiei ynius linee in alteram.

Hoc est, inuenire lineas duas, componentes lineam potentẽ duo medialia, quẽadmodũ proxima sequens ꝓpositio docebit.

De modo autem inueniendi lineas, quales hæc propositio describit, similia dicenda ueniunt ijs quæ dicta sunt circa duas propositiones capitis præcedentis priores. Neq; enim hoc loco constans est Campani & aliorum ratio inueniendi lineas tales per propositionem capitis 19 quintam, quæ est apud Campanum 26; quod iterum uolo ostendere exemplis.



Vt

Vt sit A C $\sqrt{\sqrt{18}}+\sqrt{\sqrt{8}}$ (certe $\sqrt{\sqrt{18}}$ & $\sqrt{\sqrt{8}}$ respondent propositioni illi prædictæ) erit C B $\sqrt{\sqrt{18}}-\sqrt{\sqrt{8}}$, & C E faciet $\sqrt{\sqrt{32}}$, & A D breuior (iuxta elemẽtarem quartam) faciet $\sqrt{\sqrt{32}}$. Itaq; A E faciet $\sqrt{.}\sqrt{72}+\sqrt{48}$, & E B faciet $\sqrt{.}\sqrt{72}-\sqrt{48}$. Hæ lineæ, recte quidem iuxta Campani traditionem componunt potentem duo medialia, hanc $\sqrt{.}\sqrt{288}+\sqrt{96}$.

Sed si pro A C recipias $\sqrt{\sqrt{54}}$ & $\sqrt{\sqrt{6}}$, quæ etiam respondent prædictæ propositioni 26 Campani, faciet C B $\sqrt{\sqrt{54}}-\sqrt{\sqrt{6}}$, & C E faciet $\sqrt{24}$ (& A D $\sqrt{96}$) faciet q; A E $\sqrt{.}\sqrt{216}+\sqrt{72}$, & E B faciet $\sqrt{.}\sqrt{216}-\sqrt{72}$. Sed hæ partes nõ respondẽt propositioni præsenti. Non enim componunt potentem duo medialia, sed componunt potentem rationale & mediale: uidelicet hanc componunt $\sqrt{.}\sqrt{864}+24$. Itaq; non est constans inuentio, quæ docetur per elementarem quartam, dum recipiuntur pro A C lineæ propositionis, quæ apud Campanũ est 26.

Est igitur alius modus inuentionis huius ponendus,
qui nunq; fallat: ut ex superiori figura folio 181 patet.

Recipe pro B C lineam aliquam medialem. Vt si B C faciat $\sqrt{\sqrt{48}}$, faciet B A $\sqrt{\sqrt{3768}}$, eò quòd A B sit dupla ad B C: & faciet B D $\sqrt{\sqrt{1200}}$. Itaq; B H faciet $\sqrt{.}\sqrt{240}+\sqrt{48}$, & G F, $\sqrt{.}\sqrt{240}-\sqrt{48}$. Et illæ duæ lineæ sunt, quales requirit propositio nostra præsens. Rationem autem, cur figura illa non possit fallere, si B C sit linea medialis, facile colligere poteris ex ijs quæ dicta sunt capite superiori, circa propositionem 4 capitis illius.

Numeri reliquarum linearum.

B G facit $\sqrt{\sqrt{48}}$. G E facit $\sqrt{\sqrt{1200}}-\sqrt{\sqrt{48}}$.

Hæ duæ lineæ inter se multiplicatæ, faciunt quadratum ipsius G F, id est, breuioris inter eas, quas propositio nostra requirit. Vides autem & hic mox, ut producta linea ponat longiorem, quæ possit duo medialia necessario. Longior autem illa etiam est medium proportionale inter G B D & B C. Linea uero composita ex duabus inuentis, id est, ex B H & G F, est medium proportionale inter A B D & A B, ut superius etiã significatum est.

Vt hac ratione facile uideas oportere necessario, lineã sic compositã sub talibus numeris, posse duo medialia. Et hoc est quod dixi, te hac figura non posse decipi.

Vide ulterius.

B I facit $\sqrt{\sqrt{875}}+\sqrt{\sqrt{3}}$. & I A facit $\sqrt{\sqrt{243}}-\sqrt{\sqrt{875}}$. Hæ duæ inter se multiplicatæ, faciunt quadratum lineæ H I. Cuius quadratum additum ad quadratum lineæ B I, facit quadratum lineæ B H.

Propositio capitis huius secunda, quæ apud Campanum est 35.

¶ Cum coniuncte fuerint due linee potentialiter incõmensurabiles, superficiemq; medialem continentes, quarum ambo quadrata pariter accepta sint mediale incommensurabile duplo superficiei contentæ sub lineis illis, tota linea cõposita ex illis erit irrationalis, dicetur q; Potens duo medialia.

Talium autem linearum quædam constituũt potentem duo medialia sub specie priore; & illarũ linearũ numeri sic inueniunt.

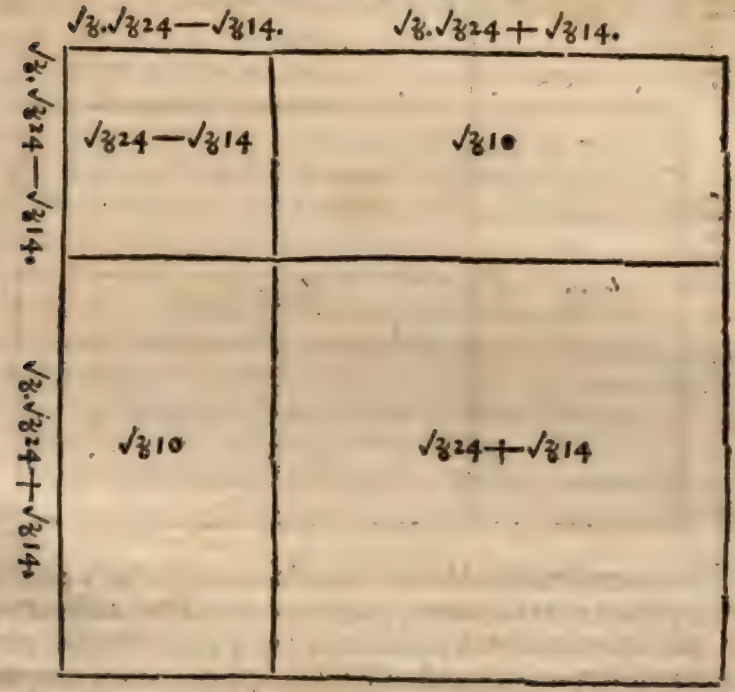
Recipe duos numeros non quadratos, qui additi ad se, faciant numerum non quadratum, itaq; radicem aggregati illius adde ad radicem alterius receptorum, & radix illius aggregati erit linea longior, qua data facile dabis breuiorem. Vt 6 & 8, faciunt 14. Itaq; $\sqrt{\sqrt{14}+\sqrt{8}}$, & $\sqrt{\sqrt{14}-\sqrt{8}}$, componunt potentem duo medialia sub specie prima, uidelicet $\sqrt{\sqrt{56}+\sqrt{24}}$.

¶ Deinde quædam lineæ tales, quales describit propositio hæc præsens, componunt potentem duo medialia sub specie posteriore. Et illarum linearum numeri sic inueniuntur.

Recipe numerum quadratum, & numerum nõ quadratum, qui additi ad se, faciant numerum non quadratum. Et radicem aggregati illius adde ad radicem illius recepti qui est quadratus, & sic radix quadrata illius aggregati, erit linea lõgior, qua posita, facile dabis suam breuiorem. Vt 9 & 8, faciunt 17. Itaq; $\sqrt{\sqrt{17}+3}$, & $\sqrt{\sqrt{17}-3}$, componunt potentem duo medialia

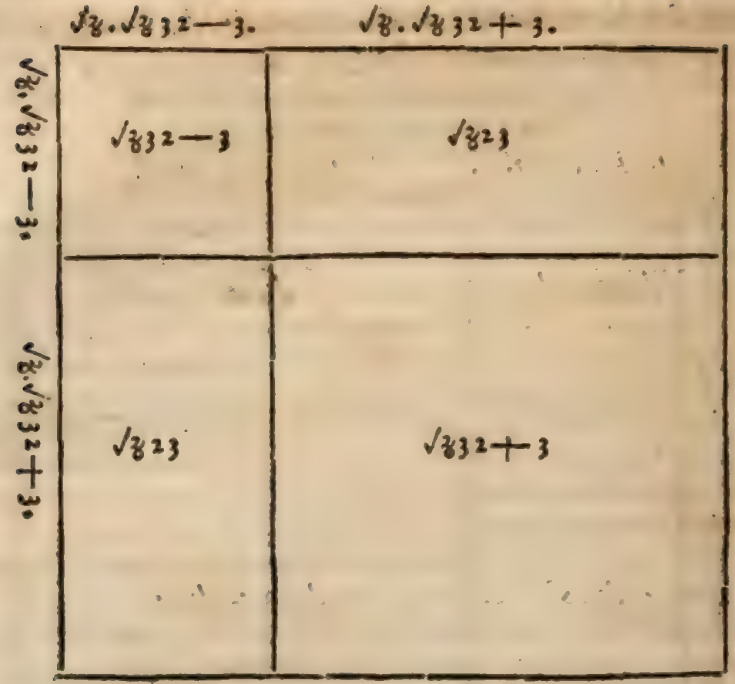
dialia sub specie secunda, uidelicet hanc, $\sqrt{\text{ꝫ}}.\sqrt{\text{ꝫ}}68+\sqrt{\text{ꝫ}}32$.

Figura autem descriptionis talium linearum componentium potentem duo media lia sub priore specie, est hæc.



Vides certe $\sqrt{\text{ꝫ}}.\sqrt{\text{ꝫ}}24+\sqrt{\text{ꝫ}}14$, & $\sqrt{\text{ꝫ}}.\sqrt{\text{ꝫ}}24-\sqrt{\text{ꝫ}}14$, esse potentia incōmensurabiles. Deinde uides, ut contineant superficiem $\sqrt{\text{ꝫ}}10$. Tertio uides, ut quadrata pariter accepta, id est, $\sqrt{\text{ꝫ}}24+\sqrt{\text{ꝫ}}14$, & $\sqrt{\text{ꝫ}}24-\sqrt{\text{ꝫ}}14$, faciant $\sqrt{\text{ꝫ}}96$. Et ut $\sqrt{\text{ꝫ}}96$ sit incommensurabile ipsi $\sqrt{\text{ꝫ}}10$: item duplo eius, uidelicet $\sqrt{\text{ꝫ}}40$.

Sequitur figura linearum componentium lineam posterioris speciei potentium duo medialia.



Hac propoſitione uidemus ſatis clare, ut Euclides potiſſimum reſpexerit in numeros, quantumcunq; illud diſſimulent illi, qui Commentarios ſcripſerunt ſuper propoſitiones eius. Cur enim in propoſitionibus ſimilibus, ſuperiorum duarum ſpecierum, uidelicet linearum maiorum, & linearum potentiũ rationale & mediale, non dixit ſimilia, cum illæ utiq; ſimilia requirant? Reſpondeo. In lineis, maiores lineas componentibus, non metuendum eſt hoc quod hac propoſitione Euclides monet eſſe cauendum, neq; in lineis componentibus lineas potentes rationale & mediale. Nam in illis altera pars eſt rationalis numerus, altera eſt medialis quadrate. Quis hic monitione indiget? At ubi uterq; numerorum eſt medialis quadrate, accidit q;

dicęq; ut tales aliquādo sint commensurabiles, aliquando uero sint incommensurabiles, recte monet Euclides commensurabiles esse cauendos, ne uidelicet pro linea potente duo medialia ponatur linea medialis.

Propositio capitis huius tertia, quæ apud Campanum est 41.

¶ Linea potens duo medialia, nequit diuidi in duas alias lineas sub termino earum ex quibus cōiuncta est, sed in duas tantummodo suas ex quibus componitur est diuisibilis.

Vt $\sqrt{\sqrt{56}+\sqrt{24}}$, solummodo diuiditur in $\sqrt{\sqrt{14}+\sqrt{8}}$, & $\sqrt{\sqrt{14}-\sqrt{8}}$, sub termino illo qui describitur per propositiones superiores capitis huius.

Sic $\sqrt{\sqrt{68}+\sqrt{32}}$, solum diuiditur in has se componētes $\sqrt{\sqrt{17}+3}$, & $\sqrt{\sqrt{17}-3}$. Hæ solæ sunt partes compositionis suæ, quales describuntur per propositiones superiores capitis huius.

Propositio capitis huius quarta, quæ apud Campanum est 53.

¶ Si fuerit superficies linea rationali binomioęq; sexto contenta, linea quæ in eam potest est irrationalis, diciturq; Potens duo medialia.

Circa hanc propositionem facile intelliges omnia illa quæ dicta sunt circa quartam propositionem superioris capitis, hoc loco in similibus posse repeti &c. Itaq; si numerus lineæ binomialis sextæ fuerit multiplicatus per numerū rationalem quēcunq;, radix quadrata producti illius erit numerus lineæ potentis duo medialia. Sic etiam medium proportionale, inter duo latera continentia superficiem binomialem sextam, si alterum eorum fuerit in longitudine rationale, erit ipsum medium proportionale linea potens duo medialia.

Propositio capitis huius quinta, quæ apud Campanum est 59.

¶ Quoties adiuncta fuerit linee in longitudine rationali

ſuperficies rectangula, equalis quadrato linee potentis duo medialia, erit eiuſdē ſuperficiei latus ſecōm binomiū ſextum.

Hoc eſt, numerus lineæ potētis duo medialia, multiplicatus primo in ſe, deinde productum diuiſum per numerū aliquem rationalem, nihil aliud producit q̄ numerum binomialis ſexti. Reliqua circa hanc propoſitionem dicenda, pete ex ſuperiorū capitum propoſitionibus ſimilibus.

Propoſitio capitis huius ultima, quæ apud Campanum eſt 64.

¶ Quelibet linea cōmenſurabilis potenti duo medialia, ipſa quoque eſt potens duo medialia.

Hoc eſt, poſito numero lineæ potentis duo medialia, ſi numerus ille multiplicet̄ aliquo numero rationali integro uel fracto, ſemper producitur numerus potentis duo medialia. Idem fit ſi poſitus numerus ille diuidatur per numerum aliquem rationalem integrum uel fractum. Reliqua pete ex ultimis propoſitionibus ſuperiorum capitum.

De propoſitionibus tractantibus reſidua binomialia, quæ eſt ſpecies octaua irrationalium linearum.

Caput XXIII.

INITIS ſpeciebus compoſitarum linearum, ſequuntur iam ſpecies Tanquam compoſitarum, ſeu Decompoſitarum linearum: quarum ſpecies prima, eſt octaua ſpecies irrationalium linearū. Dicuntur autem Decompoſitæ, eò quòd ex compoſitis oriantur, unica mutatione facta ſigni additorum in ſignum ſubtractorum, ut ex propoſitionibus ſequentibus quilibet facile uidere poterit. Licet autem hac mutatione ſigni in ſignum alterum, mutetur ſimul ſpecies in ſpeciem alteram, tamē ſimili-

ſimilitudo quædã prioris ſpeciei remanet in ſpecie noua, adeo ut totum negotium ſequentium ſpecierum hac unica propoſitione complecti uideatur.

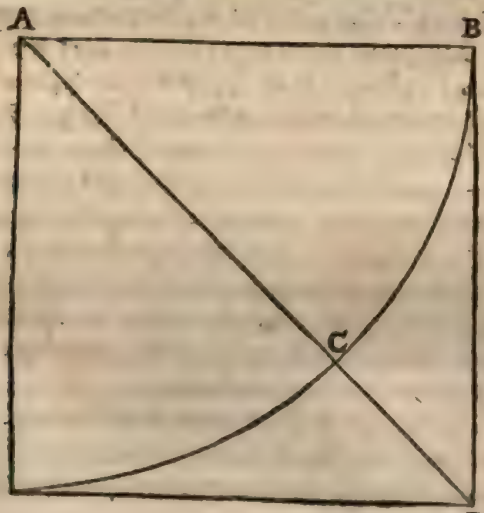
¶ Qualiacunq; efficiunt aut poſſunt lineæ compoſitæ, talia efficiunt et poſſunt decompoſitæ earum.

Sed tamen ſingulæ ſpecies decompoſitarum linearum nihilominus per propoſitiones ſuas, ſuo ordine tractandæ ſunt, ne tot propoſitiones ab Euclide poſitas cõtemnere uidear. Harum igitur ſpecierum prima continet reſidua binomialia, de qua ſpecie ponuntur propoſitiones ſimiles ijs, quæ de binomijs poſitæ ſunt, ut uidebimus.

Propoſitio prima capitis huius, q̃ apud Campa. eſt 68.

¶ Si linea de linea aßcindatur, fuerintq; ambe rationales, potentia tantum cõmenſurabiles, reliqua linea erit irrationalis, dicaturq; reſiduum.

Repetit hæc propoſitio binomiorum deſcriptionem, ut ſignificet reſidua ortum habere ex binomijs. Recte igitur uocantur Reſidua binomialia. Vt ſi ponatur quadratũ coſtæ rationalis,



tunc

tunc costa recepta cum diametro faciet binomium: at si costa fuerit abscisa de diametro, tunc remanens linea erit residuum binomiale. Vt si costa A B fecerit 12, faciet diameter A D $\sqrt{\frac{1}{2}288}$ abscisa autem A B de A D, relinquit C D residuum faciens $\sqrt{\frac{1}{2}288} - 12$. Sic enim posito hoc binomio $\sqrt{\frac{1}{2}288} + 12$, si 12 subtrahatur de particula reliqua maiore, relinquitur $\sqrt{\frac{1}{2}288} - 12$.

Propositio secunda capitis huius, quæ apud Campanum est 74.

NVlla linea nisi tantum vna potest coniungi residuo, vt sint ambe sub termino earum, que erant ante separationem.

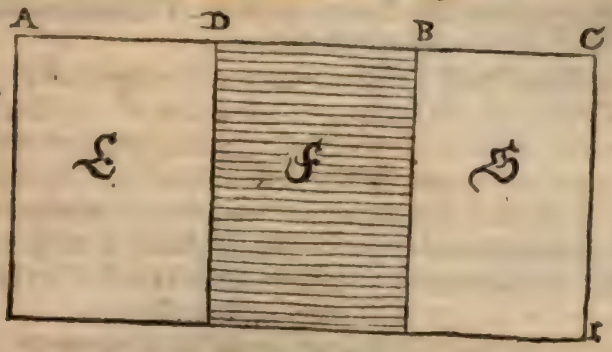
Vt posita hac linea C D (sicut uides in figura iam data) quæ facit $\sqrt{\frac{1}{2}288} - 12$, facta'q; est per $\sqrt{\frac{1}{2}288}$ & 12, quarum particularum terminus describitur à propositiõe præcedenti, uidelicet q; fit consideratio duarum linearum rationalium, potentia tantum commensurabilium. Vna tantummodo potest linea coniungi eidem C D, uidelicet A C, ut sint ambæ, illæ uidelicet, quæ erant ante separationem, id est, A B & A D, seu 12 & $\sqrt{\frac{1}{2}288}$. Illæ, inquã, sunt sub termino descripto. Et sub eodem termino sunt A C & A D. Vides enim ut ante separationem fuerit A D, seu $\sqrt{\frac{1}{2}288}$, tanquam linea à qua debuit fieri separatio aliqua, & A B (seu 12) tanquam id quod debuit separari de A D, seu de $\sqrt{\frac{1}{2}288}$, & ambæ erant sub termino descripto à propositione superiore. Post separationem autem factam, remãsit linea C D, seu $\sqrt{\frac{1}{2}288} - 12$. Et impossibile est ut ipsi C D possit coniungi directe alia linea, præter A C seu 12, ita ut illud quod fit ex additione (ut est A D, seu $\sqrt{\frac{1}{2}288}$) cum eo quod additur seu coniungitur (ut est A C seu 12) sit sub eodem termino descripto à propositione superiore. Potest enim $\sqrt{\frac{1}{2}288} - 12$, diuidi in $\sqrt{\frac{1}{2}72} - 6$ & $\sqrt{\frac{1}{2}72} - 6$. Sed illæ duæ partes nõ sunt rationales, neq; sunt potentia tantum commensurabiles &c.

Sequuntur definitiones Residuorum.

Cum residua binomialia sequantur naturam & similitudinẽ binomiorum, ideo subdiuiditur etiam species residuorũ, in sex

species

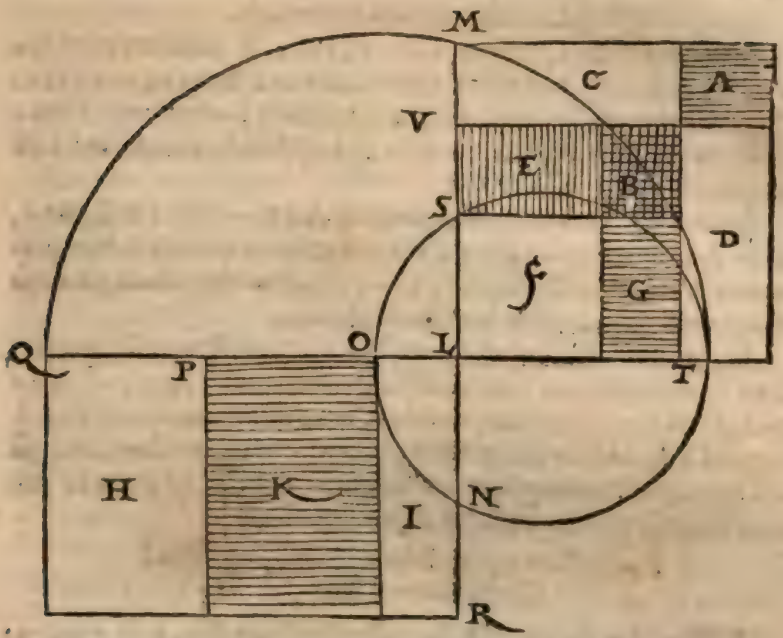
ſpecies, quarũ definitiones traditas nobis, ſiue ab Euclide, ſiue (ut puto) à Theone, uolo ponere atq; exponere.



Prima definitio.

Poſitis duabus lineis, altera rationali in longitudine (ut C 1, ſi faciat 4) altera reſiduo (ut B C, ſi faciat 6 — √ 32) adiectaq; ſit ipſi reſiduo alia linea (ut A D, ſi faciat √ 32) ſecundũ eius terminum (id eſt, quæ addita reſiduo illi poſito, componat lineam, quæ, cum adiecta, ſit ſub termino deſcripto, à propoſitione capitis huius prima, ut mox ſequetur) ſi fuerit totũ compoſitum uidelicet ex B C & A D, faciens D C, id eſt 6) potentius linea adiecta (ſcilicet D C poteſt 36, & A D poteſt 32, ut D C ſit potentior quàm A D, quantum poteſt linea numeri huius 2) in quadrato linee commenſurabilis ipſi toti in longitudine (ut linea numeri huius 2, commenſurabilis eſt toti compoſitæ, uidelicet ipſi D C facienti 6 in longitudine, cum utraq; earum ſit rationalis in longitudine, quales oportet eſſe longitudine commẽſurabiles) et ſi fuerit idem totum (id eſt D C ſeu 6) commenſurabile in longitudine, poſite linee in longitudine rationali (ut eſt poſita C 1, faciens 4) quod poſitũ erat (.i. B C) dicetur reſiduum primum.

Hoc eſt, poſito binomio primo, ſi pro ſigno hoc + poſueris ſignum hoc —, quod poſitum fuerat dicetur reſiduũ primum.



Aliquando latus tetragonicum tale est residuum quartum: ut si O L faciat 10 — √ 96, & L R faciat 6, faciet L S, 6 — √ 24 residuum quartum.

Aliquando latus tale tetragonicum est residuum quintum: ut si O L faciat 6 — √ 32, & L R faciat 8, tunc L S faciet √ 32 — 4 residuum quintum.

Aliquando latus tale tetragonicum est residuum sextum: ut si O L faciat 6 — √ 27, & L R faciat 8, tunc L S faciet hoc residuum sextum 6 — √ 12.

Propositio capitis huius quinta, quæ apud Campanum 92.

¶ Si ad lineam rationalem applicetur superficies equalis quadrato residui, alterum latus necessario est residuū primū.

Hæc est conuersa superioris.

Vt si superficies ☐, faciat 56 — √ 2880, & tantum etiam faciat superficies ▭, faciat aũt L R 4, tunc O L faciet 14 — √ 180. Est autem superficies ☐ (faciens area sua 56 — √ 2880) quadratum residui L S, facientis 6 — √ 20, ideo necesse est O L esse residuum primum.

Item si L S fecerit sua longitudine √ 48 — 6, & L R faciat 6, tunc O L faciet 14 — √ 192, idq; necessario erit residuum primum. Vnde necesse est, ut √ 48 — 6 in se multiplicata, idem faciat quod 14 — √ 192 in 6 multiplicata.

Sequitur ex his, quodlibet residuum (cuiuscunq; sit speciei) si in se multiplicetur, facere residuũ primum. Vt √ 54 — √ 30 in se, facit 84 — √ 6480, quod est residuum primũ necessario. Quod si diuidatur per numerum aliquem rationalem, necesse est productum etiam facere residuum primum, ut patet ex propositione sequenti. Et sic de alijs.

Propositio capitis huius ultima, quæ apud Campanum est 98.

QVelibet linea residuo commensurabilis, ipsa quoque in termino et ordine est idem residuum.

Vt quia 84 — √ 6480 est residuum, cui conuenit particula descriptionis hæc, qua in definitione dicitur, quòd totum compositum sit potentius linea adiecta in quadrato lineæ commensurabilis ipsi toti in longitudine, conueniet etiam huic 14 — √ 180, eò quòd sit ei commensurabilis. Necessario igitur ambo illa residua erũt sub eodem ordine, atq; etiam sub eadem specie residuorum. Et sic de alijs.

De

bat separatio fuerit rationalis in longitudine, dicetur residuum quartum.

Quinta definitio.

Positis duabus lineis, altera rationali, altera residuo (ut C I faciens 4, & B C faciens $\sqrt{\text{ꝫ}}12 - 2$) adiectaq; sit ipsi residuo alia linea secundum terminum eius (ut A D faciens 2) si fuerit totum compositum potentius linea adiecta (id est, D C cꝫ sit A D) in quadrato lineę incommensurabilis ipsi toti in longitudine, et linea adiuncta (id est, A D) commensurabilis sit in longitudine ipsi posite rationali (id est, C I) vocabitur residuum quintum.

Sexta definitio.

Positis duabus lineis, altera rationali in longitudine, altera residuo (ut C I faciens 4, & B C faciens $\sqrt{\text{ꝫ}}12 - \sqrt{\text{ꝫ}}6$) adiectaq; sit ipsi residuo alia linea secundum terminum eius (ut A D faciens $\sqrt{\text{ꝫ}}6$) si fuerit totum compositum (id est, D C) potentius quam sit linea adiecta (id est, A D) in quadrato linee incommensurabilis ipsi toti in longitudine, fueritq; vtraq; (id est, A D & D C) incommensurabilis in longitudine ipsi posite rationali (id est, C I) appellatur residuum sextum.

Propositio capitis huius tertia, qua sex sunt in unam conflatæ.

INuenire residuum primum, secundum, tertium, quartum, quintum, aut sextum.

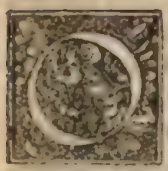
Posito binomio primo, si pro signo additorum posueris signum subtractorum, tunc per binomium primum inuenisti residuum primum. Vt per hoc binomium primum $6 + \sqrt{\text{ꝫ}}32$, inuenies hoc residuum primum $6 - \sqrt{\text{ꝫ}}32$.

Sic per hoc binomium secundum $\sqrt{\text{ꝫ}}18 + 4$, inuenies hoc residuum secundum $\sqrt{\text{ꝫ}}18 - 4$.

Sic per hoc binomium tertium $\sqrt{\text{ꝫ}}50 + \sqrt{\text{ꝫ}}48$, inuenies hoc residuum tertium $\sqrt{\text{ꝫ}}50 - \sqrt{\text{ꝫ}}48$.

Sic per hoc binomium quartum $6 + \sqrt{\text{ꝫ}}35$, inuenies hoc residuum quartum $6 - \sqrt{\text{ꝫ}}35$.

De propositionibus tractantibus residua bimedialia prima, hæc constituunt speciem irrationalium linearum nonam. Caput XXIIII.



OMnia illa quæ de lineis bimedialibus dicta sunt cap. 18. libri huius, atq; cap. 19. hoc capite atque sequenti repeti possent, quemadmodum omnia quæ cap. 17. dicta sunt, potuissent repeti capite præcedenti &c. Remittendus est igit̃ lector illuc, ne eadem sæpius repetere cogar, & ut breuis transcursus per propositiones linearum decompositarum sufficiat. Hoc tamen non est obmittendum, lineas uidelicet residuales bimediales primas, subdiuidi in duas species, uidelicet in speciem primarũ priorem, & in speciem primarum posteriorem. Sed quia inuentio huiusmodi residualium fit per bimediales primas, ita ut per bimediales primas prioris speciei, fiant residuales bimediales primæ prioris speciei: & per bimediales primas posterioris speciei, fiant residuales bimediales primæ posterioris speciei, uidelicet per mutationem signi additorum in signum subtractorũ. ideo sufficit si de utraq; subspecie ponatur exemplum unum atque alterum.

Exemplum prioris subspeciei primarum residualium bimedialium.

$\sqrt{\sqrt{}}$ 648 — $\sqrt{\sqrt{}}$ 512, fit ex $\sqrt{\sqrt{}}$ 648 + $\sqrt{\sqrt{}}$ 512.
Item $\sqrt{\sqrt{}}$ 2592 — $\sqrt{\sqrt{}}$ 2048, fit per $\sqrt{\sqrt{}}$ 2592 + $\sqrt{\sqrt{}}$ 2048.

Exemplum posterioris subspeciei primarum residualium bimedialium.

$\sqrt{\sqrt{}}$ 288 — $\sqrt{\sqrt{}}$ 72, fit per $\sqrt{\sqrt{}}$ 288 + $\sqrt{\sqrt{}}$ 72.
Item $\sqrt{\sqrt{}}$ 432 — $\sqrt{\sqrt{}}$ 48, fit ex $\sqrt{\sqrt{}}$ 432 + $\sqrt{\sqrt{}}$ 48, &c.

Propo-

Propositio prima capitis huius, quæ apud Campanum est 69.

¶ Si fuerit linea de linea abscisa, fuerintq; ambe mediales potentia tantum cõmensurabiles, superficiemq; rationalem continẽtes, relicta linea erit irrationalis, dicturq; residuum mediale primum.

In numeris facile est inuenire talia medialia, quibus conueniat descriptio illa, quam propositio hæc refert. Scilicet posito numero aliquo zensizensico, diuide ipsum per numerum aliquem numerantem eundem zensizensicum. Recepto igitur diuisore illo, præpone illi signum zensizensicum, tunc habebis mediale unum. Alterum dabit tibi quotiens diuisionis illius, recepto signo zensizensico. Vt dato zensizensico hoc, 1296, diuide eum per 72, tunc quotiens erit 18: itaq; $\sqrt{\sqrt{72}}$, & $\sqrt{\sqrt{18}}$ erunt medialia, qualia requirit & describit propositio hæc. Jam si alterum ab altero fuerit abscisum, remanebit $\sqrt{\sqrt{72}} - \sqrt{\sqrt{18}}$, quod est residuũ bimediale primum. Quòd enim $\sqrt{\sqrt{72}}$ & $\sqrt{\sqrt{18}}$ sint potentia tantum commensurabiles, poteris diuisione unius per alterum explorare. Deinde quòd rationalem superficiem contineant, poteris cognoscere ex multiplicatione eorum inter se. Scilicet, diuisio unius per alterũ, facit $\sqrt{2}$; multiplicatio uero facit 6.

Propositio capitis huius secunda, quæ apud Campanum est 75.

¶ Nulla linea, nisi una tantũ, residuo mediali primo, coniungi potest, vt sint ambe sub termino earum, que erant ante separationem.

Vt posito hoc residuo bimediali primo, $\sqrt{\sqrt{72}} - \sqrt{\sqrt{18}}$ nihil ei coniungi potest sub hac cõditione, ut hoc quod additur, cum illo quod ex additione illa fit, habeat illam descriptionem, quã habebant duo illa ex quibus factum est residuum bimediale primum, per separationẽ unius ab altero. Vt si addatur $\sqrt{\sqrt{18}}$ ad $\sqrt{\sqrt{72}} - \sqrt{\sqrt{18}}$, tunc fit $\sqrt{\sqrt{72}}$. Habent igitur $\sqrt{\sqrt{18}}$ & $\sqrt{\sqrt{72}}$ descri-

descriptionem termini à propositione hac descripti, & eandem descriptionem habebant ante separationem unius ab altero.

Propositio capitis huius tertia, quæ apud Campanum est 87.

¶ Si superficies aliqua, rationali linea in longitudine resi duo'q; secundo contineatur, linea in eandem superficiem potens erit residuum mediale primum.

Sententia est: Superficiei residualis binomialiter, quadrata radix, necessario est residuum bimediale primum.

Docet igitur propositio hæc residua bimedialia prima inuenire alio modo, ab eo quem docuit propositione capitis huius prima. Scilicet $\sqrt{\frac{1}{8}162} - 12$, est residuum binomiale secūdum. Quære radicem eius quadratam, quam si inueneris, inueniſti residuum bimediale primum: scilicet radix quadrata ex $\sqrt{\frac{1}{8}162} - 12$, facit $\sqrt{\frac{1}{88}72} - \sqrt{\frac{1}{88}18}$.

Propositio capitis huius quarta, quæ apud Campanum est 93.

¶ Cum adiūcta fuerit superficies equalis quadrato residui medialis primi ad lineam rationalem, alterum latus eius erit residuum secundum.

Hoc est, si residuum bimediale primum fuerit in se multiplicatum, producitur superficies residui binomialis secundi: quæ talis est, ut si contineatur sub duabus lineis, quarum altera sit longitudine rationalis, necesse est reliquam esse residualem binomialiter secundam. ut $\sqrt{\frac{1}{88}72} - \sqrt{\frac{1}{88}18}$ multiplicatum in se, facit $\sqrt{\frac{1}{8}162} - 12$. Hoc autem residuum binomiale secundum, si diuidatur per numerum aliquem rationalem, necesse est quotientem fieri, qui sit etiam residuum binomiale secundum.

Propositio capitis huius ultima, quæ apud Campanum est 99.

¶ Quelibet linea vtrilibet residuo mediali commensurabilis, est sub ipsius termino et ordine residuum mediale.

Vt quia $\sqrt{\frac{1}{88}162} - \sqrt{\frac{1}{88}128}$, est residuum bimedialis primi,

Et sic ex lineis simpliciter rationalibus producit lineas potentia tantum rationales, quæ longitudine sunt irrationales. Scilicet si latera continentia superficiem illam, non habuerint proportionem, quam habet numerus quadratus ad numerum quadratū, necesse est ut linea potens superficiem talem, sit irrationalis longitudine. Si autem latera superficiem rationalem continentia, habuerint proportionem numeri quadrati ad numerum quadratum, erit linea potens superficiem talem, rationalis in longitudine.

Propositio capitis huius secunda.

¶ Si fuerit superficies sub lineis rationalibus, specie differentibus contenta, linea potens in superficiem illam erit irrationalis, dicetuŕq; medialis.

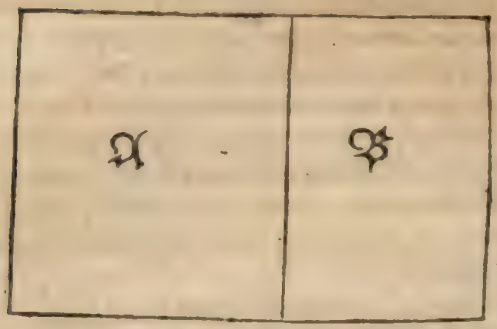
Vt si latus unum faciat 6, & latus alterum faciat $\sqrt{\text{ꝫ}}12$, faciet superficies illa $\sqrt{\text{ꝫ}}432$, & latus quadratum illius (id est, linea potens in superficiem illam) seu medium proportionale inter latera illa, faciet $\sqrt{\text{ꝫꝫ}}432$. Differunt autem 6 & $\sqrt{\text{ꝫ}}12$ specie, cum altera sit longitudine rationalis, altera uero sit potentia tantum rationalis.

Propositio capitis huius tertia, quæ apud Campanum est 65.

¶ Cum coniuncte fuerint duæ superficies, quarum altera sit rationalis, altera medialis, linea potens in totam superficiem illam, aliqua erit quatuor irrationalium linearum, aut binomialis, aut bimedialis prima, aut linea maior, aut potẽs rationale et mediale.

Scilicet si duæ superficies illæ A & B (quæ iam sequuntur) fecerint binomialem superficiem primam, erit linea potens in eam, binomialis. Vt si A faciat 24, & B faciat $\sqrt{\text{ꝫ}}432$, faciet linea potens A B, id est, radix eius quadrata, binomium sextum hoc $\sqrt{\text{ꝫ}}18 + \sqrt{\text{ꝫ}}6$.

Si autem duæ superficies illæ composuerint superficiem binomialem secundam, tunc linea potens in eam, erit bimedialis



prima. Vt si A faciat √8432, & B faciat 18, faciet linea potens A B bimediale hoc primum √8243 + √827.

Et si superficies illæ duæ composuerint superficiem binomialem quartã, tunc linea potens in supficiem illã, erit linea maior. Vt si A faciat 24, & B faciat √8384, faciet linea potens in A B lineam hanc maiorem, √8.24 + √8384.

Si uero superficies illæ duæ fecerint superficiem binomialẽ quintã, tunc linea potens in eam, erit potens mediale & rõnale. Vt si A faciat √8384, & B faciat 16, faciet linea potens in A B lineam hanc potentem mediale & rationale, √8.√8384 + 16.

Necesse autem est, ut superficies quadrangula rectangula, constituta ex superficie rationali & mediali, componat binomialem superficiem, aut primam, aut secundam, aut quartam, aut quintam.

Propositio capitis huius quarta, quæ apud Campanum est 66.

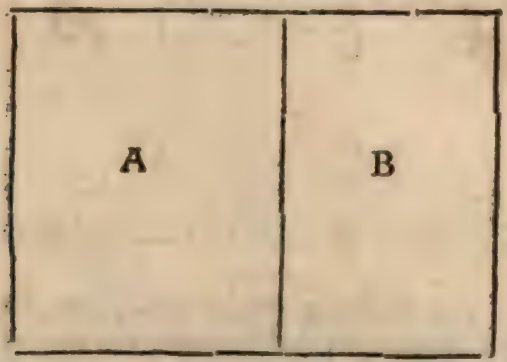
¶ Cum coniuncte fuerint duæ superficies mediales incommensurabiles, linea potens in totã superficiem, erit alterutra duarum linearum irrationalium, aut bimedialis secunda, aut potens duo medialia.

Ratio est: quia talis superficies, aut est binomialis tertia, aut binomialis sexta. Si est binomialis tertia, necesse est ut radix

eius

eius quadrata, faciat bimediale secūdum. Si uero est binomialis sexta, necesse est ut radix eius quadrata sit potēs duo medialia.

Exemplum prioris.



Si A fecerit $\sqrt{\text{ж}}432$, & B fecerit $\sqrt{\text{ж}}384$, faciet linea potens in A B hanc lineam bimedialem secundam, $\sqrt{\text{жж}}192+\sqrt{\text{жж}}48$.

Exemplum posterioris.

Vt si A faciat $\sqrt{\text{ж}}192$, & B faciat $\sqrt{\text{ж}}128$, faciet linea potens in A B $\sqrt{\text{ж}}.\sqrt{\text{ж}}192+\sqrt{\text{ж}}128$, quæ est potens duo medialia.

Propositio capitis huius quinta, quæ apud Campanum est 103.

¶ Si de superficie rationali superficies medialis abscindatur, linea potens in relictam superficiem erit alterutra duarum irrationalium, aut residuum, aut linea minor.

Quia talis superficies aut est residualis binomialis prima, aut residualis binomialis quarta. Si est residualis binomialis prima, tunc necesse est radicem eius quadratam esse residualem binomialem. Si uero est residualis binomialis quarta, necesse est radicem eius quadratam esse lineam minorem.

Vt si ℱ ℊ faciat 24, & ℰ faciat $\sqrt{\text{ж}}432$, & subtrahatur ℰ de ℱ ℊ, remanebit ℊ faciens $24-\sqrt{\text{ж}}432$, cuius radix quadrata,

(id est, linea potens in G) facit $\sqrt{\sqrt{18}} - \sqrt{\sqrt{6}}$, id est, residuum binomiale.

Si autem F G faciat 24, & E faciat $\sqrt{\sqrt{384}}$, tunc G faciet $24 - \sqrt{\sqrt{384}}$. cuius radix quadrata facit $\sqrt{\sqrt{8} \cdot 24 - \sqrt{\sqrt{384}}}$, quæ est linea minor.

Propositio capitis huius sexta, quæ apud Campanum est 104.

Si de superficie mediali detrahatur superficies rationalis, linea in relictam superficiem potens, erit alterutra duarū irrationalium linearum, aut residuum mediale primum, aut componens mediale cum rationali.

Quia talis superficies, aut est residualis binomialis secunda, aut residualis binomialis quinta. Si est residualis binomialis secunda, tunc necesse est, lineam in ipsam potentem, esse residuū bimediale primum. Si uero fuerit superficies residualis binomialis quinta, tunc linea potens in eam, erit componens mediale cum rationali.

Vt F G faciat $\sqrt{\sqrt{432}}$, (sicut hic suprà uides) & E faciat 18, subtrahaturq; E de F G, tūc remanet G faciens $\sqrt{\sqrt{432}} - 18$. cuius radix quadrata, id est linea potens in G, facit

$$\sqrt{\sqrt{243}} - \sqrt{\sqrt{27}}.$$

Si autem F G fecerit $\sqrt{\sqrt{384}}$, fecerit q; E 16, & subtrahat E de F G, tunc remanet $\sqrt{\sqrt{384}} - 16$, quæ est area ipsius G.

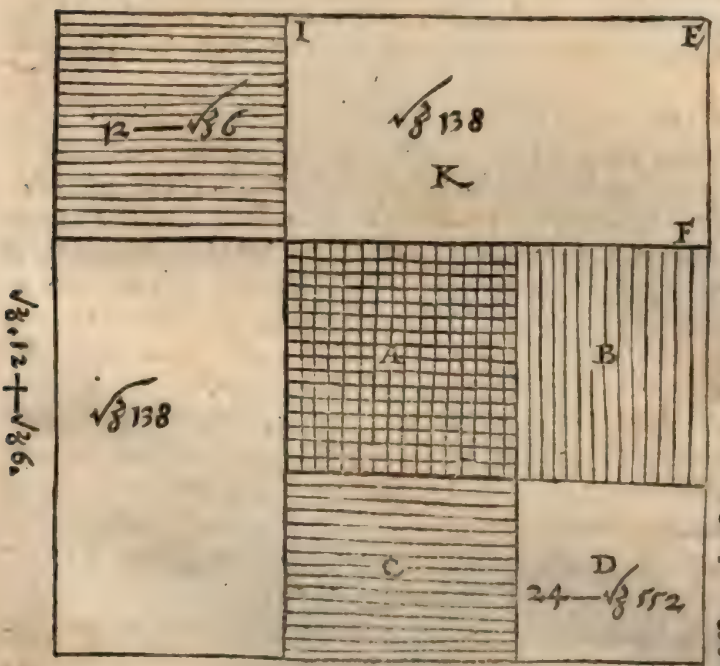
cuius

Et quadrata earum simul recepta, faciunt rationale hoc 12.

Si itaq; subtrahas M V (id ē, latus quadrati minimi, i. ipsius A) de V L (id est, de latere quadrati E B F G) id est, $\sqrt{8}.6 - \sqrt{8}12$ de $\sqrt{8}.6 + \sqrt{8}12$, tunc remanet S L, id est, $\sqrt{8}.12 - \sqrt{8}96$, quæ est linea minor.

Modum subtractionis huius habes capite 12 libri huius. Et ut rem hanc clarius uideas, recipe figuram exempli illic positam, de subtractione tali.

$\sqrt{8}.12 - \sqrt{8}6.$ $\sqrt{8}.12 + \sqrt{8}6.$



In illo exemplo subtrahitur E F de F H, & remanet G H: facit autem E F $\sqrt{8}.12 - \sqrt{8}6$, & F H facit $\sqrt{8}.12 + \sqrt{8}6$, & est F H æqualis

æqualis lineæ I E. Vides ergo, ut E F & F H contineant mediale $\sqrt{\frac{1}{3}}38$. Et ut quadrata earum pariter accepta, faciant 24. Nam quadratum E F facit $12 - \sqrt{\frac{1}{3}}6$, & quadratum F H (id est, ABCD) facit $12 + \sqrt{\frac{1}{3}}6$, quæ addita ad se faciunt 24, &c.

Propositio capitis huius secunda, quæ apud Campanum est 77.

NVlla linea lineæ minori cõiungi potest, vt sub termino suo fiant, nisi tantum quæ ante abscisionem coniungebatur.

In tractatione superioris exempli, uidisti ut $\sqrt{\frac{1}{3}}.6 - \sqrt{\frac{1}{3}}12$ sit subtracta de $\sqrt{\frac{1}{3}}.6 + \sqrt{\frac{1}{3}}12$, & ut remanserit $\sqrt{\frac{1}{3}}.12 - \sqrt{\frac{1}{3}}96$. Sola igitur linea hæc, $\sqrt{\frac{1}{3}}.6 - \sqrt{\frac{1}{3}}12$, potest addi lineæ huic $\sqrt{\frac{1}{3}}12 - \sqrt{\frac{1}{3}}96$, ut proueniat linea maior, qualis erat ante separationem. Atq; ita illud quod additur, cum illo quod fit ex additione illa, sunt sub termino qui describitur à propositione præcedenti.

Hac aũt industria addes $\sqrt{\frac{1}{3}}.6 - \sqrt{\frac{1}{3}}12$, ad $\sqrt{\frac{1}{3}}.12 - \sqrt{\frac{1}{3}}96$.

Primo resolue $\sqrt{\frac{1}{3}}.12 - \sqrt{\frac{1}{3}}96$ (sicut docet caput 12) tunc uidebis $\sqrt{\frac{1}{3}}.6 + \sqrt{\frac{1}{3}}12. - .\sqrt{\frac{1}{3}}.6 - \sqrt{\frac{1}{3}}12$. Quantum autem facit $\sqrt{\frac{1}{3}}.12 - \sqrt{\frac{1}{3}}96$, tm̃ facit etiã hoc $\sqrt{\frac{1}{3}}.6 + \sqrt{\frac{1}{3}}12. - .\sqrt{\frac{1}{3}}.6 - \sqrt{\frac{1}{3}}12$. Facta itaq; resolutione ista, facile iam poteris addere: scilicet $+ \sqrt{\frac{1}{3}}.6 - \sqrt{\frac{1}{3}}12$, tollit. $- \sqrt{\frac{1}{3}}.6 - \sqrt{\frac{1}{3}}12$, ut nosti ex superiorib. Manet igitur ex additione ista, $\sqrt{\frac{1}{3}}.6 + \sqrt{\frac{1}{3}}12$.

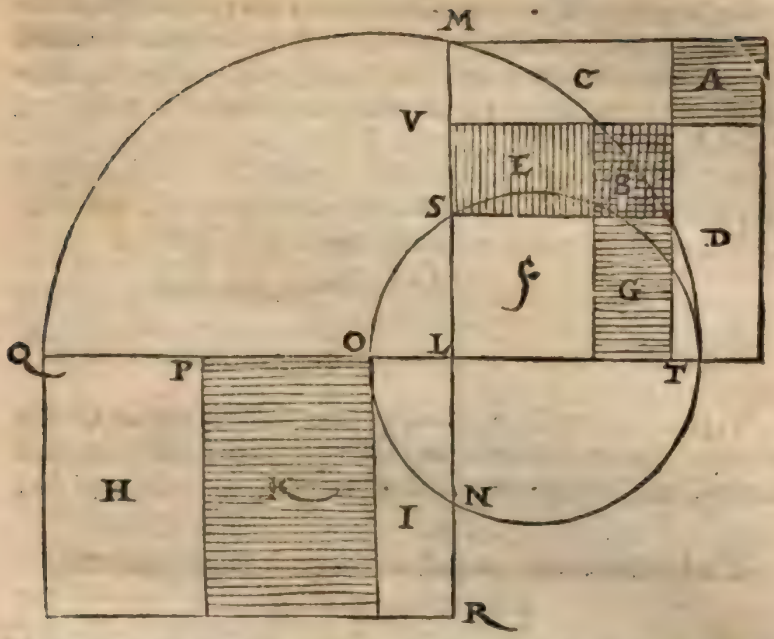
Et sic resoluitur quælibet linea minor, in lineam maiorem & minorem: sicut quælibet linea maior, resoluitur in lineam maiorem & minorem, mediante tamen signo additorum, sicut minor resoluitur mediante —.

Propositio capitis huius tertia, quæ apud Campanum est 89.

SI fuerit superficies linea rationali in longitudine, residuoq; quarto cõtenta, linea super eã potens, erit linea minor.

Vt si L R faciat 12, & Q L faciat $10 + \sqrt{\frac{1}{3}}40$ (Q P faciente $\sqrt{\frac{1}{3}}40$, & P L faciente 10, sic enim fiet ut O L faciat $10 - \sqrt{\frac{1}{3}}40$) tunc subtracta Q P de P L, remanet O L residuum quartum.

Dispositio



Diſpoſito itaq; medio proportionali inter O L & L R, continentes ſuperficiem I, producitur L S, medium uidelicet proportionale inter O L & L R, quod eſt linea potens ſuperficiem I, cum quadratum eius ſ ſit æquale ſuperficiei I. Facit autem ſuperficies I, 120 — √⅜5760, cum ſupficies H K I faciat 120 + √⅜5760. Quare L S facit √⅜. 120 — √⅜5760: ſicut L M facit √⅜. 120 + √⅜5760. Eſt autem L S, ſeu L N, linea minor.

Propoſitio capitis huius quarta, quæ apud Campanum eſt 95.

¶ Cum adiuncta fuerit lineæ rationali, ſuperficies equalis quadrato lineæ minoris, latus eius ſecundum erit reſiduum quartum.

Vt lineæ L R (figuræ iam datæ) facienti 12, adiuncta est superficies 1, quæ est æqualis quadrato §, cuius linea seu costa est L S, linea uidelicet minor, faciens √ȝ.120 — √ȝ5760. Ideo necesse est lineolam O L esse residuum binomiale quartum. Sic enim area superficiei §, uel 1, faciens 120 — √ȝ5760, diuisa per 12, facit 10 — √ȝ40. Est itaq; propositio hæc conuersa prioris: sicut enim illa superior docet reperire lineam L S ex O L, ita hæc rursum docet inuenire lineam O L ex linea L S.

Propositio capitis huius ultima, quæ apud Campanum est 100.

¶ Si linea aliqua linee minori sit commensurabilis, ipsa quoque erit linea minor.

Vt cũ linea hæc, √ȝ.240 — √ȝ23040, sit linea minor, necesse est hanc partem eius tertiam, √ȝ.80 — √ȝ2560, esse lineam minorem. Item hanc partem eius quartam, √ȝ.60 — √ȝ1440, &c.

De lineis componentibus mediale cum rationali. Caput XXVII.

NVMERO aliquo posito, qui repræsentet lineam potentem mediale & rationale, si signum additorum mutetur in signum subtractorum, mox mutatam uidebis speciem, & ex potente mediale & rationale, factum cõponens mediale cum rõnali. Vt sicut numerus iste, √ȝ.√ȝ48 + 4, repræsentat lineam potentem mediale & rationale: sic iste, √ȝ.√ȝ48 — 4, repræsentat lineam componentem mediale cum rationali.

Respicit autẽ appellatio ista linearum huius speciei, potentias earum potius quàm lineas ipsas, cum de quadratis linearum uerà sit potius quàm de lineis ipsis: scilicet lineæ huius √ȝ.√ȝ48 — 4, quadratum est √ȝ48 — 4. Hoc, inquam, componit cum hoc rationali 4, istud mediale √ȝ48. Nam si addideris

ei 4,

ei 4, uidebis fieri $\sqrt{\sqrt{}}48$. Et simili ratione potuissent lineæ minores appellari Componentes rationale cum mediali, ut notū est.

Diuiditur autem species hæc in duas subspecies.

Talium enim linearum quædam sunt, quarum quælibet resoluatur in potentem mediale & rationale, & in componentem mediale cum rationali. Et tales sunt, primæ componentes mediale cum rationali. Vt, $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}6480 - 36$, resoluitur in $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}1620 + 36. - .\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}1620 - 36$.

Quædam uero tales sunt, ut earum quælibet resoluatur in potentem duo medialia, & in componentem mediale cum mediali. Et illæ sunt, secundæ componentes mediale cum mediali, Vt hæc, $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}864 - 24$, resoluitur in $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}216 + \sqrt{\sqrt{}}72. - .\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}216 - \sqrt{\sqrt{}}72$.

Propositio capitis huius prima, quæ apud Campanum est 72.

Si linea de linea demat ur, fuerintq; ambe potentialiter incommensurabiles, superficiemq; rationalem continentes, quadrataq; earum pariter accepta sint mediale, linea relicta erit irrationalis, diceturq; Componens mediale cum rōnali.

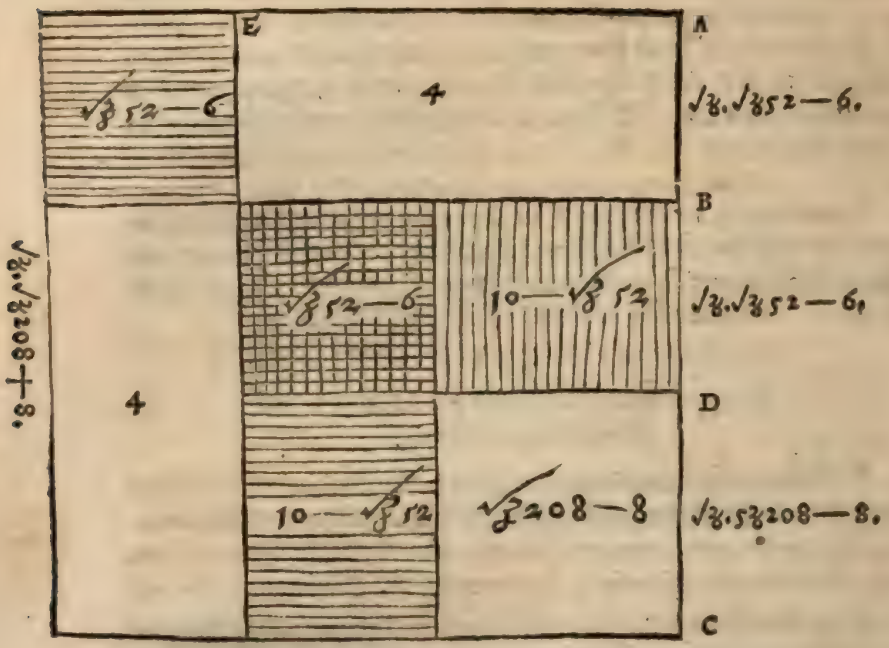
Vt posita linea B C, (sicut in sequenti figura patet) faciens $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}52 + 6$, si ab ea fuerit dempta A B, faciens $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}52 - 6$, relinquitur linea D C, quæ est irrationalis, diciturq; Componēs mediale cum rationali. Facit enim D C, $\sqrt{\sqrt{}}.\sqrt{\sqrt{}}208 - 8$.

Vides autem descriptionem linearum A B & B C egregie depictam in ipsa figura quadrata: scilicet potentiam A B uides esse $\sqrt{\sqrt{}}52 - 6$, & potentia B C est $\sqrt{\sqrt{}}52 + 6$. Hæ certe potentia sunt incommensurabiles.

Deinde uides in figura, ut A B & B C (cum B C sit æqualis ipsi A E) contineant hanc superficiem rationalem 4.

Demum (cum $. + 6$ & $. - 6$ se mutuo tollant) uides quadrata earum hæc, $\sqrt{\sqrt{}}52 + 6$, & $\sqrt{\sqrt{}}52 - 6$, additione sui facere $\sqrt{\sqrt{}}208$.

$\sqrt{8}.\sqrt{852}-6.+.\sqrt{8}.\sqrt{852}+7.$



Propositio capitis huius secunda, quæ apud Campanum est 78.

¶ Linea componens mediale cum rationali, coniungi non potest, nisi uni tantum, vt sub earum termino fiant, que erant ante separationem.

Vt hæc linea D C (in hac etiã figura) faciens $\sqrt{8}.\sqrt{8208}-8$, quæ est componens mediale cum rationali, solummodo potest addi huic lineæ A B, uel B D, faciente $\sqrt{8}.\sqrt{852}-6$, ita ut hoc quod additur, cum eo quod ex additione fit, sint sub termino descripto à propositione superiore, sub quo termino erant duæ lineæ illæ, quarum una subtrahebatur, uidelicet A B, & altera, i. B C, ea erat à qua fiebat subtractio.

Summa est. Posito hoc numero $\sqrt{\frac{1}{2}}.208 - 8$, hunc dabis solummodo $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}52 - 6$. ita ut aggregatum (quod fit ex additione amborum) cum $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}52 - 6$ cõtineat superficiem rationalem, & ex additione quadratorum eorum fiat numerus medialis quadrate.

Sic autem sunt addendi.

Primo oportet ut resoluas $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}208 - 8$, ea resolutione quam docet caput libri huius duodecimum, tunc uidebis eam sic resolutam, $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}52 + 6. - .\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}52 - 6$. Iam si addideris $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}52 - 6$, tunc fiet iste numerus $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}52 + 6$, qui cum eo qui addebatur, id est cum $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}52 - 6$, est sub termino descripto à propositione prima capitis huius.

Propositio capitis huius tertia, quæ apud Campanum est 90.

¶ Si fuerit superficies linea rationali in longitudine, residuoq; quinto contenta, latus eius tetragonicum erit Componens mediale cum rationali.

Vt sit superficies I (sicut uidetur in figura fol. 197) contenta sub linea L R faciente 12, & O L faciente $\sqrt{\frac{1}{2}}200 - 10$, erit L S (medium proportionale inter latera prædicta) cum sit latus tetragonicum quadrati $\mathcal{S}$, æqualis superficiei I, componens mediale cum rationali: facit autem L S, $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}28800 - 120$.

Ostendit igitur propositio hæc modum inueniendi Componentes mediale cum mediali, alium, à modo illo qui ostensus est propositione capitis huius prima.

Propositio capitis huius quarta, quæ apud Campanum est 96.

¶ Si ad lineam rationalem adiungatur superficies equalis quadrato linee constituentis mediale cum rationali, latus eius secundum erit residuum quintum.

Vt si ad lineam L R (figuræ superius indicatæ) adiungatur superficies I, tanquam ad latus suum unum (est aũt superficies I æqualis superficiei $\mathcal{S}$, & linea seu costa ipsius $\mathcal{S}$ est linea consti-

tuens seu componens mediale cum rationali) si fuerit L R rationalis, necesse est ut O L sit residuum binomiale quintum.

Est igitur propositio hæc conuersa præcedentis, docens inuenire quantitatem O L ex L S, quemadmodum præcedens docebat inuenire quantitatem L S ex quantitate O L. Vnde si L S faciat $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}28800 - 120$, faciet superficies $1.\sqrt{\frac{1}{2}}28800 - 120$, cum sit æqualis quadrato $\mathcal{G}$. Si ergo L R fecerit 12, faciet O L $\sqrt{\frac{1}{2}}200 - 10$, quod est residuum binomiale quintum. Patet ex diuisione $\sqrt{\frac{1}{2}}28800 - 120$ per 12.

Propositio capitis huius ultima, quæ apud Campanum est 101.

QVælibet linea commensurabilis lineæ componenti mediale cum rationali, est componens mediale cum rationali.

Vt cũ linea aliqua lõgitudine sua fecerit $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}28800 - 120$ (qui numerus constituit componẽtem mediale cum rationali) necesse est ut quælibet pars eius numerans eam, sit linea componens mediale cum rationali. Item quamlibet lineam, quæ ab ea numeratur, aut à parte eius aliquota, oportet esse lineã componentem mediale cum rationali.

Non autem quælibet linea sub numero figurato ad similitudinem illius, erit componens mediale & rationale. Neq; enim numerus ille $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}1152 - 32$, constituit componentẽ mediale cum rationali. Sed constituit residuum bimedialis primi posterioris subspeciei, uidelicet $\sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}512 - \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}128$.

De lineis componentibus mediale cum mediali.

Caput XXVIII.

ANDEM nouissima species linearum irrationalium uenit tractãda per propositiones suas. Hæc appellatur species componentium mediale cum mediali, & opponitur speciei potentium duo medialia, quẽadmodum superior species opponitur speciei potẽtium mediale & rationale. Et quemadmodum species

cies illa superior subdiuidit in duas alias species: ita hæc quoq; subdiuiditur in duas alias species.

Quædam enim lineæ componentes mediale cum mediali sunt, quarum quælibet resoluatur in potentem duo medialia, & componentem mediale cum mediali. Et tales sunt, primæ cõponentes mediale cum mediali: ut est hæc, $\sqrt{.}\sqrt{56} - \sqrt{32}$, quæ resoluitur in $\sqrt{.}\sqrt{14} + \sqrt{6}. - .\sqrt{.}\sqrt{14} - \sqrt{6}.$

Quædam uero dicuntur, secundæ componentes mediale cũ mediali, quarum quælibet resoluitur in potentem mediale & rationale, & componẽrem mediale cum rationali: ut est huius numeri linea, $\sqrt{.}\sqrt{68} - \sqrt{8}$, quæ resoluitur in

$$\sqrt{.}\sqrt{17} + 3. - .\sqrt{17} - 1.$$

Sed de his forte latius dicam inferius capite trigesimo.

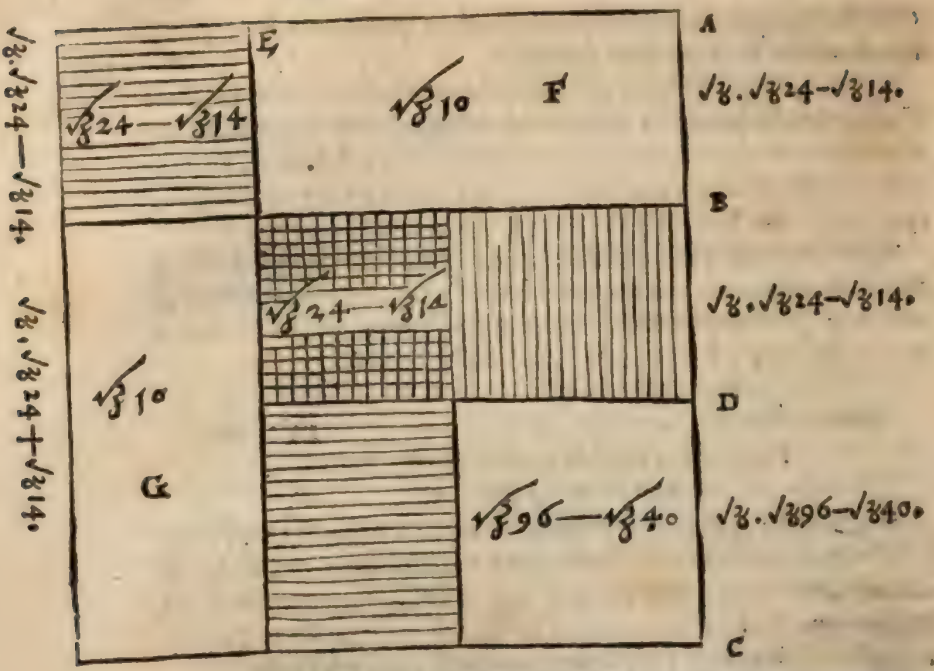
Propositio capitis huius prima, quæ est apud Campanum 73.

Si linea à linea detrahatur, fuerintq; potentia incõmensurabiles superficiemq; medialem continentes, quadrataq; earum pariter accepta fuerint mediale, incommensurabile duplo superficiei alterius linee in alterã, relicta linea erit irrationalis, dicenturq; Componens mediale cum mediali.

Vt posita linea B C (quæ in sequenti figura ostenditur) faciens $\sqrt{.}\sqrt{24} + \sqrt{14}$, demat ur ab ea A B faciens $\sqrt{.}\sqrt{24} - \sqrt{14}$, tunc relinquitur linea D C faciens $\sqrt{.}\sqrt{96} - \sqrt{40}$, quæ est irrationalis componens mediale cum mediali. Vide autem ut descriptio linearum illarum (id est, illius quæ demitur, & illius à qua demitur) depicta sit in figura hac, quæ mox sequitur.

Scilicet, potentia A B est $\sqrt{24} - \sqrt{14}$, & potentia ipsius B C est $\sqrt{24} + \sqrt{14}$: harum maior diuisa per minorem facit quotientem irrationalem, id quod signum est certum eas esse incõmensurabiles. Secundo, A B & B C cõtinent superficiem $\sqrt{10}$: est enim B C æqualis A B, ut uides in figura. Itaq; $\sqrt{10}$ est superficies medialis. Tertio, $\sqrt{24} - \sqrt{14}$, & $\sqrt{24} + \sqrt{14}$ (quæ sunt q̃drata linearum A B & B C) parit accepta, faciũtq; hoc mediale $\sqrt{96}$.

Et



Et est hoc mediale incommẽsurabile aggregato ex superficiebus F & G, sicut est incommensurabile ad utranq; superficiem solitarie acceptam: de qua re in superioribus satis dixi. Facit autem aggregatum ex F & G, √840, cui incommensurabile est √896.

Propositio capitis huius secunda, quæ apud Campanum est 79.

¶ Linee componenti mediale cum mediali, nequit iungi linea, nisi vna tantum, vt sub earum termino fiant que erant ante separationem.

Vt hæc linea D C (huius itidem superioris figuræ) faciens √8.√896-√840, quæ est linea componens mediale cũ mediali, nequit iungi aliqua alia linea, cũ qua talis ẽ faciat √8.√824—√814, ut est

ut est A B seu B D. Talis autem linea, si iungatur eidem D C, efficitur longitudo faciens $\sqrt{\sqrt{24}+\sqrt{14}}$. Sunt autem illæ eædem, quæ erant antequam fieret separatio seu demptio unius ab altera, & impossibile est ut aliqua alia linea ei iungatur tali ratione prædicta.

Sic autem additur $\sqrt{\sqrt{24}-\sqrt{14}}$, ad $\sqrt{\sqrt{96}-\sqrt{40}}$.

Posterior illa $\sqrt{\sqrt{96}-\sqrt{40}}$, resoluitur in

$\sqrt{\sqrt{24}+\sqrt{14}}.-.\sqrt{\sqrt{24}-\sqrt{14}}$.

Qua sic resoluta, additur. $+\sqrt{\sqrt{24}-\sqrt{14}}$

ad. $-\sqrt{\sqrt{24}-\sqrt{14}}$.

tunc remanet $\sqrt{\sqrt{24}+\sqrt{14}}$ additionis huius aggregatum.

Propositio capitis huius tertia, quæ apud Campanum est 91.

¶ Si superficies linea rationali residuoq; sexto contineatur, latus tetragonicum quod super eam potest, cõprobatur esse constituens totum mediale cum mediali.

Vt superficies I (quã in figura suprà posita folio 197 uides) cõtenta sub linea rationali L R faciente 12, & linea O L residuo sexto, faciente $\sqrt{10}-\sqrt{6}$, cum faciat $\sqrt{1440}-\sqrt{864}$, latus tetragonicum L S, quod illam superficiem potest (cum superficies $\mathcal{F}$ sit æqualis superficiei I) est linea constituens seu componens mediale cum mediali.

Est igitur hæc probatio, modus alius inueniendi lineas componentes mediale cum mediali, ab illo qui propositione capitis huius prima ostensus est.

Propositio capitis huius quarta, quæ apud Campanum est 97.

¶ Si ad lineam rationalem adiungatur superficies equalis quadrato linee componentis mediale cum mediali, latus eius alterum erit residuum sextum.

Vt superficies I (quæ iam paulo superius indicata est) facit $\sqrt{1440}-\sqrt{864}$, & tantum etiam facit superficies $\mathcal{F}$, ut uideas alteram alteri esse æqualem, uideasq; L S esse lineã quadrati $\mathcal{F}$,

esse'q; propterea lineam componentem mediale cum mediali; faciens √ȝ.√ȝ1440—√ȝ864. Cumq; L R latus unum superficiei 1, faciat 12, id est, sit longitudine rationalis, necesse est latus eius alterum esse residuum binomiale sextum. Et est hæc propositio conuersa prioris.

Propositio capitis huius ultima, quæ est apud Campanum 102.

¶ Quelibet linea commensurabilis lineæ constituenti mediale cum mediali, est linea constituens mediale cũ mediali.

Vt cum linea aliqua longitudine sua fecerit √ȝ.√ȝ1440—√ȝ864, necesse est quamlibet lineam uel numerantem eam, uel numeratam ab ea, esse lineam componentem mediale cum mediali: ut sunt hæ duæ, √ȝ.√ȝ90—√ȝ54.

√ȝ.√ȝ23040—√ȝ13824 &c.

De Epilogo decimi libri Euclidis. Caput XIX.

VLTIMO tandem loco propositionum decimi Euclidis, ueniunt tractandæ propositiones Epilogi ipsius. Susceperat autem ille ex infinita confusione irrationalium linearum, tredecim species tractandas compẽdio pulcherrimo, quibus duas species linearum rationalium præmiserat, tanq; initium ratiocinationis suæ. Ad has etiam usus est superficiebus, & ijs quidẽ usus est quàm parcissime. Producit autem ex superficiebus rationalibus solitarie positis, duas species linearum rationalium, ut uidebimus.

Propositio capitis huius prima.

¶ Si fuerit superficies sub lineis longitudine rationalibus contenta, linea potens in superficiem illam aliqua erit duarũ linearum rationalium, aut rationalis longitudine, aut rationalis potentia tantum.

Et sic

aliquem, qui ipsum numeret, & utriq; horum, uidelicet diuisori atq; quotienti, præpone signū radicale zensizensicum. Vt recepto hoc numero zensico seu quadrato 144, diuido eum per 8, tunc prouenit 18. Itaq; $\sqrt{\sqrt{18}}$ & $\sqrt{\sqrt{8}}$, pertinent ad caput hoc: ut quorum separatio unius ab altero faciat $\sqrt{\sqrt{18}} - \sqrt{\sqrt{8}}$, uidelicet residuum bimediale secundum. Sic si diuidas 144 per 6, efficies modo prædicto $\sqrt{\sqrt{24}} - \sqrt{\sqrt{6}}$, &c.

Cuncti uero numeri mediales zensizensice duo, quorū multiplicatio unius per alterum constituit numerum rationalem, pertinent ad caput præcedens. Horum inuentio posita est in capite illo præcedente.

Deinde cuncti numeri mediales zensizensice duo, quorum diuisio unius per alterum constituit numerum rationalem, pertinent ad caput 16. ut quorum & compositio & separatio, nihil aliud constituit quàm mediale. Horum inuentio satis indicata est propositione quinta capitis 16.

Demum cuncti numeri mediales zensizensice duo, quorum multiplicatio unius per alterum cōstituit numerum medialem zensizensice. Horum & compositio & separatio improbatur. Et tales mediales etiam diuisione unius per alterum constituunt numerum medialem zensizensice: usum tamen habent, quem capite 19 libri huius indicaui. Et (ut etiam de inuentione eorum dicam) omnes rationales numeri duo, quorum proportio non est tanquam numeri quadrati ad numerum quadratū, si uterq; eorum recipiat signum radicale zensizensicum, constituunt mediales duos tales.

Propositio capitis huius prima, quæ apud Campanum est 70.

SI linea de linea secetur, fuerintq; ambe mediales, potentia tantum commensurabiles, continentesq; mediale, relicta linea erit irrationalis, dicetur'q; residuū mediale secūdum.

Vt positis his duobus medialibus, $\sqrt{\sqrt{96}}$, & $\sqrt{\sqrt{54}}$, descriptis per propositionem hanc: Si $\sqrt{\sqrt{54}}$ secetur de $\sqrt{\sqrt{96}}$, rema-

net √96 — √54, quod est residuum bimediale secundum. Sed hoc etiam uide, √96 potentius est quàm sit √54 in quadrato lineæ repræsentãdæ ipsto numero √36, & talis linea commensurabilis est longiori mediali in longitudine: scilicet √36 & √96 commensurabiles sunt utroq; modo commensurabilitatis. Ideo √96 — √54, est sub specie priore residuorum bimedialium secundorum.

Aliud exemplum, quod sit sub posteriore specie residuorum bimedialium secundorum, in quo portio longior sit potentior quàm altera illa quæ subtrahebatur, in quadrato lineæ incommensurabilis ipsi longiori (à qua fiebat subtractio) in longitudine: scilicet √108 & √48, sunt numeri mediales repræsentantes lineas, quales describit propositio hæc, cum √108 diuisus per √48 faciat √2¼, & alter multiplicatus per alterum faciat √72. Ideo si alter ab altero detrahatur, remanebit residuũ bimediale secundum, uidelicet √108 — √48.

Propositio capitis huius secunda, quæ apud Campanum est 76.

¶ Nulla linea residuo mediali secundo coniungi potest, vt sub termino earum fiant, nisi tantum ea, quæ ab ea ante separata erat.

Vt posito hoc residuo bimediali secundo √108 — √48, solũmodo hoc mediale √48 ei cõiungi potest, ut fiat √108: atq; ita post illam coniunctionem, hoc quod coniungebatur, & hoc quod ex coniunctione fiebat, fiant sub termino earum, quæ ante separationem extabant. Ante separationem autem ponebantur √108, tanquam illud à quo fienda esset subtractio: & √48, tanquam illud quod esset subtrahendum.

Propositio capitis huius tertia, quæ apud Campanum est 88.

¶ Si linea rationali in longitudine residuo q; tertio contineatur, erit linea super eam potens residuũ mediale secũdum.

Hoc

Hoc eſt, lineæ reſiduales bimediales ſecundæ etiã alio modo inueniuntur, præter ſeparationem medialis à mediali. Scilicet, poſita ſuperficie reſiduali binomiali tertia, quæro radicem quadratam de eo, & hæc erit neceſſario reſiduũ bimediale ſecundũ. Vt radix quadrata de $\sqrt{\text{ɣ}}192 - \sqrt{\text{ɣ}}180$, facit $\sqrt{\text{ɣɣ}}75 - \sqrt{\text{ɣɣ}}27$.

Sic ſi ſuperficies contineatur ſub linea rationali faciente 2, & reſiduo binomiali tertio faciente $\sqrt{\text{ɣ}}48 - \sqrt{\text{ɣ}}45$, quæro mediũ proportionale inter latera illa, & erit illud linea potens ſuper illam ſuperficiem contentam: ſcilicet 2 in $\sqrt{\text{ɣ}}48 - \sqrt{\text{ɣ}}45$ multiplicata, faciũt $\sqrt{\text{ɣ}}192 - \sqrt{\text{ɣ}}180$. Cuius radix quadrata, eſt linea illa potens in ſuperficiem iſtam, ut uidimus.

Propoſitio capitis huius ultima, quæ apud Camp. eſt 94.

¶ Si ſuperficies equalis quadrato reſidui medialis ſecũdi applicata fuerit ad lineam in longitudine rationalem, alterũ latus eius erit reſiduum tertium.

Si, inquit, ſuperficies æqualis quadrato reſidui bimedialis ſecundi, applicata fuerit ad lineam in longitudine rationalem. Hoc eſt, potentia lineæ reſidualis bimedialis ſecundæ, talis eſt ſuperficies, quæ diuiſa per numerum rationalem, faciat numerum reſidualem binomialem tertiam. Vt $\sqrt{\text{ɣɣ}}75 - \sqrt{\text{ɣɣ}}27$ in ſe, facit $\sqrt{\text{ɣ}}192 - \sqrt{\text{ɣ}}180$. hæc diuiſa per 2, facit $\sqrt{\text{ɣ}}48 - \sqrt{\text{ɣ}}45$.

Item $\sqrt{\text{ɣɣ}}108 - \sqrt{\text{ɣɣ}}48$ in ſe, facit $\sqrt{\text{ɣ}}300 - \sqrt{\text{ɣ}}288$, hæc diuiſa per 2, facit $\sqrt{\text{ɣ}}75 - \sqrt{\text{ɣ}}72$ reſiduum binomiale tertium.

De lineis minoribus, Caput XXVI.

EX numeris repræſentantibus lineas maiores, facile fiunt numeri repræſentantes lineas minores. Scilicet hoc fit, ſi deleto ſigno additorum reperto, ponas loco eius ſignum ſubtractorum: Vt ex $\sqrt{\text{ɣ}}.6 + \sqrt{\text{ɣ}}12$, repræſentante lineam maiorem, fit $\sqrt{\text{ɣ}}.6 - \sqrt{\text{ɣ}}12$, repræſentans lineam minorem.

cuius radix q̃drata seu latus tetragonicū facit $\sqrt{\sqrt{384}} - 16$, quod est linea componens mediale cum rationali.

Propositio capitis huius septima, quæ apud Campanum est 105.

¶ Si superficies medialis de superficie mediali detrahatur, fuerintq; superficies incommensurabiles, linea potens in relictã superficiem, alterutra erit duarum irrõnalium lineaꝝ, aut residuũ mediale secõm, aut cõponens mediale cũ mediali.

Ratio est: quia talis superficies, aut est residualis binomialis tertia, aut residualis binomialis sexta.

Si superficies illa fuerit residualis binomialis tertia, tũc linea potens in G, erit residuum bimediale secundum. Vt si F G fecerit $\sqrt{432}$, & E fecerit $\sqrt{384}$, subtrahaturq; E de F G, remanet G radicem faciens $\sqrt{\sqrt{192}} - \sqrt{\sqrt{48}}$, quæ est residuum bimediale secundum.

Si uero superficies illa fuerit residualis binomialis sexta, tunc linea potens in G erit componẽs mediale cum mediali. Vt si F G fecerit $\sqrt{192}$, & E fecerit $\sqrt{128}$, subtrahatq; E de F G, tunc remanet G radice sua faciens $\sqrt{\sqrt{192}} - \sqrt{128}$, quæ est componens mediale cum mediali.

Propositio capitis huius octaua, quæ apud Campanum est 67.

¶ Cum posita fuerit linea binomialis, ceteræq; irrationales sequentes eam, non erit earum aliqua sub termino alterius.

Vt, Linea binomialis, $5 + \sqrt{21}$.
Bimedialis prima, $\sqrt{\sqrt{8}} + \sqrt{\sqrt{2}}$.
Bimedialis secunda, $\sqrt{\sqrt{18}} + \sqrt{\sqrt{8}}$.
Linea maior, $\sqrt{6} + \sqrt{12}$.
Potens mediale & rationale, $\sqrt{\sqrt{8}} + 2$.
Potens duo medialia, $\sqrt{\sqrt{12}} + \sqrt{6}$.
Residualis binomialis, $5 - \sqrt{21}$.
Residualis bimedialis prima, $\sqrt{\sqrt{8}} - \sqrt{\sqrt{2}}$.
Residualis bimedialis secunda, $\sqrt{\sqrt{18}} - \sqrt{\sqrt{8}}$.

Linea

Linea minor, $\sqrt{\frac{}{}}.6 - \sqrt{\frac{}{}}12.$
Componens mediale cum rationali, $\sqrt{\frac{}{}}.\sqrt{\frac{}{}}8 - 2.$
Componens mediale cum mediali, $\sqrt{\frac{}{}}.\sqrt{\frac{}{}}8 - \sqrt{\frac{}{}}6.$

Nulla harum linearum potest esse sub specie alterius illarum. Sententia ergo propositionis huius est: Species irrationalium linearum esse impermixtas.

Propositio capitis huius ultima, quæ & apud Campanum est ultima.

¶ Cum possibile sit seriem linearum irrationaliū in infinitum produci, non est possibile vllam earum conuenire in termino et ordine cum ea que precesserit.

Sententia est, esse præter prædictas species, alias species innumerabiles linearum irrationalium, quæ non possint permisceri aut confundi: sed ita contra se esse distinctas, ut quælibet suas proprias lineas sub se contineat. De qua re dictum est capite libri huius sextodecimo.

De propositionibus quibusdam in decimo Euclidis desideratis. Cap. xxx.

AD epilogum Euclidis adiiciendas censeo propositiones quatuor desideratas in decimo, ut quarū obmissione sint neglectæ octo subspecies linearū irrationalium: uidelicet duæ sub specie potētium mediale et rationale, item duæ sub specie potentiū duo medialia, deinde duæ sub specie componentium mediale cum rationali, item duæ sub specie componētium mediale cum mediali. Illas igitur propositiones oportet me hoc loco ponere, ut notiores fiant paulisper species illæ 4 ab Euclide obmissæ.

Propositio capitis huius prima.

¶ Duas lineas inuenire potentia incommensurabiles, superficiemq; rationalem continentes, quarum quadrata pariter

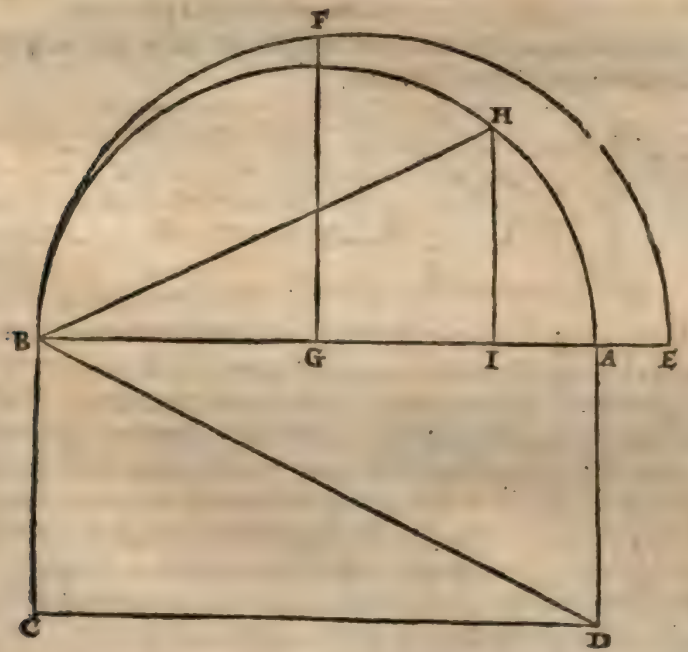
ter accepta sint mediale, quarumque longior possit mediale et rationale.

Hac propositione significatur species prima subdiuisionis illius, qua potētes mediale & rōnale subdiuidūtur in spēs duas.

Est autem species illa talium linearum irrationalium, quæ cum sint potentes rationale & mediale, resoluuntur in potentē rationale & mediale, atq; in componentē mediale cum rōnali.

Sunt igitur partes illæ compositionis quales describit propositio hæc huiusmodi, ut constituant speciem primam linearū potentium rationale & mediale.

Modus autem inuētionis earum positus est superius capite uigesimoprimo libri huius, cuius figurā inuentionis propriam illic posui, uidelicet hanc.



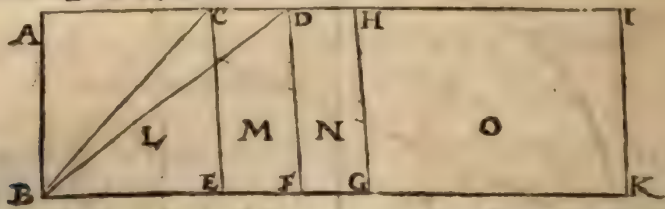
Hæc figura te nunquam fallet. Vt ſit B C 8, erit B A 16, & B D ſeu B E $\sqrt{\ }$ 320: erit q̃ B G 8, & G E $\sqrt{\ }$ 320 — 8. Itaq̃ G F faciet $\sqrt{\ }$. $\sqrt{\ }$ 20480 — 64, & B H faciet $\sqrt{\ }$. $\sqrt{\ }$ 20480 + 64. Et illæ ſunt duæ lineæ quales requirit propoſitio hæc prima capitis huius. Conſtituunt enim lineam ſpeciei illius primæ potentium mediale & rationale, uidelicet lineam conſtituunt compoſitam ex B H & F G, facientem $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\ }$ 8 1920 + 256. Et ſic de ſimilibus ſpeciei huius exemplis.

Propoſitio capitis huius ſecunda.

¶ Duas lineas inuenire, potentia incommenſurabiles, ſuperficiem q̃ rationalem continentes, quarũ quadrata pariter accepta ſint mediale, quarum q̃ longior poſſit duo medialia.

Hac propoſitione ſignificantur partes compoſitionis, linearum ſecundæ ſpeciei potentium mediale & rationale.

Modus autem inuentionis ſubſpeciei illius, qui nunquam fallat, tali figura repræſentatur.



Recipe quadratum coſtæ rationalis in longitudine, conſtituteq̃ rectangulum altera parte longius, quod contineatur ſub duabus lineis: quarum una ſit coſta recepti quadrati, & altera ſit diameter eiuſdem quadrati. Deinde cõſtitue aliud quadrangulum altera parte longius, quod contineatur ſub coſta quadrati recepti, & ſub diagonali prioris quadranguli rectanguli. Et ſi ex duobus quadrangulis illis rectangulis, fiat unum quadrangulum rectangulum, tunc linea potens in totam ſuperficiem compoſitam, erit portio maior inuentionis illius quam requirit propoſitio hæc ſecunda capitis huius.

Vt

Vt si A B (costa quadrati A B E C) faciat 8, faciet B C diameter eius $\sqrt{\ }128$, cui æquatur B F. Est ergo quadrangulum A B F D quadrangulum altera parte longius primum, ex inueniendis quadrangulis, faciens $\sqrt{\ }8192$. Deinde diagonalis eius B D, faciens $\sqrt{\ }192$, æquat sibi lineam B G. Vnde quadrangulũ contentum sub A B & B G seu A H, constituit quadrangulũ rectangulum secundo loco inueniendũ, quod est A H G B. Composita igitur quadrangula illa duo L M, & L M N constituũt quadrangulum L M N O. Vnde linea potẽs in superficiem L M N O, hoc est, medium ꝓportionale inter A B & A I, facit $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }12288 + \sqrt{\ }8192$: facit enim A H $\sqrt{\ }192$, & H I facit $\sqrt{\ }128$ (est enim A D æqualis H I). Et quia D H est differentia inter A H & H I, quemadmodum superficies N est differentia inter L M N & O superficies, ideo D H facit $\sqrt{\ }192 - \sqrt{\ }128$: & medium proportionale inter F D & D H, est linea potens in superficiem N. Vnde cum superficies N faciat $\sqrt{\ }12288 - \sqrt{\ }8192$, facit linea potẽs in eam $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }12288 - \sqrt{\ }8192$.

Lineæ igit̃ $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }12288 + \sqrt{\ }8192$, & $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }12288 - \sqrt{\ }8192$, sunt tales, quales requirit propositio hæc secunda. Constituũt enim potentem rationale & mediale, cum tamẽ maior portionum sit componens duo medialia. Hanc autem lineam componunt duæ portiones inuentæ, $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }49152 + 128$.

De duabus alijs subspeciebus pertinentibus ad duas ꝓpositiones capitis huius superiores.

Quemadmodum autem species potentium rationale & mediale duas habet subspecies, ita species componentium mediale cum rationali duas habet subspecies nascẽtes ex duabus superioribus subspeciebus, per subtractionem portionis minoris à portione maiore, ut notum est.

Vt si subtrahatur $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }20480 - 64$, de hac portione $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }20480 + 64$, tunc relinquitur $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }81920 - 256$, quæ est prima componens mediale cum rationali. Sic si subtrahat̃ $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }12288 - \sqrt{\ }8192$, de $\sqrt{\ }.\sqrt{\ }12288 + \sqrt{\ }8192$, tunc relin

quitur $\sqrt{8}.\sqrt{849152} - 128$. quæ est linea secunda componens mediale cum rationali.

Facile iam est uidere, ut secundum ista prædicta formandæ sint propositiones quatuor, de constitutione quatuor specierū prædictarum, quas breuitatis gratia hic obmisi.

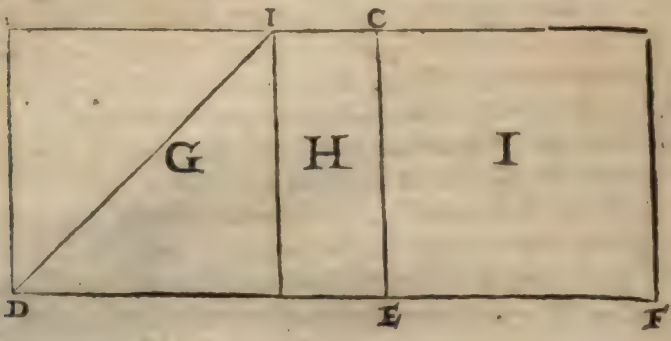
Propositio capitis huius tertia.

¶ Duas lineas inuenire, potentia incommensurabiles, superficiemq; medialem continentes, quarum quadrata pariter accepta sint mediale, incommensurabile duplo superficiei vnius in alteram, et quarum longior possit duo medialia.

Hac ꝓpositione describuntur lineæ seu portiones, constituentes additione sui, lineas primas potentes duo medialia. Sicut enim lineæ potentes mediale & rationale subdiuidūtur in primas & secundas, ut dictum est superius, sic etiam potentes duo medialia subdiuiduntur in primas & secundas.

Sunt igitur primæ potentes duo medialia, quæ resoluuntur in duas lineas quarum longior sit potens duo medialia, & breuior sit componens mediale cum mediali.

Huius uero speciei portiones sic inueniuntur. Recipe quadratum costæ quæ sit linea Medialis, & constitue quadrangulū rectangulum altera parte longius, quod sub duabus lineis contineatur, quarum una sit costa quadrati illius recepti, & altera



sit

sit diameter eiusdem quadrati, & tali quadrangulo iunge quadratum receptum, ut ex utroq; fiat unum quadrangulum, sicut hic uides exemplum eorum.

Obserua A C E D (i. G H) esse quadrangulum contentum sub costa quadrati J, atq; sub diametro eius, scilicet D I, diameter est æqualis lineæ D E. Et G est æquale quadrato J &c.

Sit igitur A D in longitudine sua $\sqrt{\frac{1}{2}}6$, tunc D I seu A C faciet sua longitudine $\sqrt{\frac{1}{2}}24$, & C B faciet etiam $\sqrt{\frac{1}{2}}6$. Atq; ita superficies G H, faciet $\sqrt{\frac{1}{2}}12$, & superficies J, faciet $\sqrt{\frac{1}{2}}6$. Et sic linea potens in totam superficiem illam compositam, i. mediũ proportionale inter A D & A B, erit linea lõgior inter duas illas quas requirit, ppositio hæc, & breuior erit mediũ proportionale inter I C & C E.

Medium autem ,pportionale inter A D & A B facit $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}12 + \sqrt{\frac{1}{2}}6$.

Et medium proportionale inter I C & C E, facit $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}12 - \sqrt{\frac{1}{2}}6$.

Et illæ duæ lineæ constituunt sui additione directa $\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}}48 + \sqrt{\frac{1}{2}}24$, quæ est linea potens duo medialia prioris speciei, ut patet ex partibus componentibus ipsam.

Propositio capitis huius quarta.

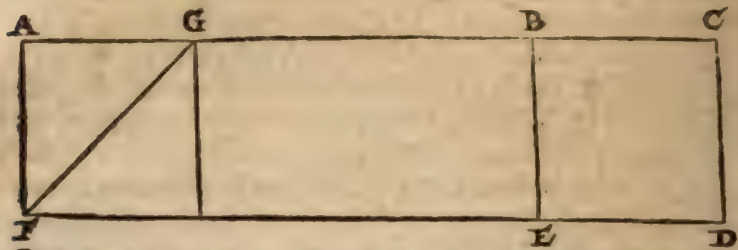
¶ Duas lineas inuenire, potentia incommensurabiles, superficiemq; medialem continentes, quarũ quadrata pariter accepta sint mediale, incõmensurabile duplo superficiei contẽte sub ambab9, et quarũ lõgior possit rationale et mediale.

Hæc est ultima ,ppositio capitis huius, quæ docet inuenire partes duas constituentes lineã secundã potentẽ duo medialia.

Est autem linea secunda potẽs duo medialia, talis, Vt resoluatur in duas lineas alias, quarum longior sit potens rationale & mediale, & breuior sit componens mediale cum rationali.

Sic uero inueniuntur partes illæ. Recipe quadratũ costæ rationalis in longitudine, & constitue quadrangulum rectangulum altera parte longius, quod sub duabus lineis contineatur,

quarum una sit costa quadrati recepti, & altera sit dupla ad diametrum quadrati eiusdem, & tali quadrāgulo iunge quadratum receptum, ut ex utroq; fiat unum quadrangulum, sicut hic uides in exemplo.



Sit igitur A F ut 6, tunc A B faciet √ȝ 288, & B C, faciet 6, & G B faciet √ȝ288 — 6, quemadmodum A C facit √ȝ 288 + 6. Medium ergo ꝓportionale inter A F & A C faciet √ȝ.√ȝ 10368 + 36. Et medium ꝓportionale inter G B & B E faciet √ȝ. √ȝ 10368 — 36. Et illa duo media proportionalia sunt exemplū propositionis ultimæ capitis huius. Componunt enim lineam potentem duo medialia secundæ speciei, uidelicet hanc, √ȝ 41472 + √ȝ 36288.

De duabus subspeciebus linearum componentium mediale cum mediali.

Si ponantur duæ lineæ respondentes propositioni capitis huius tertiæ, subtrahaturq; breuior de lōgiore, remanebit linea componens mediale cum mediali speciei prioris. Et si ponātur duæ lineæ respōdentes ꝓpositioni capitis huius quartæ, subtrahaturq; breuior de longiore, remanebit linea componens mediale cum mediali posterioris speciei. Exemplum prioris,

Vt √ȝ.√ȝ12 — √ȝ6. de √ȝ.√ȝ12 + √ȝ6.
relinquit √ȝ.√ȝ48 — √ȝ24.

Exemplum posterioris, Vt

√ȝ.√ȝ10368 — 36. de √ȝ.√ȝ10368 + 36.
relinquit √ȝ.√ȝ41472 — √ȝ362888.

De re-

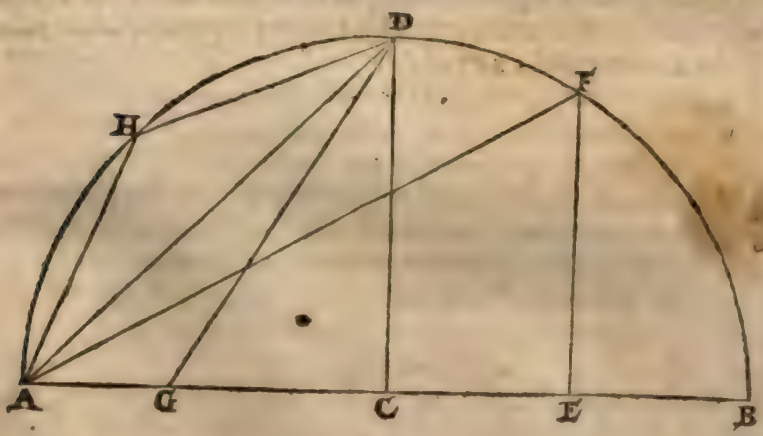
De resolutione linearum irrationalium in lineas rationales. Caput XXXI.

LIneæ irrationales multæ, sunt resolutæ in lineas rationales à Ptolemæo in Almagesto, ubi scientiã sinuum, seu chordarũ & arcuum tractat, ut libro primo capite nono fecit. Non quidem præcise (quod ipse ibidem fatetur) neq; adeo propinque, ut propinquius ad præcisionem nemo possit accedere, cum utrunq; sit impossibile, sed ut pro suo instituto opere sufficere uidit, ut uidebimus.

Propositio capitis huius, ex lib. 1. cap. 9. Almagesti Ptolemæi sumpta.

Data circuli diametro, latera decagoni, hexagoni, pentagoni, tetragoni, octagoni, atq; trigoni, isopleurorum, eidem circulo inscriptorum reperire.

Hanc propositionem Ioannis de monte regio, pro negotio præsenti cõmodissimam, uideamus per exemplũ, quod ipse



quoq;

quoq; iuxta Ptolemæum tractat. In qua tractatione nostrum erit, obseruare, qua ratione illi, ex irrationalibus numeris linearum, fecerint numeros rationales.

Primo posito semicirculo super diametro A B, faciente partes (inter se æquales) 120. erigitur orthogonalis, à medio puncto diametri, uidelicet C D, quæ linea, cum sit semidiameter circuli, æquabitur lateri hexagoni, circulo inscribendi. Et cum A C & C D intercipiant quadrātem circuli, necesse est A D esse latus tetragoni circulo inscribendi, atq; A H, item H D esse latus octagoni inscribendi eidem circulo.

Secundo orthogonalis tracta à medio puncto semidiametri C B. i. E F, cum abscindat partē quartā diametri, necessario est dimidia pars lateris trigoni (ubiq; subintellige, ipso pleuri, seu æquilateri) quare linea A F erit latus trigoni circulo inscribēdi.

Tertio recipitur mensura inter puncta E D, quæ signatur de puncto E uersus A. Et fit E G, æqualis trahendæ E D. Itaq; linea G D, æquabitur lateri pētagoni circulo inscribendi. Et G C æquabitur lateri decagoni circulo inscribendi, ut docet ppositio decima, tertijdecimi Euclidis.

Cum igitur semidiameter faciat 60. i. latus hexagoni æquilateri circulo inscribendi, facit latus trigoni æquilateri, $\sqrt{\frac{3}{4}}$ 10800. Et latus tetragoni, $\sqrt{\frac{3}{4}}$ 7200.

Latus uero pentagoni, $\sqrt{\frac{3}{4}}$ 9000 — $\sqrt{\frac{3}{4}}$ 16200000.

Et latus octagoni, $\sqrt{\frac{3}{4}}$ 7200 — $\sqrt{\frac{3}{4}}$ 25920000.

Et latus decagoni, $\sqrt{\frac{3}{4}}$ 4500 — 30.

Harum linearum numeros singulos resoluit Ptolemæus in suo magesto, in rationales. Qui & si regulā resolutionis nō ponat, tamen ex re ipsa facile erat illam reperire.

Regula resolutionis numerorum irrationalium, in numeros rationales, quā Ptolemæum usum fuisse uidemus.

Extrahe radices quae signa radicalia signāt esse extrahēdas, et residuū multiplica per 60, productumq; diuide per duplum

duplum radicis inuentæ, ita tamen vt post diuisionem subtrahas quotientem à residuo remanente.

Rationem regulæ huius facile ostendere possum in numeris rationalibus. Vt sit extrahenda radix quadrata de 144.

Volo recipere pro radice numeri illius 9, quæ in se multiplicata facit 81. Subtraho igitur 81 de 144, tũc remanet 63. Diuido igitur 63 per duplum radicis inuentæ, id est per 18, facit 3 addenda radici (ut uides in pictura figuræ rationem horum omnium) restat igitur ut 3 in se multiplicata etiam subtrahas à residuo, ut ad figurã transeat eamq; suppleat.

Videamus nunc exempla Ptolemæi.

Exemplum primum de latere trigoni.

¶ Linea figuræ superioris A D, id est latus trigoni æquilateri circulo inscribendi, facit præcise $\sqrt{}$ 10800. Hunc numerum irrationalem sic resoluo in rationalem. Primo extraho radicem quadratam de 10800, facit 103, & remanent 191, quæ multiplico per 60, & fiunt 11460, quæ diuido per 206 (cum ille numerus sit duplus ad (103) radicem inuentam, fiunt 55 minuta: integra enim illa residua quæ fuerant multiplicata per 60 fuerũt ea multiplicatione resoluta in minuta. Manent autem ex diuisione prædicta, in residuo 130 minuta, à quibus subtrahi debet quadratum quotientis, id est 55 minu. Faciunt autem 55 min. in se multiplicata, 3025 secunda, quæ subtrahe à 130 minutis, id est à 7800 secundis, tunc remanent 4775 secunda. Ea diuide per 206 diuisorem priorem, tunc inuenies 23 secunda &c.

Itaq; hunc numerum | integ. min. ſ. | 103. 55. 23. | inuenies à Ptolemæo poſitum pro chorda arcus 120 graduum, in cap. nono lib. 1. & in tabula arcuum & chordarum. Eſt autem arcus graduũ 120, tertia pars circumferentiæ circuli.

Exemplum ſecundum de latere tetragoni.

Latus tetragoni, id eſt linea A D, facit præciſe $\sqrt{}$ 87200. cuius radix facit 84, & remanent 144. Multiplicata 144 per 60, faciunt 8640, quæ diuiſa per duplum radicis, id eſt per 168, facit 51 minuta. Quæ in ſe multiplicata, faciunt 2601 ſecunda: quæ ſubtracta à 72 minutis, relinquunt 1719 ſecunda. Quæ diuiſa per 168, faciunt 10 ſecunda &c.

Itaq; hunc numerum | integ. min. ſecun. | 84. 51. 10. | uidebis à Ptolemæo poſitum pro chorda arcus graduum 90, qui arcus eſt quarta pars circuli.

Exemplum tertium de latere pentagoni.

Latus pentagoni, id eſt linea G D ſuperioris figuræ, facit præciſe $\sqrt{}$. 9000 — $\sqrt{}$ 16200000. Hic quæro primum de 16200000 radicem quadratam, eamq; radicem ſubtraho de 9000, & (propter ſignum radicale quod utriq; parti eſt commune) quæro etiam radicem quadratam de relicto: ſcilicet radix quadrata de 16200000, facit 4024. 55. 20. Ea uero radix ſubtracta de 9000, relinquit hunc numerum 4975. 4. 40.

Radix quadrata de 4975 facit 70, & remanent 75 integra, quæ reſoluta in minuta, faciunt 4500, quibus addo 4 minuta reſeruata. Atq; ita 4504 minuta diuido per 140 (id eſt, per duplum radicis) proueniuntq; 32 minuta, & remanent 24: quæ reſoluo in ſecunda, fiunt 1440 ſecunda. Quibus addo 40 ſecunda, ſuperius reſeruata, fiuntq; 1480 ſecunda. A quibus ſubtraho 1024 ſecunda, quæ proueniunt ex multiplicatione 32 minutorum in ſe (id eſt, quotientis ex diuiſione prouenientis) tunc remanent 456, quæ diuido per 140, tunc proueniunt 3 ſecunda.

Atq;

Atq; ita uides, certa calculationis ratione, resolutũ numerum $\sqrt{\frac{3}{4}}.9000 - \sqrt{\frac{3}{4}}16200000$, in numerum quem Ptolemæus ponit, uidelicet

integra	minuta	secunda
70.	32.	3.

Et hunc numerum inuenies in tabula, tanquam chordam subtensam gradibus circumferentiæ 72. Sic enim gradus circumferentiæ 360, diuisi per 5, faciunt 72 gradus.

Exemplum quartum de latere octogoni.

Latus octogoni, id est lineæ A H seu H D superioris figuræ, facit præcise hunc numerum, $\sqrt{\frac{3}{4}}.7200 - \sqrt{\frac{3}{4}}25920000$. Quæro igitur radicem quadratam de 25920000, quæ facit integra 5091. minuta 10, secun. 7. Hæc radix subtracta de 7200, relinquit 2108 integ. 49 min. 53 sec. Radix autem quadrata de 2108 facit 45, & remanent 83 integra, quæ resoluũtur in 4980 minuta, quibus addo 49 minu. reseruata. Et sic ueniunt 5029 minuta diuidenda per 90 (id est, per duplum radicis) & ueniunt 55 minuta. Remanentq; 79 minuta. Hæc resoluta in secunda, faciunt 4740. Quibus addo 53 secũda reseruata. Atq; ita fiunt 4793 secunda, à quibus subtraho 3025 secunda, quæ prueniunt ex multiplicatione quotientis (id est 55 minutorum) in se. Remanent autem 1768 secunda, quæ diuido iterũ per 90, facit 19 secunda &c. Atq; ita inuentus est numerus iste,

integra	minuta	secunda
45.	55.	19.

Et istum ponit Ptolemæus pro chorda subtensa arcui 45 graduum circumferentiæ. Sunt enim 45 gradus octaua pars circumferentiæ.

Exemplum Ptolemæi quintum, de latere decagoni circulo inscribendi.

Latus decagoni circulo inscribendi (id est, linea figuræ datæ G C) facit præcise $\sqrt{\frac{3}{4}}4500 - 30$. Quæro igitur primo radicem quadratam de 4500, qua inuenta, subtraho ab ea 30, &

reliquum erit numerus rationalis, quem Ptolemæus ponit pro latere decagoni irrationali. Scilicet radix quadrati maximi, contenti sub 4500, facit 67. Remanent autem 11, quæ resoluta in minuta, faciunt 660. Diuisa uero per duplum radicis inuentæ (id est, per 134) fiunt 4 min. & remanent 124, quæ resoluuntur in secunda 7440, à quibus subtrahuntur 16 secunda prouenientia ex multiplicatione 4 min. in se. Remanent ergo 7424 diuidenda per 134, proueniuntq; 55 secunda. Atq; ita facit radix ex 4500. 67, 4, 55. Subtrahe tandem 30 integra de radice illa, tunc manet numerus Ptolemæi positus pro chorda subtensa 36 gradibus circumferentiæ circuli: qui facit

integra minuta secunda

37. 4. 55.

Et sic de alijs. Vt si resoluendus sit iste numerus irrationalis $\sqrt{34500} + 30$, facile scies ipsum resolui in hunc numerum rationalem,

integra minuta secunda

97. 4. 55.

Tot igitur exempla pro uarietate numerorum irrationaliū resoluendorum sufficient lectori studioso.

De numeris irrationalibus contractis ad corpora.

Caput XXXII. quod est ultimum libri huius secundi, continens omnia illa quæ & 13 Euclidis & 14 docent.

EX capite præcedenti bene animaduertet prudens lector, ut lineæ & numeri irrationales, accommodari debeant ad res astronomicas. Vt dum Ptolemæus in sequētibus docet, ex data alicuius arcus chorda, chordam reliqui arcus ipsius semicirculi, inuenire, id quod facile fit ex consideratione penultima primi Euclidis, & aliarum quarundam paucarū, ponitq; pro exemplo latus decagoni æquilateri circulo inscribēdi, lineamq; subtensam

tenſam uni angulorum pentagoni eidem circulo inſcribendi, qualium linearum uſus in libro tertio decimo, item in quarto decimo (ſi tamen ille eſt Euclidis) admodum frequens eſt: non obſcure ſignificare uoluit, quantam occaſionem rerum aſtronomicarum à ſe inuentarum, præbuerint ſibi propoſitiones Euclidis, de lineis & corporibus irrõnalium numeroꝝ ſcriptæ.

Propoſitio capitis huius ex 13 Euclidis ſumpta.

LAtera quinq; corporum regularium inuenire, per diametrum ſpheræ circumſcriptibilis ſingulis illis corporibus.

Sunt aũt quinq; corpora regularia illa: Tetrahedrum, id eſt corpus quatuor baſium, Hexahedrum, id eſt, corpus ſex baſiũ, Octahedrum, id eſt, corpus octo baſium, Dodecahedrũ, id eſt, corpus duodecim baſium, & Icoſahedrũ, id eſt, corpus uiginti baſium, corpora uidelicet æqualibus ſuperficiebus tecta. Et ab hac æqualitate ſuperficieꝝ ſeu baſiũ uocant̃ corpora regularia.

Figurationes uero horum corporum ſtudioſus Lector uidere poteſt in Geometria Alberti Dureri Noribergenſis, pictorum qui noſtra ætate floruerunt artificioſiſſimi, ibi pulchre ſuis propriis delineationibus oſtenduntur: & ideo hic omittuntur.

Habet autem tetrahedrum quatuor ſuperficies ſeu baſes triangulares æqualium laterum. Cuius figuram pulchre tibi monſtrabit chartula figuræ huiuſmodi, exciſa & complicata ſecundum lineolas ſuas.

Octohedrum habet octo ſuperficies triangulares æqualiũ laterum. Cuius figuram tibi cognitã faciet charta ſimili modo figurata & complicata, uti apud Durerium patet.

Icoſahedrum habet ſuperficies triangulares æqualium laterum uiginti: cuius figuræ delineatio patet apud eundem autorem, atq; ſi talem chartam figuraueris, exciſamq; complicaueris, figuram icoſahedri tibi monſtrabit.

Hexahedrum habet ſex ſupficies quadratas, cum ſit cubus. Cuius figuram tibi dabit talis charta, ſi item complicetur.

Sequitur tandem dodecahedrum, habens ſuperficies pentagonales.

gonales duodecim æquilateras: cuius figuræ copiam faciet tibi idem autor iam supradictus.

Quòd autem plures species aliæ corporum regularium non sint dabiles, sic demonstratur.

Primo. Certum est, quòd ad constitutionem anguli solidi, pauciores tribus angulis superficialibus, non possint concurrere: sicut ad constitutionem superficiei rectilineæ, pauciores tribus rectis lineis, non concurrunt.

Secundo. Certum est & hoc, quòd anguli superficiales, solidum angulum constituentes, si pariter accipiantur, seu addantur, minores sint quatuor angulis rectis necessario.

Tertio. Certum etiam est superficies æquiangulas inter se æquales solummodo constituere corpus regulare.

Præmissis iam ijs, uide quæ sequantur.

De trigonis æquiangulis.

¶ Cum unus angulus trianguli æquianguli faciat duas tertias unius recti, faciunt tres anguli tales, duos rectos. Possunt igitur tres anguli tales constituere angulum solidum, constituuntq; talem, quales requirit tetrahedrum, id est, corpus quatuor basium.

Item quatuor anguli superficiales tales, faciunt duos angulos rectos cum duabus tertijs unius recti. Possunt igitur talium quatuor, constituere angulū solidum, cum non attingant quantitatem quatuor angulorum rectorum, constituuntq; talem, quales requirit octohedrum, id est, corpus octo basium.

Item tales anguli quinq; superficiales, constituunt angulū solidum, cum ualeant tribus rectis & una tertia recti, ut ne illi quidem attingant quantitatem quatuor rectorum. Et tales seu tantos angulos requirit Icosahedrum, id est, corpus uiginti basium.

Sex autem anguli superficiales, quales seu quantos facit trianguluus æquiangulus, faciūt præcise quatuor angulos rectos, ideo impossibile est, tot posse angulorum talium concurrere

ad

ad constitutionem anguli solidi: multo minus possunt plures talium, constituere angulū solidum. Relinquitur igitur demonstratum, quòd sub superficiebus triangularibus non possit tegi corpus regulare, aliud, à speciebus tribus prædictis: scilicet corpus regulare rectum superficiebus triangularibus, aut erit corpus quatuor, aut octo, aut uiginti basium.

De quadrangulo æquiangulo & æquilatero.

¶ Cum angulus unus quadrati sit rectus, faciunt tres anguli eius, tres rectos, atq; ita quantitatem quatuor rectorum angulorum non attingūt, ideoq; tres anguli superficiales huiusmodi constituunt angulum solidum rectum, quales seu quātos requirit hexahedrum, i. corpus sex basium, seu cubus.

Quatuor aūt anguli recti, aut plures, non possunt cōstituere angulum solidum: ideo impossibile est, ut superficiebus quadratis pluribus quatuor, paucioribus'ue, tegi possit corpus aliquod regulare.

De pentagono æquiangulo.

¶ Cum uero angulus unus pentagoni æquianguli faciat rectum, cum parte eius quinta, faciūt tres anguli tales, tres rectos cum tribus quintis unius recti. Et cum illi quātitatem quatuor angulorum non attingant, mirum non est q; tres anguli tales constituāt angulum solidum. Constituunt aūt talem solidum, quales aut quantos requirit dodecahedrū, i. corpus 12 basium.

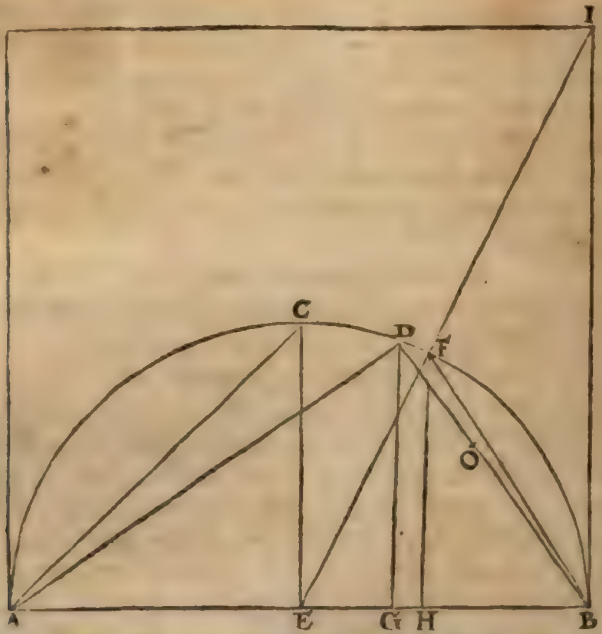
Quatuor uero anguli pentagoni, faciūt quatuor rectos cum quatuor quintis unius recti: ideo impossibile est ut quatuor anguli tales, aut plures, possint constituere angulū solidum. Itaq; impossibile est, ut ex pentagonis pluribus q; duodecim, paucioribus'ue, possit tegi corpus aliquod regulare præcise.

De hexagonis & reliquis polygonijs æquiangulis.

¶ Angulus hexagoni æquianguli unus, facit rectū cum parte tertia unius recti: itaq; tres anguli tales faciūt quatuor rectos præcise. Itaq; ex hexagoni æquianguli angulis, impossibile est cōstitui angulū solidū; multominus potest cōstitui angulus solidus.

dus ex angulis aliquot polygoniæ alicuius sequẽtium, cũ taliũ polygoniarum anguli tres, semper excedant quantitatem quatuor rectorum. Itaq; impossibile est corpus aliquod regulare tegi hexagonis aut heptagonis &c.

Patet ex his sufficientia specierum regularium corporum plene demonstrata. Quibus uisis ad propositionem capitis huius reuertamur, quæ requirit laterum inuentionem corporum huiusmodi.



Primo. Posito semicirculo diametri A B facientis 120, erigatur semidiameter E C, & erit A C latus octahedri inscribendi sphæræ axis A B. Patet hoc ex propositione 15 tertij decimi, quæ dicit proportionem axis sphæræ circumscribentis octahedrum habere proportionem potentialiter duplam (id est, duplæ dimidiatam) ad latus unum ipsius octahedri: scilicet quadratum axis

axis facit 14400, & quadratum lineæ A C facit 7200. Diuisum autem unum per alterum, facit quotientem repræsentantem duplam proportionem, ut satis notum est. Secũdo patet etiam ad sensum, si inspicias corpus ipsum octahedri: uidebis enim mox ut latus tale coincidat cum latere quadrati inscribendi circulo illi, cuius diameter est axis sphæræ illius.

Secundo, erige orthogonalem G D, ita ut G B sit pars tertia ipsius diametri A B: & trahe ita A D & D B, & erit A D latus tetrahedri, & D B erit latus hexahedri seu cubi sphæræ inscribendi. Primum patet ex propositione 13 tertij decimi Euclidis, quæ dicit axim sphæræ circumscribentis tetrahedrum (id est, diametrum A B) habere proportionem sesquialteræ dimidiatam, seu (ut textus loquitur) sesquialteram potentialiter. Cum autem G D sit medium proportionale inter A G faciente 80, & G B faciente 40, faciet G D $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 3200. Itaq; per penultimam primi, faciet A D $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 9600: & (per eandem) faciet D B $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 4800. Vide iam an 14400 habeat proportionem sesquialteram ad 9600. Secũdum patet ex 14 tertij decimi, quæ docet axim sphæræ circumscribẽtis cubum, ad latus cubi seu hexahedri, habere proportionem potentialiter triplam. Vt 14400 ad 4800, facit triplam proportionem.

Tertio, erecta orthogonali B I ad æqualitatem diametri A B, trahe B I, & sic trahitur F H orthogonalis â puncto ubi B I intersecat circumferentiam, & erit F B latus icosahedri faciens $\sqrt{\frac{3}{2}}$. 7200 — $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 10368000. Et hoc est quod dicit propositio 16 tertij decimi, quòd latus tale necessario sit linea minor, si uidelicet axis sphæræ circumscribẽtis icosahedrum sit linea rõnalis.

Sic autem inuenitur numerus lateris huius.

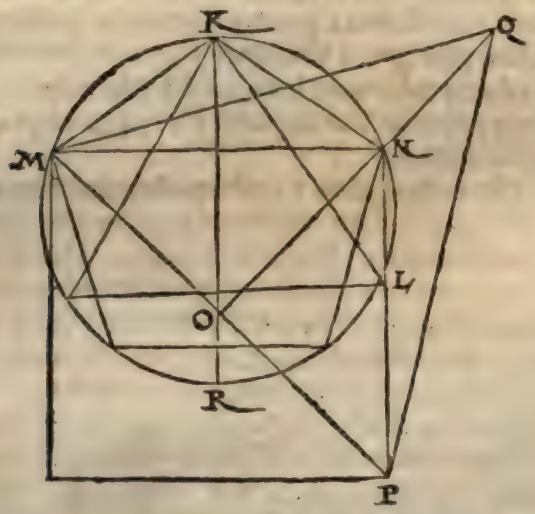
Cum E B faciat 60, & B I, 120, faciet E I $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 18000. Facit autẽ E F 60, cũ sit semidiameter circuli. Vnde regula de tri hic utor sic:

E I dat I B, quantum dat E F, facit F H. Hoc est, $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 18000. 120. 60. facit $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 2880, & tantum facit F H. Cuius dimidium est E H, sicut dimidium ipsius I B est E B. Et quia E B

facit 60, & E H facit $\sqrt{\frac{3}{8}}$ 720, ideo H B facit 60 — $\sqrt{\frac{3}{8}}$ 720. Cuius quadratum, additum quadrato ipsius F H, facit quadratum ipsius F B.

Quarto. Si D B diuidatur secundum proportionem habentem mediũ & duo extrema, tunc maior portio diuisionis illius erit latus dodecahedri inscripti sphæræ, cuius axis sit æqualis diametro A B. Cum autem D B (id est, latus hexahedri seu cubi) faciat $\sqrt{\frac{3}{8}}$ 4800 (axi sphæræ faciente 120) faciet maior portio diuisionis illius $\sqrt{\frac{3}{8}}$ 6000 — $\sqrt{\frac{3}{8}}$ 1200, id est O B. Et hoc est quod dicit 17 tertiædecimi, latus dodecahedri esse lineam residualem, uidelicet axi sphæræ, cui inscribitur, existente linea rationali.

Item ex latere icosahedri. i. ex linea F B, superioris figuræ, si latus trigoni fiat, & circumscribatur circulus eidem trigono, ut est K L huius figuræ sequentis, latus uidelicet icosahedri inscribendi sphæræ axis A B (superioris figuræ) facientis 120.



Et K N latus pentagoni, erit latus dodecahedri. Et M N (id est, linea

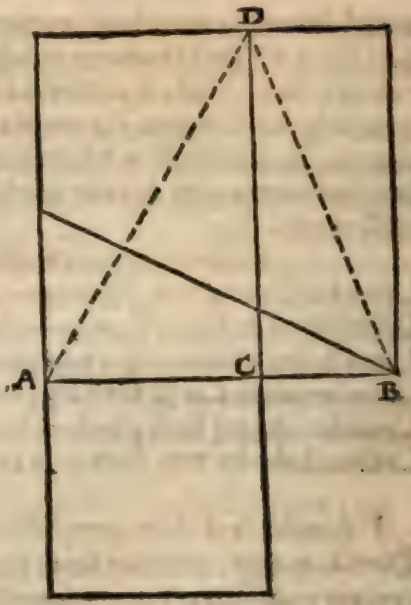
linea subtendens angulum pentagoni) erit latus hexahedri seu cubi. Et M P (id est, diameter quadrati lineæ M N) erit latus tetrahedri. Et O Q (id est, cathetus trianguli lateris M P) erit latus octohedri. Corpora illa omnia uni & eidem sphæræ inscribuntur, cuius axis est A B superioris figuræ, facitq; 120. Hæc sunt ferè omnia quæ docent tertius decimus Euclidis, & quartusdecimus.

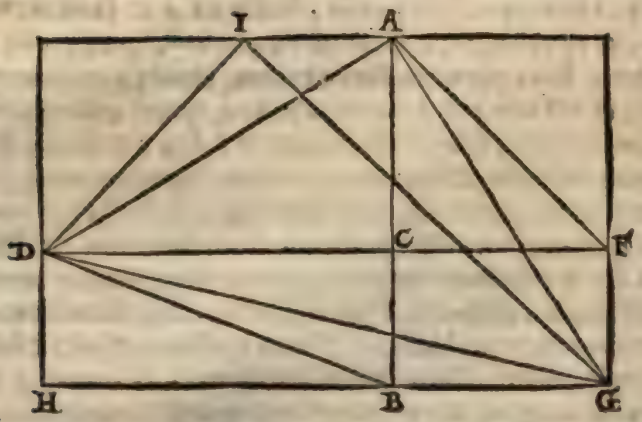
Numeri figuræ proximæ superioris.

Latus icosahedri K L, √ 7200 — √ 10368000.
Diameter K R, facit √ 9600 — √ 18432000.
Latus dodecahedri K M, √ 6000 — √ 1200.
Latus hexahedri M N, facit √ 4800.
Latus tetrahedri facit √ 9600, & est M P.
Latus octahedri O Q facit √ 7200.

¶ Similia ferè docet propositio nona quartidecimi. Diuisa, inquit, qualibet linea secundum proportionem habentem medium et duo extrema (ut est A B sequentis figuræ, faciens √ 2400 + √ 115200, diuisa in A C facientem √ 2400 - √ 115200, & C B facientē √ 4800 — √ 18432000) erit proportio lineæ potentis supra totam, eiusq; portionem maiorem (ut est linea D A faciens √ 4800, quam uides posse quadratum æquale quadratis linearum D C, seu A B totius, & A C portionis maioris) ad lineam potentem supra totam eiusdemq; portionem minorem (ut est linea D B faciens √ 7200 — √ 10368000, quam uides posse quadrata linearum D C seu A B totius, & C B portionis minoris) tanquam proportio lateris cubi ad latus icosahedri. Hoc est, si D A fuerit latus hexahedri seu cubi, erit proculdubio D B latus icosahedri inscribēdi eidem sphæræ, cui inscribitur cubus lateris D A. Si autem D B facit √ 7200 — √ 10368000, tunc faciet axis sphæræ circumscribentis corpora illa 120, ut iam ostenditur.

Vt autem hæc figura præbeat exemplum ferè singulis propositionibus tertiædecimi Euclidis atq; quarti decimi, prudens Lector bene intelliget. Et ut res eò magis innotescat, uolo ego eidem figuræ inscribere omnia latera propositionis, & capitis præsentis & præcedentis.





Est autem A B diuisa secundum proportionem habentem medium & duo extrema in puncto C, item H G in puncto B.

Primo.

¶ Primo. Si fuerit circulus, cuius diameter sit A C, erit ipsa A C latus hexagoni circulo illi inscribendi.

Et D B (iuxta quintã tertijdecimi) erit latus trigoni circulo illi inscribendi. Testatur idem quinta quartidecimi.

Et A F erit latus tetragoni eidem circulo inscribendi (cum A C sit semidiameter, item C B) ut A C F in circulo tali faciant quadrantem circuli.

Et B F erit latus pentagoni eidem circulo inscribendi, iuxta decimam tertijdecimi.

Et C B erit latus decagoni eidẽ circulo inscribendi: ut habet propositio 9 tertijdecimi, & testatur idem 10 tertijdecimi.

Et D A seu A G (sunt enim æquales duæ illæ) erit linea subtendens angulum pentagoni, eidem circulo inscripti.

¶ Secundo. Si fuerit sphæra, cui inscribitur linea B F, tanq; latus dodecahedri, inscribetur eidem sphæræ linea B D tanquã latus icosahedri. Et D A seu A G inscribetur eidem tanquam latus hexahedri, seu cubi. Et D G (quæ est diameter quadrati D A) inscribetur eidem sphæræ tanquam latus tetrahedri. Et I G) quæ est cathetus orthogonij trianguli D I G) inscribetur eidem sphæræ, tanquam latus octahedri.

De superficiebus corporum regularium.

DE superficiebus corporum regularium sunt propositiones quartidecimi, sexta, septima, & octaua &c. quas paucis absoluam, absoluta iam tractatione linearum seu laterum eorum corporum. Cognitis enim lateribus, facile erit quantitates basium seu superficierum inuenire. Nam latus cubi (seu hexahedri inscribendi sphæræ) in se multiplicatum quadrate, facit aream unius superficiei, quarum sex sunt in uno cubo. Sunt hæc notissima.

¶ In dodecahedro sunt duodecim bases pentagonales æquiangulæ inter se æquales, ut satis dictum est superius. Si autem linea ducta à centro pentagoni ad medium unius laterum, fuerit multiplicata in dimidiũ ambitus pentagoni eiusdem, id est,

in latera 2½, tunc producitur area pentagoni unius. Vt si latus dodecahedri faciat √¾6000 — √¾1200, faciet linea ducta à centro pentagoni usque ad medium lateris √¾. 600 + √¾ 72000. Nam illa linea componitur ex additione dimidij lateris hexagoni ad dimidium lateris decagoni (ut habet ꝓpositio prima quartidecimi) ut √¾. 1200 — √¾ 1152000 (quod est dimidium lateris decagoni) ad √¾. 600 — √¾ 72000 (quod est dimidium lateris hexagoni, seu quarta pars diametri) facit numerum lineæ prædictum, uidelicet √¾. 600 + √¾ 72000.

Sic autem fit additio compendiose.

Dimidium lateris decagoni resoluitur iuxta regulam capite duodecimo datam: scilicet √¾. 1200 — √¾ 1152000, resoluitur in √¾. 600 + √¾ 72000. — √¾. 600 — √¾ 72000. Atque ita addo √¾. 600 — √¾ 72000, & fit √¾. 600 + √¾ 72000. Hæc igitur linea multiplicata in √¾ 37500 — √¾ 7500. i. in dimidium ambitus basis unius, seu in latera duo cum dimidio, facit aream unius pentagoni seu basis: uidelicet quadratum de numero hoc √¾ 37500 — √¾ 7500, facit √¾. 45000 — √¾ 1125000000. Hoc iam multiplica per lineam inuētam. i. per √¾. 600 + √¾ 72000, facit √¾. 18000000 — √¾ 648000000000. Et hæc est area unius basis, quæ si multiplicetur per 12 (cum 12 bases pentagonales tegant unum dodecahedrum) prouenit numerus cunctarum superficierum simul, qui facit hoc productum,

√¾. 2592000000 — √¾ 1343692800000000000.

Et hoc est quod dicit sexta quartidecimi: Si, inquit, pentagonus figuræ duodecim basium fuerit inscriptus circulo, et à centro ducta fuerit linea ad medium lateris pentagoni, quod sub uno latere pentagoni, atque linea illa à centro ducta, continetur, si multiplicetur per 30, exurget area superficialis uniuersa corporis illius duodecim basium.

Patet hoc. Nam idem prouenit, siue 2½ (id est, semiambitus pentagoni) multiplicetur per 12, siue 5 multiplicentur per 6; utrobiq; enim producitur 30, &c.

In

In reliquis corporibus, singulae bases sunt triangulares æquilateræ. Itaq; dato latere corporis huiusmodi, multiplica illud in se, & à producto subtrahe hoc quod fit ex dimidio lateris in se (hoc est, à quadrato lateris unius subtrahe partem quartam quadrati producti) tunc relinquitur quadratum cathetí. Regula autem est, quòd Dimidio lateris trianguli equilateri multiplicato in cathetum, producitur area trianguli illius. Et hoc est quod propositiones quartidecimi, undecima & duodecima docent. Prior harum dicit: In omni triangulo æquilatero, si ab uno angulorum eius perpendicularis trahatur ad basim, latus eiusdem trianguli ad ipsam perpendicularem potentialiter sesquitertiam habebit proportionē. Posterior sic dicit: Quilibet trigonus æquilaterus cuius latus est rationale, superficies est medialis.

Sed dictorum prius exemplum uideamus.

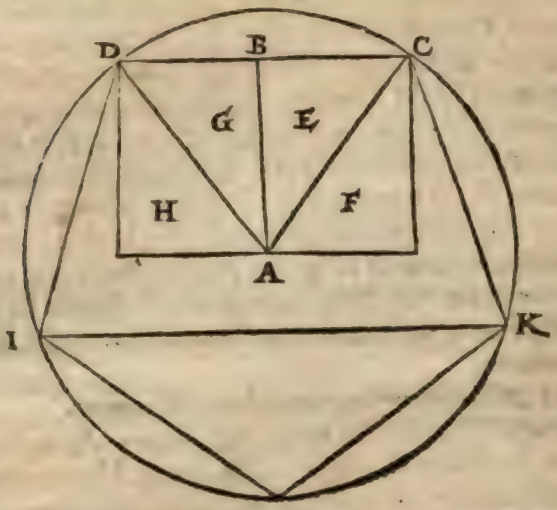
Latus icosahedri si faciat nām hunc, $\sqrt{\frac{1}{3}}.7200 - \sqrt{\frac{1}{3}}10368000$, faciet lateris dimidium $\sqrt{\frac{1}{3}}.1800 - \sqrt{\frac{1}{3}}648000$. Harum linearū quadrata à se inuicem subtracta, relinquūt quadratum cathetí. Facit igitur cathetus $\sqrt{\frac{1}{3}}.5400 - \sqrt{\frac{1}{3}}648000$. Vnde $\sqrt{\frac{1}{3}}.1800 - \sqrt{\frac{1}{3}}648000$ in $\sqrt{\frac{1}{3}}.5400 - \sqrt{\frac{1}{3}}648000$, facit $\sqrt{\frac{1}{3}}.10368000 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ 33592320000000. Et hæc est area unius basium icosahedri facientis latere uno in longitudine $\sqrt{\frac{1}{3}}.7200 - \sqrt{\frac{1}{3}}10368000$. Cum autem uiginti bases tantæ tegant icosahedrum istum, multiplicandam scies aream positam per 20, ut totius corporis area producatur. Faciet autē uniuersa area superficialis eius

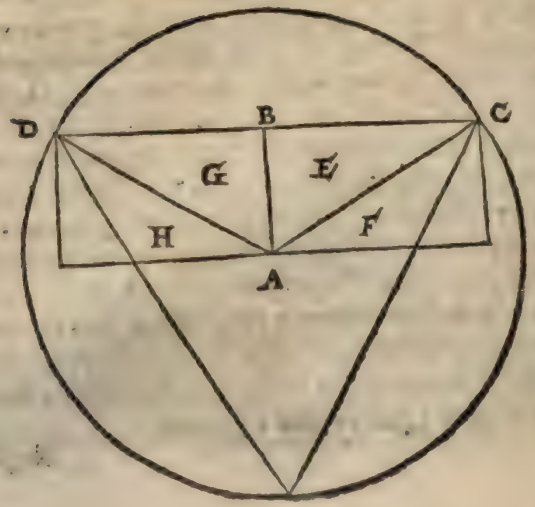
$\sqrt{\frac{1}{3}}.4147200000 - \sqrt{\frac{1}{3}}5374771200000000000$.

Idem proueniet si iuxta propositionē 7 quartidecimi opereris. Vtitur autem propositio illa, regula generali, ut satis constat; scilicet lineam ꝓductam à centro ad medium lateris ductam, docet multiplicare in semiambitum trigoni. Ea enim multiplicatione producitur area unius basium. Iam idem est, siue multiplices $1\frac{1}{2}$ per 20, siue 3 per 10, siue 1 per 30.

Repræsen-

Repræsentemus tamen propositiones illas quartidecimi, sextam & septimam, suis propriis figuris.





Satis

Satis uides ex figuris illis, ut linea A B ducta in dimidium lateris (id est, in B C) producat superficiem E F, quæ sit æqualis superficiei B G. Et ut E G sit in pentagono pars quinta superficiei illius pentagonicæ. In trigono uero sit E G pars tertia trianguli illius præcise. Itaq; si E G pentagoni, quinario fuerit multiplicata, producitur area pentagoni præcise. Et si E G superficies trigoni multiplicet per ternariū, producit area trigoni p̃cise.

Sic si multiplicetur linea A B in totum latus, id est in D C, tunc producitur superficies H G E F. Ea autem quæ est in pentagono, si multiplicetur per quinarium, producitur superficies dupla ad pentagonicam illam superficiem. Sic ea quæ est in trigono multiplicata per ternarium, producit duplam superficiem ad ipsum triangulum. Inde fit ut triginta earum superficierum, quæ sunt in pentagono, faciāt duodecim bases pentagonicas: & triginta earum quæ sunt in trigono, faciant uiginti bases triangulares. Vt uides ex regula De tri hoc modo:

5 dant 2, ergo 30 dant 12.
3 dant 2, ergo 30 dant 20.

Et hoc est quod dicit propositio sexta quartidecimi:

Si pentagonus dodecahedri inscriptus circulo fuerit, et a centro ducta fuerit linea ad medium lateris pentagoni, quod sub uno latere pentagoni atque linea illa a centro ducta ad medium lateris, cōtinetur, si multiplicetur per trigenarium numerū, erurget area superficialis uniuersa illius dodecahedri.

Et septima propositio sic dicit:

Si trigonus corporis icosahedri fuerit circulo inscriptus, et a centro ducta fuerit linea ad mediū lateris illius trigoni, quadrangulum quod continetur sub uno latere trigoni, atq; linea illa a centro ducta ad medium lateris, si multiplicetur per 30, erurget area superficialis tota, illius corp. icosahedri.

Proposuerat autem propositio quinta (ut dixi) sic:

Pentagonus figuræ duodecim basium (id est dodecahedri) triangulusq; figuræ uiginti basium (id est, icosahedri) quos

eadem sphera circumscribit, vno eodemq; circulo circumscri buntur. Et ex illis omnibus sumpta est occasio proponendi de propositionibus bassium & superficierum.

Vnde sic dicitur propositione 8 quartidecimi.

Proportio cunctarum superficierū corporis dodecahedri pariter acceptarū, ad cunctas superficies corporis icosahedri pariter acceptas (si ab vna sphera ambo corpora circumscri bantur) est tanquam proportio lateris cubi (quem eadem sphera circumscribit) ad latus trianguli ipsius icosahedri.

Sic positis quadrangulis illis duobus, H G E F superiorum figurarum, vno in pentagono, & altero in trigono, erit quoq; eadem proportio illius quadranguli quod est in pentagono, ad illud quadrangulum quod est in triangulo, quæ est omniū basium dodecahedri, ad omnes bases icosahedri, cum utrunq; vno & eodem numero (id est, trigenario) multiplicatū, reddat omnes bases sui corporis, proportione non mutata. Et (ut dicit octaua quartidecimi) etiam eandem proportionē habet latus cubi, ad latus icosahedri (si eadem sphæra corpora illa circumscribat) de qua proportione etiam loquitur 9 quartidecimi. Itaq; si à quadrangulo H G E F, quod est in trigono, exurgat columna ad mensuram lateris cubi (seu ad altitudinem lineæ I K signatæ in pentagono) atq; altera columna exurgat à quadrangulo H G E F quod est in pentagono, ad altitudinem lateris icosahedri (seu lineæ D C in trigono) tunc in utraq; columnarum erit una & eadem soliditas. Scilicet, quadrangulum quod est in trigono habet areā hanc, $\sqrt[3]{.}5184000 - \sqrt[3]{}149299200000000$. Quæ area multiplicata per $\sqrt[3]{}4800$, facit

$$\sqrt[3]{.}24883200000 - \sqrt[3]{}3439853568000000000000.$$

Et est soliditas columnæ exurgentis à quadrangulo quod est in trigono. Sic quadrangulum qđ est in pentagono H G E F, facit

$$\sqrt[3]{.}2880000 - \sqrt[3]{}165888000000000.$$

Quod multiplicatum per latus icosahedri, seu D C, latus ipsius trianguli, facientis $\sqrt[3]{.}7200 - \sqrt[3]{}10368000$, facit soliditatem

prioris columnæ uidelicet,

$\sqrt{3}.2488320000 — \sqrt{3}43398535680000000000.$

Sic (ut dicit 14 quartidecimi) Si tetrahedrum et octahedrum una eademq; sphera circumscribat, erit una ex basibus tetrahedri, ad unam ex basibus octahedri sesquitertia. Patet. Nam latus octahedri talis, semp est cathetus basis tetrahedri. In omni aũt triangulo equilatero (ut dicit 11 quartidecimi) si ab uno angulorũ eius perpendicularis trahatur ad basim, latus eiusdem trianguli ad ipsam perpendicularem, potentialiter sesquitertiam habebit proportionem. Sicut autem quadratum unius, ad quadratum alterius, proportionem sesquitertiam habet: sic necesse est, ut triangulus æquilaterus unius, ad triangulum æquilaterum alterius, eandem proportionem habeat, id est, sesquitertiam.

Item Omnes bases octahedri (ut dicit eadem 14 quartidecimi) pariter accepte, ad omnes bases tetrahedri pariter acceptas, erunt sesquialteræ. Patet. Cum enim in tetrahedro sint 4 bases, & in octahedro sint 8 bases, satis uides ut ex additione proportionis $\frac{1}{3}$ ad proportionem $\frac{4}{8}$ proueniat proportio hæc $\frac{3}{3}$, quæ est proportio omnium basium tetrahedri ad omnes bases octahedri. Ergo proportio omnium basium octahedri ad omnes bases tetrahedri, est hæc $\frac{3}{2}$.

Et (ut dicit 13 quartidecimi) Si axis sphæræ circumscribentis corpora illa fuerit rationalis (siue longitudine, siue potentia) cunctæ superficies utriuslibet corporum (& tetrahedri uidelicet & octahedri) pariter acceptæ, componunt superficiem medialem.

Rationem huius reddit propositio 12 quartidecimi, dicens: Quilibet trigonus equilaterus cuius latus est rationale (siue longitudine siue potentia, ut oportet, ubi axis sphæræ circũscribentis corpora illa fuerit rõnalis &c) superficies est medialis.

Item Omnes bases herahedri (seu cubi) pariter acceptæ, æquales sunt quadrato diametri, q̃ fit ex quadrato axis sphere

circumscribentis cubum illum (est ultima quartidecimi).

Vt si axis sphæræ faciat 120 sua longitudine, erit area quadrati eius 14400, eritq; diameter quadrati illius $\sqrt{\frac{2}{1}}$ 28800. Cuius quadratum facit aream hanc 28800. Cui æquantur omnes bases cubi pariter acceptæ: scilicet cubi latus faciet $\sqrt{\frac{2}{1}}$ 4800. Vnde cum area unius basis faciat 4800, facient eius sex bases 28800.

De soliditate corporum regularium.

QVot in corpore regulari fuerint bases, tot in eo erunt pyramides inter se æquales atq; similes, ipsumq; corpus totum complentes, quarum quælibet à basi una surgat, & in centro terminetur. Vnde quælibet pyramidum talium, pars est totius corporis illius, denominata à numero basium. Vt in tetrahedro, est pars quarta, in hexahedro est pars corporis sexta, in octahedro est pars ipsius octaua, in dodecahedro est pars ipsius duodecima, & in icosahedro est (una pyramis eius) pars ipsius icosahedri uigesima. Regula igitur communis est, ut inquiras soliditatem unius pyramidum huiusmodi, in quolibet corpore regulari, eaq; soliditate inuenta, multiplices eandem per numerum basium corporis illius. Ea autem soliditas inuenitur generaliter per triangulum orthogonium in pyramide tua obseruandum. In quolibet autem triangulo tali, erit hypotenusa eius, pars dimidia ipsius axis, in sphæra circumscribēte corpus illud. Et basis eiusdem trianguli, semper erit semidiameter circuli circūscribentis basim corporis illius unam. His habitis facile (id est, per penultimam primi) inuenitur cathetus trianguli orthogonij illius. Est autem cathetus talis, pyramidis altitudo. Altitudo uero multiplicata in aream basis, producit columnā pyramidis, quam (iuxta Euclidis 8 duodecimi) oportet esse triplam, ad suam pyramidem. Columna igitur diuisa per 3, producitur soliditas pyramidis eius.

Videamus ergo nunc negocij huius exempla.

¶ Sit axis sphæræ circumscribentis tetrahedrum, hexahedrum

drum, octahedrum, dodecahedrum, & icosahedrum, longitudine sua faciens 120. Itaq;

In hexahedro erit latus unum longitudine √ 4800. Et area basis eius 4800. Et altitudo unius pyramidis (quarum sex complent totum hexahedrum, iuxta numerum basium eius) faciet √ 1200, cum sit dimidium lateris cubi (ut docet ultima quarti decimi) Semidiameter autem circuli circumscribentis basim hexahedri unam, facit √ 2400. Multiplicata uero altitudine unius pyramidū, in areā unius basiū, producit √ 2764800000000, quæ est soliditas columnæ pyramidis unius. Est ergo soliditas trium pyramidum, cum columna quælibet sit tripla ad suam pyramidem. Itaq; hæc duplata (cum sex sint in hexahedro pyramides tales) facit totius hexahedri, seu cubi, soliditatem √ 11059200000000. Idem prouenit ex multiplicatione lateris cubi cubice, ut notum est: scilicet √ cc de nro illo facit √ 4800.

In tetrahedro erit latus unum, sub hoc numero, √ 9600, & basis una faciet hunc numerum √ 17280000. Semidiameter uero circuli circumscribentis basim, faciet √ 3200. Vnde altitudo unius pyramidis in tetrahedro (quarum quatuor concurrunt circa centrum corporis) facit 20. Itaq; area basis, id est, √ 17280000, multiplicata per 20, seu per √ 400, facit columnam unius pyramidis, id est √ 6912000000. Cuius tertia pars facit √ 768000000. Et tantum facit una pyramis. Quatuor ergo pyramides (id est, soliditas totius tetrahedri) faciunt numerum hunc √ 12288000000. Est præterea tetrahedrum pars tertia hexahedri. Vnde posita soliditate cubi, si illam diuidas per 3, tunc prouenit tetrahedri soliditas, ab eadem sphæra circumscripti. Est etiam totum tetrahedrum una pyramis, cuius columna æqua sit cubo. Igitur multiplicata basi una in altitudinem ipsius tetrahedri (id est, in duas tertias axis sphæræ illius quæ corpora illa circumscribit) producitur soliditas cubi &c.

In octahedro faciet latus unum √ 7200 (sicut enim latus tetrahedri, est diameter, basis unius, in hexahedro, sic latus octa-

hedri est cathetus, basis unius in tetrahedro) & basis una facit √ȣ9720000. Et cum semidiameter circuli circumscribentis basim unam, faciat sua longitudine √ȣ2400 (quantum enim est latus unum tetrahedri, tantũ facit diameter circuli circumscribentis basim unam octahedri, scilicet unus & idem circulus circumscribit basim unam hexahedri, & basim octahedri) faciet columna unius pyramidis 108000. Quæ est soliditas trium pyramidum. Vnde 3 dant 108000. Ergo 8 dant 288000. Totũ igitur tetrahedrum sua soliditate facit 288000.

Probatur hoc per propositionem 16 quartidecimi, quæ dicit: Octahedrum diuisibile est in duas pyramides æque altas, quarum altitudo equalis est axi sphere: basis autem vtriusq; est quadratum subduplum ad quadratum axis sphæræ.

Patet hoc ex inspectione corporis illius: scilicet basis illa est quadrata, cuius diameter ex axis sphæræ, cum latus unum quadrati illius faciat √ȣ7200. Facit igitur basis area 7200: & altitudo unius pyramidis facit 60. Vnde 60 in 7200, facit 432000, columnam uidelicet alterius pyramidum. Itaq; tertia pars eius (id est 144000) est soliditas unius pyramidis. Ergo ambæ pyramides faciunt 288000. Et hæc est soliditas totius octahedri, & est rationalis, ut uides.

In icosahedro sunt uiginti pyramides cõcurrentes circa centrum. Est autem latus unum corporis huius sub hoc numero, √ȣ. 7200 — √ȣ1036800. Et basis una facit √ȣ. 11664000 — √ȣ7558272000000000. Et semidiameter circuli circumscribentis basim hanc, facit √ȣ. 2400 — √ȣ1152000. Facit ergo altitudo unius pyramidis √ȣ. 1200 + √ȣ1152000. Hæc multiplicata in aream basis, facit hanc columnam:

√ȣ. 4665600000 + √ȣ4353564672000000000.

Huius pars tertia facit soliditatem pyramidis unius, uidelicet, pyramis una fac. √ȣ. 518400000 + √ȣ53747712000000000. Et harum pyramidum uiginti, faciunt soliditatem totius icosahedri, ea facit hunc numerum,

√ȣ. 207360000000 — √ȣ8599633920000000000000.

In dodecahedro sunt duodecim pyramides æquales, circa centrum concurrentes. Latus autē unum corporis huius, facit hunc numerum, $\sqrt{\frac{}{}}6000 - \sqrt{\frac{}{}}1200$. Et basis eius una, facit $\sqrt{\frac{}{}}.18000000 - \sqrt{\frac{}{}}6480000000000$. Semidiameter aūt circuli circumscribentis basim unam dodecahedri, coincidit cum semidiametro circuli circumscribentis basim unam icosahedri. Ex quo sequitur lineam altitudinis, unius pyramidis in dodecahedro (ex his quæ circa centrum concurrunt) æqualem esse lineæ altitudinis unius pyramidis in icosahedro, cum hypotenusa orthogonij (de quali superiūs dictum est) utrobiq; (imo ubiq;) sit idem, uidelicet dimidia pars axis sphæræ circumscribentis corpora illa. Itaq; altitudo unius pyramidis facit $\sqrt{\frac{}{}}.1200 + \sqrt{\frac{}{}}1152000$. Hæc altitudo multiplicata in aream basis, facit $\sqrt{\frac{}{}}.12960000000 + \sqrt{\frac{}{}}9331200000000000000$. Et est numerus iste, soliditas columnæ, unius pyramidis, cōplicans quātitatem triū pyramidū (ut habet 8 duodecimi) Itaq; si iste numerus quadruplet (cum tres pyramides sint pars quarta totius corp. dodecah.) tunc producit soliditas totius dodecahedri hæc, $\sqrt{\frac{}{}}.207360000000 + \sqrt{\frac{}{}}23887872000000000000000$.

De proportionibus corporum ad inuicem.

EST autem proportio corporis (inquit 10 quartidecimi) dodecahedri ad corpus icosahedri, si ea ambo una sphera includat, sicut proportio omnium basium dodecahedri, ad omnes bases icosahedri. Quia sicut 12 bases in dodecahedro conferūtur ad 20 bases in icosahedro, ita duodecim pyramides æquales in dodecahedro, conferuntur ad 20 pyramides æquales in icosahedro. Et quia pyramides sunt utrobiq; altitudine æquales [ut dictū est paulo superius] sequitur unum esse numerum oportere, qui multiplicet bases omnes dodecahedri, ut proueniant omnes pyramides dodecahedri ad centrum concurrentes (id est, ut proueniat totum corpus dodecahedri) & qui multiplicet bases omnes icosahedri ut proueniat totum corpus icosahedri, id est, omnes pyramides corporis illius circa centrum concurrentes. Notum est autē ut posita aliqua proportione,

ipsa proportio non mutetur, si utercq; eorum uno & eodem numero multiplicetur, aut diuidatur. Et eandem proportionem etiam habet latus hexahedri ad latus icosahedri, ut dicit 8 quartidecimi. Vnde si latus hexahedri multiplicet icosahedrum, necesse est prouenire hoc, quod prouenit ex multiplicatione dodecahedri per latus icosahedri.

¶ Item proportio octahedri ad tetrahedrum, est sicut proportio quadrati axis sphere circumscribentis corpora illa, ad quadrangulum contentum sub latere vno tetrahedri, atque sub semidiametro circuli basim tetrahedri circumscribentis. Docet hoc idem penult. quartidecimi sub uerbis obscurioribus.

¶ Item proportio hexahedri ad octahedrum, circumscribente illa sphæra una, est sicut proportio omnium basium hexahedri, ad omnes bases octahedri.

Ratio est. Quia idem circulus circumscribit basim unam hexahedri, & basim unam octahedri, ut necesse sit sex pyramides hexahedri, quæ concurrunt circa centrum hexahedri, & octo pyramides octahedri, concurrentes circa centrum octahedri, habere altitudines æquatas inter se: ideoq; necesse est, proportionem basium, in utroq; corpore respondere proportioni pyramidum. Vt sicut una basis in hexahedro, se habet ad unam basim in octahedro, ita se habet una pyramis in hexahedro, ad unam pyramidem in octahedro. Et sicut se habent sex bases in hexahedro, ad octo bases in octahedro: sic se habent sex pyramides in hexahedro, ad octo pyramides in octahedro.

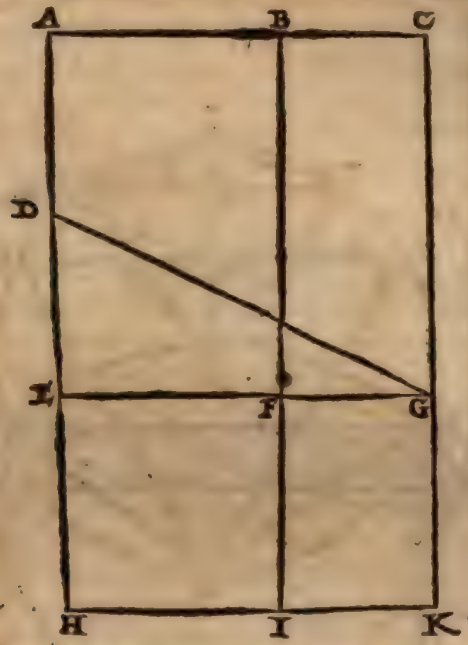
Vt autem hexahedrum sit triplum ad tetrahedrum, dictum est superius satis &c.

Epilogus capitis huius ultimi.

NVnc uero finiam tandem caput hoc, nihilq; eorum prætermittam, quæ docent decimustertius & decimusquartus Euclidis, conferam figuram priorum propositionũ tertijdecimi, cum figuris propositionum posteriorum.

Hæc

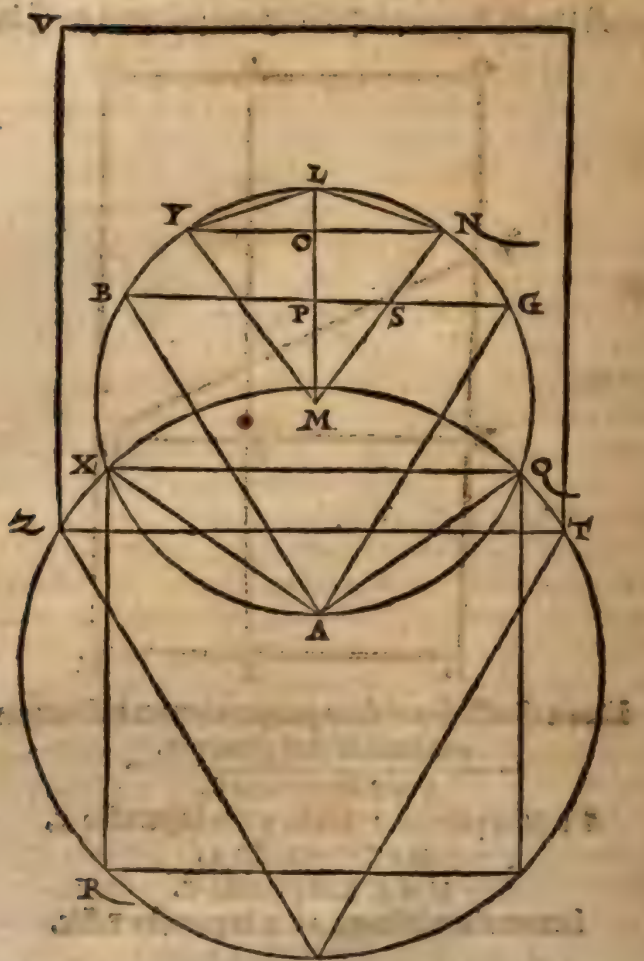
Hæc est autem figura propositionum priorum, tertij decimi.



Lineæ diuisæ secundum proportionem habentem medium & duo extrema.

A B C in puncto C.
G E H in puncto E, id est, A E H in puncto E.
H A C in puncto A.
H A C K in puncto C.
Item trahenda linea A F K in puncto F, &c.

Hæc uero figura sequens, complicat exempla propositionum posteriorum tertij decimi, & omnium propositionum quartidecimi.



Primo ſumpta eſt ſemidiameter minoris circuli, ad menſuram lineæ E F prioris figuræ: ſcilicet E F ſeu E H, & L M ſeu M N ſupponuntur eſſe inter ſe æquales. Erit igitur D G ſeu D H in priore figura, æqualis, N M O in poſteriore figura, Cõueniet igitur

igitur utriq; hoc, quod docet propositio prima tertijdecimi: scilicet L N M diuisa est in puncto N, secundum proportionem habentem medium & duo extrema, sicut G F E in puncto F. Vnde si ad M N addatur M O directe, uel ad F E addat̃ E D ut fiat D H, poterit N M O quinquies hoc quod potest M O, sicut D G uel D H quinquies hoc potest quod D E semel potest. Si, inquit prima tertijdecimi, diuisa fuerit linea secundum proportionem habentem medium et duo extrema, si maiori portioni linea in longum addatur equalis dimidio ipsius linee proportionaliter diuisæ, quadratum lineæ compositæ ex ijs duabus, quintuplum erit, ad quadratum dimidij ipsius lineæ diuisæ. Et cum secũda tertijdecimi sit conuersa illius, conuenit etiã illa utriq;, uidelicet H D & N M O. Tale aliqd etiam habet 3 eiusdẽ. Secunda autem quartidecimi docet iudicare de lineis taliter diuisis: Quicquid, inquit, accidit uni lineæ diuisæ secundum proportionem habentem medium et duo extrema, cuilibet lineæ sic diuisæ probatur accidere. Scilicet certus sum M O diuisam esse in puncto P, secundum proportionem habentem medium & duo extrema: item M N in puncto S, item M N L in puncto N, item N Q K in puncto Q. Et sic de alijs.

Ad hoc uero iudicium conferunt nonnihil propositiones quartidecimi, prima, tertia, undecima: item tertijdecimi, tertia, quarta, nona &c. Eas ordine aliquo congruo uideamus.

Prima quartidecimi sic dicit:

Quelibet linea perpendicularis ducta a centro circuli ad medium lateris pentagoni (ut est M O) equalis est dimidio lateris decagoni, sumpto cum dimidio lateris heragoni.

Deinde ponitur distributio partium hoc modo:

Et eadem perpendicularis est equalis perpendiculari ductæ a centro ad dimidium lateris trianguli (ut est M P) sumptæ cum dimidio lateris decagoni. ut est P O.

Cum igitur linea constituta est dupla M P, & P O sit prædicto modo diuisa, secundum nonã tertijdecimi, necesse est ut etiam

M O sic sit diuisa. Sic autem dicit 9 tertijdecimi:

Si latus heragoni (ut est M N) latusq; decagoni (ut est N L) quos vnus circulus circumscribit, sibi innicem in longū coniungantur, tota linea ex eis cōpositа, diuisa erit secundum proportionem habentem medium et duo extrema, eritq; portio eius maior latus heragoni.

Vndecima autem quartidecimi sic dicit:

Si duobus propinquis angulis pētagoni equilateri intra circulum descripti, à terminis suorum laterū due recte linee subtendantur (ut si trahatur in circulo minori N A secantem X Q) vtraq; alteram secabit, secundum proportionem habentem medium et duo extrema, maiorq; ipsius portio equalis erit lateri ipsius pentagoni.

Ex hac ulterius facile iudicare possum de linea N Q X, eam uidelicet etiā sic esse diuisam in puncto Q, cum dicat quarta 13. Si secundum proportionem habentem medium et duo extrema fuerit linea diuisa, eiq; in longum directe maior sectio adiatur, erit tota linea inde composita diuisa secundum proportionem habentem medium et duo extrema.

Et tertia quartidecimi sic dicit:

Diuiso latere heragoni secundum proportionem habentē medium et duo extrema, maior portio erit latus decagoni circumscripti à circulo, ipsum heragonum circumscribente.

Igitur ubi cognouero M S esse æqualem lateri decagoni L N, (cognosco aūt hoc per regulam De tri, uidelicet M O dat M N, ergo M P dat M S.) mox cognosco M N esse diuisam in puncto S, modo illo iam sæpe dicto.

Sed ut regrediar ad statutam tractationem, considerādas afferam 5 & 8 tertijdecimi. Cum enim ambæ idem doceant sub duplici respectu, quorum unus respiciat figuram priorem, alter respiciat figuram posteriorem, pulchre monent, ut duæ figuræ illæ diligenter conferantur.

Quinta tertijdecimi sic dicit:

Si secundum proportionem habentē medium et duo extrema aliqua linea fuerit diuisa, quadratū quod ex tota linea fit, si pariter accipiantur ambo quadrata illa, triplum faciūt ad quadratum maioris portionis.

Et octaua eiusdem tertijdecimi sic dicit:

Quadratum trianguli equilateri, quod à latere suo describitur, triplum est ad quadratum dimidiæ diametri circuli circumscripti triangulo illi.

Ex quinta facile uides, ut B G trahenda in figura priore, sit potentialiter tripla ad B F seu ad F I. Scilicet quadratum B F seu E G cum quadrato F G sumptū, æquatur quadrato B G, per penultimam primi. Cum igitur (per 8 tertijdecimi) B F fuerit semidiameter alicuius circuli, necesse est ut B G trahendæ, sit latus trigoni æquilateri, eidem circulo inscribēdi. Itaq; B G in priore figura, est hoc quod B G in posteriore figura. Et quod in priore figura est B F seu F I, hoc in posteriore figura est L M seu M N. Et F G in priore, est L N in posteriore. Et A H in priore, est ambitus totus trianguli L M N posterioris figuræ. Et B A C in priore, est ambitus totus quadranguli L Y M N, &c.

Et cum dicat 10 tertijdecimi: Quodlibet latus pentagoni equilateri, potentius est latere heragoni equilateri, quantum potest latus decagoni equilateri, si sint eidē circulo inscripti. Sequitur lineam G I trahendam, in figura priore, esse hoc quod in posteriore est Y N seu N Q. Sequit etiā (per 4 quartidecimi) A F trahendā in priore figura, hoc esse ꝺd in posteriore est X Q.

Sic autem dicit quarta illa quartidecimi:

Quadratum lateris pentagoni (ut est in priore trahenda G I, & in posteriore A F) quadratumq; lineæ quæ illius pentagoni angulo sustenditur (ut est in posteriore figura X Q, & in priore A F seu E K trahenda) ad quadratum semidiametri, (ut est M L in posteriore, & E F in priore) quintuplam proportionem faciunt.

Item hoc quod est in posteriore figura X Q N, in priore figura

est trahenda A K. Quæ si trahatur, erit ipsa diuisa in puncto Y secundum proportionem habentem medium & duo extrema.

Item linea B K seu C L in priore figura trahenda, est hoc quod Q R est in posteriore figura trahenda, &c.

Ex figura autem posteriore pulchre patet (secundum dicta superiora) ut latus icosahedri, id est B G, & latus dodecahedri, id est Y N, si una sphæra ea circumscribat, bases habeant quæ ab uno circulo circumscribantur.

Item patet ex eadem figura, ut latus hexahedri (id est X Q) & latus octahedri (id est Z T) si eadem sphæra ea circūscribat, bases habeant, quæ ab uno circulo circumscribantur.

Item patet ex eadem figura, ut basis tetrahedri inscribendi eidem sphæræ, singulari circulo circumscribatur: scilicet trahenda Q R est latus tetrahedri illius, &c.

Quadratum autem cuius basis est Z T, circumscribitur à circulo, cuius diameter sit æqualis axi, sphæræ, corpora illa circūscribenti; scilicet V T trahenda, faciet 120, si L M semidiameter minoris circuli faciat $\sqrt{\frac{3}{4}}.2400 — \sqrt{\frac{3}{4}}1152000$.

Habes itaq; Lector iam hoc libro secundo, omnia quæ Euclides docuit de numeris irrōnalibus abstractis & contractis. Et quæ Campanus, atq; ante eum Theon, post illos uero Zambertus, demonstrare studuerunt geometricè, ego, pro instituto meo opere, non obscurius ostendi arithmeticè; id quod grates mei lectores fatebuntur proculdubio. Maleuolos uero, qui causas calumniandi studebunt quærere, res ipsa prodita, animo confusos castigabit. Sed quicquid fiat, Deo omnium bonorum largitori sit gloria, Amen.

LIBRI ARITHMETICAE SECVNDI
de numeris irrationalibus finis.

APPENDIX LIBRI SECVNDI,

DE QVADRATVRA CIRCVLI.

Ad Adolphum à Glauburgk Francofordiensem, iuuenem magnæ spei. S.

DISPVTATIONEM meam hanc Geometricam, (id est, ad Arithmeticam non pertinentem) de Quadratura circuli, superaddidi, iussu uiri, cui deberem & corpus & animã, si fieri posset, ut homo merito hominis tanta deberet. Eam disputationẽ tibi mi Adolphe nuncupare uolui, quòd uideam te non solum Physicis, sed & Mathematicis rebus auidissime studere, sequestratis bestijs illis malis, quæ & pietati & artibus sunt infestæ, auaricia, ambitione, inuidia &c. Cum enim mihi pulchrum esse uideatur, pulchras mathematum speculationes, talibus animis prodere, pulchrius esse certo scio, tam pulchras mentes, omnibus artium studiosis, in exemplum proponere.

1 Disputaturi de Quadratura circuli, obseruent esse distinctionem, inter circulum physicum & circulũ mathematicum.

2 Obseruent etiam eam quæstionem, à Philosophis ueteribus motam, esse de circulo mathematico, non de physico.

3 Circulus physicus est imago quædã circuli mathematici.

4 Triangulus est polygoniarum omnium prima.

5 Omnium polygoniarum ultima est circulus.

6 Recte igitur describitur circulus mathematicus esse polygonia infinitorum laterum.

7 Mathematici itaq; circuli circumferentia, nullum recipit numerum, neq; rationalem neq; irrationalem.

8 Ante circulum mathematicum sunt omnes polygoniæ numerabilium laterum, quemadmodum ante numerum infinitũ sunt omnes numeri dabiles.

9 Restat igitur circulum circino factum, non esse mathematicum.

10 Tunc autem circulum dabis mathematicum, postquam dederis numerum infinitum: idq; uolunt illi, qui angulum contingentiæ affirmant esse minorem infinitis angulis rectilineis.

11 Infinitus numerus sicut ad res non contrahitur, si etiam guttas maris imagineris, toti cœlo maioris: sic circulus mathematicus, non contrahitur ad materiam, etiam si omnium aurifabrorum, totius orbis terrarum, opera & industria esset parata polita & complanata.

12 Neq; rationalem proportionẽ, neq; irrationalem, habet circumferentia circuli mathematici, ad suam diametrum.

13 Vt certissimum sit, quadraturã circuli mathematici, excedere rationem calculationis humanæ.

14 Si autẽ quæstio est de quadratura circuli physici, frustrà tanta triumphi proclamatione iactamus eam quadraturã esse aliquando inuentam, quasi hac inuentione ingens aliquod & insolitum æditum fuerit miraculum.

15 Licet Euclides & Ptolemæus uti cogerentur circulis multifarie, tamen ubiq; prudentissime atq; doctissime declinauerunt quæstionem proportionis pertinentis ad quadraturam circuli, id est, proportionis circũferentiæ circuli ad suam diametrum.

16 Vt (exempli gratia) dum Euclides propositione octaua sui duodecimi, pronunciaret de proportione columnarum ad pyramides suas, cautè & eruditè excluſit columnas pyramidesq; rotundas.

17 Tanti uiri exemplum secutus est Ptolemæus, dum partes diametri circuli diuideret in partes 120 inter se æquales, & circumferentiam in partes 360 inter se quidem æquales, sed partibus diametri inæquales.

18 Haberet quidem circulus rationem quadrationis suæ, si possibilis esset cognitio proportionis circumferentiæ ad suam diametrum.

19 Ex multiplicatione enim semidiametri in semicircumferentiam, produceret area quadrãguli, æqualis circulo illi dato.

Relin-

20 Relinqueretur autem nihil amplius faciendum, quàm ꝙ medium proportionale inueniendū eſſet, inter duo latera quadranguli illius inæqualia. Hoc enim medium eſſet coſta quadrati circulo æqualis.

21 Vnde conſtat quadraturam circuli nihil aliud eſſe, quàm conſtitutionem quadrati, æqualis circulo dato.

22 Sed æqualitas illa non eſt referenda ad circumferentias, referenda uero eſt ad areas figurarum.

23 Inuentio autem æqualitatis iſtius, præſupponit numerū aliquem, repræſentantem longitudinē circumferentiæ circuli præciſe, ſiue rationalem ſiue irrationalem, qui neutro modo eſt dabilis.

24 Vnde ſequitur primo, impoſſibile eſſe, ut aſſignetur proportio circumferentiæ circuli ad diametrum ſuam, aut ſemicircumferentiæ ad ſemidiametrum.

25 Secūdo ſequitur, impoſſibile eſſe, ut inueniatur medium proportionale inter ſemidiametrum circuli & ſemicircumferentiam eius.

26 Sequitur tertio, impoſſibile eſſe, ut quadretur circulus mathematicus.

27 Ineruditi ferēdi ſunt, ſi iſta impugnauerint, cum talia ſint quæ pietati nihil conferant aut adimant.

28 Tamen eruditi ſentient, hæc eadem & Euclidem & Ptolemæum ſenſiſſe.

De quadratura circuli phyſici.

1 Poſſibile eſt, & factu facile, ut ſumpta proportione aliqua propinqua, inter ſemidiametrū & circumferētiam circuli phyſici, quadrēt circulus ille, ita ut q̄dratio illa ſatisfaciat ſenſibus.

2 Poſſibile (inquam) eſt, ut dentur duæ laminæ æreæ, æque ſpiſſæ, fuſæq; ex eadem mixtura, quarum altera ſit circularis, reliqua uero habeat figuram quadrati: & ut in utraq; ſit pondus unum & idem, ambæq; percuſſæ, uniſonum reddant.

3 Proportio illa rationalis circumferentiæ ad diametrum,

cuius autorem ferunt esse Archimedem (id est, tripla sesquiseptima) miram rei propinquitatem habet, adeò uidelicet, ut quadratura circuli, secundum eam facta, sensus iudicium fallat.

4 Vt faciente diametro circuli partes 28, faciet costa quadrati, circulo illi æqualis, $\sqrt{\frac{8}{9}}616$. Hoc est,

integra	minuta	secunda
24.	49.	9.

5 Proportio uero illa irrationalis, inuẽta à Nicolao de Cusa, de qua Ioannes de monte regio disputat, admodum uicina est proportioni rationali Archimedis.

6 Faciente enim diametro circuli 28, faciet costa quadrati, æqualis circulo illi (secd'm proportionẽ istam irrationalem) $\sqrt{\frac{8}{9}}.\sqrt{\frac{8}{9}}129654+\sqrt{\frac{8}{9}}64827$. Hoc est,

integra	minuta	secunda
24.	47.	33.

7 Si (inquiunt) ex semidiametro circuli dati, atque chorda quadrantis eius, directe coniunctis, fiat diameter alterius circuli, erit triangulus æquilaterus eidem maiori circulo inscriptus, isoperimeter circulo dato.

¶ Quòd argumenta physica nihil faciant pro quadratura circuli mathematici.

1 Nihil faciunt, qui quæstionem à Philosophis motam, de Quadratura circuli, filo aut circino tentat exoluere.

2 Frustrà laborãt, quotquot se calculationibus fatigant, pro inuentione quadraturæ circuli, quocunq; tandem modo aut medio hoc fiat.

3 Chordæ arcuum sumptorum de circulis, dari possunt sub numeris rationalibus aut irrationalibus præcise.

4 Quæ uero dantur sub numeris irrationalibus præcise, nõ possunt dari sub numeris rationalibus præcise.

5 Proportiones uero chordarũ ad arcus suos, neq; sub rationalibus, neq; sub irrationalibus numeris dari possunt.

6 Cum numeri irrationales, secundum Euclidem, non sint

numeri.

numeri, manifestum est, proportiones irrationales, esse proportiones tanquam numeri ad nonnumerum sub numero.

7 Manifestum est etiam proportionem circumferentiæ circuli ad diametrum, atq; arcuum ad chordas suas, esse, uel tanq; numeri, ad non numerum sub non numero, uel tanquam non numeri sub numero, ad non numerum sub non numero.

8 Argumentum hoc physicum est, si sic colligas, Dabile est quadratum circulo dato maius, & dabile est quadratum circulo eidem dato minus, ergo dabile est quadratum illi eidem circulo æquale. Non sequitur.

9 Sicut non sequitur, Dabilis est numerus rationalis minor hoc numero irrationali $\sqrt{3}.9000 - \sqrt{3}16200000$, ut est ille sequens,

integra	minuta	secunda
70.	32.	3.

Et dabilis est numerus rationalis eidem numero irrationali maior, ut est iste rationalis,

integra	minuta	secunda
70.	33.	3.

Ergo dabilis est numerus rationalis, eidem numero irrationali æqualis.

10 Physica argumēta in rebus mathematicis plærunq; fallūt.

11 Si physica argumenta in rebus mathematicis fallunt, multo magis fallunt argumenta & physica & mathematica, in rebus diuinis.

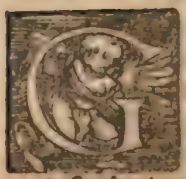
12 Corpus esse perfecte sphæricum, uidetur quidem mihi implicare contradictionem. Sed scriptura sacra habet, Non erit impossibile apud Deum omne uerbum.

13 Orbes cœlorum sunt opera manuum Dei: ideo negare non audeo, eos habere rationes circuli mathematici absolute.

Sed de his omnibus suo loco in Geometria mea dicam latius.

FINIS.

CLARISSIMO VIRO D. IACOBO
Milichio, Medicinæ doctori, suo patrono.



Ratiam & pacem in Christo. Vides uir clarissime, ut consilijs tuis in rebus Arithmeticis ubiq; auscultem. Diu uero iam est, quando mihi eruditionem Campani eximiam commendasti. Hac egō commendatione accensus, cœpi intelligere, ex ipso, decimum Euclidis, numerorū beneficio. Et cum postea meditarer librum de numeris irrationalibus, secutus consilium tuum, addidi eum illi libri meo. Deinde tuo quoq; cōsilio usus, Algebram (quam persuasisti bonis rationibus, à Gebro Astronomo, autore eius, ita esse nuncupatam) multis exemplis illustratam scripsi: quanquam pauciſſima sint mea, maxima uero pars eorum sit Christophori Rudolphi (quem te amare mecū noui, etiam iam in Christo quiescentē, ob egregiam fidelemq; Algebræ publicationem) cæterorum quædam sunt Adami Risen, qui & ipse mihi uidetur sua candide tradere, ut hominem hunc facie mihi ignotum (æque ut Christophorus facie mihi ignotus mansit) admodum amem, & libellum eius reuerenter penes me habeam. Quemadmodum igitur Campanus mihi ad manus dedit librum Arithmeticæ meæ secundum, ita Christophorum mihi tradidisse hunc librum tertium reputo: nam exemplis eius uti uolui hic, sicut illic ꝓpositionibus Campani.

Vtrunq; uero feci consilijs tuis acquiescens. Quare tibi gratum, librum hunc, futurū esse, meq; eo nomine tibi recommendandum fore, fortiter confido.

Vale. Ex pago Holtzdorff. Anno domini M, D, XLIII, secunda die Ianuarij.

Michael Stifelius.

MICHAELIS STIFELII ARITHMETICÆ

LIBER TERTIVS, DE NVMERIS Cossicis, & de regula eorum.

id est, de perfecta arte calculandi.

De regula Algebræ, & de partibus eius, earumq; declaratione. Caput I.

ALGEBRAE regula talis est, ut integræ arti calculandi, merito conferri possit: imò eidem arti collata, longe eam præcellere, hac mea tractatione probabo. Complicat autem regula hæc, omnium regularum aliarum exempla, uiresq; singularum superat uniuersas, nisi Detri regula sit excipienda, cuius opera hæc in multis indiget. Quamuis autem regula Falsi miram habeat latitudinem, comparata tamen ad Algebræ regulam, uix eam collationem meretur, quam centrum in circulo signatum, ad circumferentiam habet. Certum est autem regulam Falsi, formatam esse iuxta formam regulæ Algebræ, quemadmodū regula Algebræ, formata est iuxta formā regulæ Detri. De regula Alligationis (quam etiam Algebra complicat & perfecte complet) hoc uideo, quòd præter Algebram sit formata. Cæterum regulæ Societatū, Diuisionum, Mercimoniorū, Commutationum, licet à regula Detri fluant: tamen regula Algebræ eas perfici atq; compleri, ostendam exemplis plurimis, quæ inferius suis locis adducam. Regulas uero has, Aequalitatis, Separationis, Transuersionis, Commixtionis, Positionis, Legis, Augmenti, Decrementi, Pluris, Residui, Collectionis, & alias

huiusmodi ridicula ferentes nomina, recte mihi uideor appellare (& si ioco hoc fiat) uexationes populi. Ex Algebra enim talium regularum, quolibet die decem aut uiginti formare seu fingere facile possem, si harum rerum inexpertis ingenijs illudere uellem. Complicat etiam regula hæc Algebræ, inuentiones linearum & superficierum infinitas: id quod adeo notum est, ut recte asinus dici mereatur, qui pronunciare audet Algebram nihil docere aliud q̄ ea quæ doceat regula Alligationis, siue ex ignorātia siue ex malitia proficiscatur talis affirmatio.

Hæc est autem famosa illa regula Algebræ, ad suam simplicitatem atq; latitudinem redacta.

Inuenturus numerum inueniendum absconditum, ponat loco illius, Cos. (nos autem ponimus 1 2ę) & inuenta æquatione aliqua, reducat eam, si reducenda sit. Deinde per numerū signi cossici maioris, diuidat reliquum æquationis, eidem diuisori æquatum, sed denominato tamen. Et sic semper proueniet numerus ille absconditus qui inquirebatur, uel in quotiente, uel in aliqua eius radice. Radix autem si qua fuerit extrahenda, pulchre hoc atque sufficienter signabit diuisor suo cossico signo.

Hæc, inquam, est famosissima illa regula, reducta ad simplicitatem suam germanā, sub qua immensam copiam usus complicat, ut exempla eius abunde testātur. Omnia igitur quæ hoc libro uel dicenda uel docenda uenerint, ad eam, tanquam ad scopum unicum, referenda erunt.

Habet autem regula ipsa quatuor partes: duas uidelicet essentiales, & duas accidentales.

Partes essentiales sunt: Inuentio æquationis, & Diuisio. In quolibet enim exemplo regulæ illius, requiruntur hæc duo.

At reliqua duo (id est, accidentia) in plurimis exemplis non concurrunt: ideo partes regulæ accidentales dicendæ sunt. Sunt itaq; Aequationũ reductio, & Radicum extractio, partes accidentales regulæ Algebræ. Exempla autem illa omnium facilima sunt, in quibus partes eius essentiales solummodo concurrunt, absque accidentalium partium concursu. Ideo ab illis tanquam à facilioribus incipiam, ut Lector paulatim & successiue ab ipsis suauiter deducatur ad ea, quæ iudicantur esse difficiliora.

Sed ante omnia exponamus regulam ipsam per exemplum aliquod facile & commodum, ut regula intellecta, cætera quæ dicenda sunt (uti sunt ex seipsis iucunda & philosophica) iucundiora reddantur ex scientia usus eorum.

Exemplum exponens regulam Algebræ, & est 47 Christophori.

Est numerus, cuius partes, tertia et quarta, subtracte a toto relinquant 15.

Quòd Christophorus numeros exempli huius contrahit ad ulnas panni, nihil nos impedit. Neq; enim Algebræ regula curat denominationes uulgares, sed solummodo cossicas denominationes curat: ut sunt hæ denominationes,

2ę. ȝ. cę. ȝȝ. ß. ȝcę. &c.

Quæ & numeros cossicos constituunt. Est enim numerus cossicus nihil aliud, quàm numerus signo cossico denominatus. Sed de hac re inferius suo loco dicendum erit.

Docet autem regula, primo ponendam esse 1 cossam, seu (ut nos facimus) 1 radicem. i. unam summam unitatum, quæ uidelicet intelligatur esse æqualis illi numero, qui mihi proponitur ut ipsum quæram & inueniam.

Pono igitur 1 2ę tanquam partem unam æquationis, & procedo operans iuxta textum pronunciationis, quam habet exemplum, in hunc uidelicet modum.

Cum

Cum pronunciatio dicat de parte tertia numeri inueniendi, recipio partem tertiam de 12ę, quæ est ⅓2ę (sicut tertia pars de flo. est ⅓ f℔) dicatq; de parte quarta, recipio ¼2ę, cum sit quarta pars de 12ę. Sic autem ratiocinor. Ecce 12ę æquatur toti numero inueniendo, ergo ⅓2ę æquatur uni parti tertiæ numeri inueniendi: & ¼2ę æquatur parti quartæ numeri inueniendi. Cum uero tertia & quarta partes numeri inueniẽdi, subtractæ fuerint ab ipso numero inueniendo, relinquuntur 15 unitates, (siue illæ sint contractæ ad ulnas panni siue ad quamcunq; rem aliam) id quod pronunciatio habet. Sequitur ergo, quòd si ⅓2ę & ¼2ę subtraxero ab 12ę (tanquam à toto) quòd relictum remanens faciat 15 tanquam suum æquale. Remanẽs uero relictum est $\frac{5}{12}$2ę, & huic æqualia sunt (iuxta exempli pronũciationem) 15. Atq; ita inuenta est æquatio, iuxta pronunciationẽ quam habet exemplum. Vnde sequitur in regula: Et inuenta æquatione aliqua.] Habes autem iam, ut ex textu exempli, inueniendæ sint æquationes: atq; satis intelligis, æquationem nihil aliud esse, quàm inuentionem proportionis æqualitatis, inter duos terminos diuersimode denominatos. Nam si termini illi sint æqualiter denominati (ut 3ę & 3ę) identitas est, ad regulam Gebri nihil utilis. Concurrunt autẽ ad inuentiones æquationum uarias, uaria ualde, id est, Arithmetica, Geometrica, Musica, Astronomica, theoremata artis ꝑspectiuæ, physica &c̃ Sic modò etiam dicendũ est (pro pleniore expositione regulæ) ut æquatio exẽpli huius positi alia possit inueniri. Scilicet communis sententia est, totum æquari suis partibus omnibus simul sumptis. Itaq; necesse est, ut ⅓2ę & ¼2ę & 15, æquentur cum 12ę, scilicet $\frac{7}{12}$2ę + 15 æquantur 12ę tanquam partes suo toti.

Sequitur autem in regula illa Gebri: Inuentam æquationem reducat, si reducenda sit.] Tunc uero reducenda est æquatio, quando in terminis partium eius una denominatio plus quàm semel inuenitur. Vt hic, $\frac{7}{12}$2ę + 15 æquata 12ę, denominatio 2ę ponitur bis, ideo est æquatio reducenda.

Regula

Regula reductionis huius sumitur penes sententiam illam communem: Si ab æqualibus æqualia auferas, quæ remanent æqualia erunt. Et si ad æqualia addantur æqualia, quæ superexcrescunt æqualia erunt.

Atq; hic animaduertat Lector, quanti sit æstimanda regula ista Gebri, in qua etiam communes hominum sententiæ, uidelicet tam contemptæ & irrisæ, tam pulcherrimos & admirando usus habent, ut uerbis nemo satis explicare possit. Et simul hoc animo expendat, quantũ ornatus & gratiæ cõferat Geometriæ (de usu interim taceo) hæc Gebri regula prorsus philosophica.

Sed ad exemplum me regredi oportet.

Si, inquam, æquatio sit inter 1 2ę & $\frac{7}{12}$2ę + 15, tunc si ab utraq; parte subtrahantur $\frac{7}{12}$ 2ę, tunc manebit æquatio inter 15 & $\frac{5}{12}$2ę. Et hæc est æquatio reducta, quam etiam ex pronunciatione exempli prius inuentam esse nosti.

Sequitur in regula: Deinde per numerum signi cossici maioris, diuidat reliquum æquationis.] Non simpliciter dicit regula, diuidat per numerum cossicum reliquum æquationis: sed dicit, per numerum signi cossici. Diuisor enim talis, dum diuidit abijcit signum suum. Aliàs enim nihil produceret quàm unitatem (cum oporteat eum esse æquatum ad reliquam partem æquationis, ut inferius plenius dicam) quando æquale semel solũmodo inueniatur, atq; præcise, in suo coæquali. Tali uero diuisione, quam præcipit regula, quæritur proportio, non æqualitatis quæ iam inuenta est, sed inæqualitatis, quam habet unitas, nullo signo cossico denominata, ad unitatem denominatam signo cossico illo, quam fert ipse diuisor. Vt cum diuido 15 per $\frac{5}{12}$, tunc producitur 36, qui ad unitatem eam proportionem habet, quam habet 1 2ę ad unitatẽ. Igitur 1 2ę idem erit quod 36, iuxta communem sententiam hanc: Quæ uni & eidem sunt æqualia, etiam inter se sunt æqualia. Hinc dicit regula: Et sic semper prouenit numerus ille absconditus, qui quærebatur.] Addit tamen regula uerba hæc, Vel in quotiente diuisionis,

(ut in exemplo nostro quo regulam expono) uel in radice eius aliqua.] Vt si in exẽplo aliquo posita fuisset 12ℊ, & ex processu pronunciationis fuisset inuentus numerus signi huius ℣ (ut sæpissime fit) æquatus alicui numero nullum signum cossicum habenti (ut si 2℣ essent æquati numero huic 288) tunc diuisione facta (ut 288 per 2 diuisa faciunt 144) non produceretur ualor unius radicis, sed potius unius zensi, seu unius quadrati, quod fit ex radice inuenienda, ideoq; quærẽda esset de quotiente illo radix quadrata (ut √℣. de 144 facit 12) & illa esset numerus inueniendus, seu per 12ℊ repræsentatus. Et sic de alijs.

Et hoc est quod in fine regulæ dicitur: Radix autem si qua fuerit extrahenda, pulchre hoc atq; sufficienter signabit diuisor suo signo cossico.] Scilicet, si 1ℊ inueniatur æquatus 1728, tunc 1ℊ faciet 12. Item si 1℣ æquetur 256, tunc 1ℊ faciet 4. Item si 1ß inueniatur æquari 32, faciet 1ℊ. 2. Et sic de alijs in infinitum.

Habes igitur per hæc expositam totam Gebri regulam, ita ut nihil desit, nisi forte unius adhuc dictionis deficiat intelligentia, huius uidelicet, Maioris. Sic enim habet regula: Deinde per numerum maioris signi cossici, diuidat &c.] Satis autem ex uerbis ipsis uides, ut aliquando incidat æquatio reducta, in qua remaneant plura signa cossica quàm unum, quæ inter se sint diuersa, & tunc maioris signi cossici numerus diuidit reliquum sibi æquatum. Vt si 2℣ + 222ℊ æquent 160, tunc transponuntur 222ℊ, ut 2℣ maneãt æquati 160 — 222ℊ. Atq; ita 2℣ (deposito signo suo cossico) diuidit reliquum, hoc est, 2 diuidit 160 — 22ℊ, & remanent 80 — 11ℊ, &c.

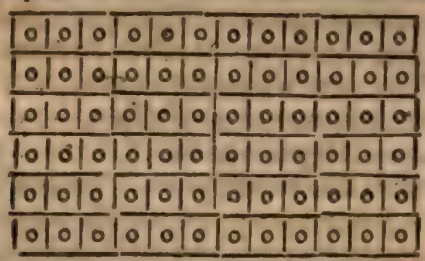
Probantur autem exempla regulæ, post resolutionem radicis, iuxta pnunciationis processum. Vt, numerus inueniendus fuit 36, huius partes tertia & quarta faciunt 21, quæ subtracta à 36 relinquunt 15. Et sic de alijs singulis.

De

De partium regulæ Gebri ostensione, ex figura quadrangulari. Caput II.

DENVO repetenda ueniunt singula membra regulæ Gebri, eodem ordine ut in capite superiori fuerunt exposita. Nam cum ea exponerem cum collatione exempli, ineptum mihi esse uidebatur, si omnia tanquam in una olla, simul coquerentur, & sic particulæ exempli, regulam ipsam declarantis, longius ab inuicem sepositæ, quasi amissæ, diutius essent quærendæ.

ITaq; ab æquationum inuentione mihi denuo incipiendū erit. In qua re animaduertendum est, ut Algebra sit calculatio per lineas, & superficies, atq; corpora, progredientium sub proportionalitate Geometrica cotinua. Pulchre autem ex hac sequenti figura æquationes ostenduntur & declarantur.



Est igitur 12ę linea quædam partium, sub certo quodam numero, seu series quædam rerum quarumcunq;, sub numero aliquo determinando uel determinato, quemadmodum hic uides in superficie hac quadrangula, lineas sex longitudinis, quarum quælibet habet cifras duodecim: & lineas latitudinis 12, quarum quælibet habet cifras sex. Vides autem primo, ut 12 2ę latitudinis æquentur 72. Tota enim figura habet 72 cifras. Et 12 latitudinis lineæ, seu radices, totam figuram illam quadrangu-

larem complent. Sic 6 2ϱ longitudinis æquantur 72. Quia sex lineæ seu radices tales, complent totam superficiem quadrangularem illam. Et hinc vides ut proportio æqualitatis, talis sit proportio, qua terminus eius refertur ad se, tanquam ad aliud, & hoc sub æquationibus cossicis. At vero sub identitate cossica (ut dū dico 6 2ϱ longitudinis æquari 6 2ϱ longitudinis, aut dico 72 æquari 72) refertur idem ad seipsum tanquam ad seipsum. Et quanquam illæ identitates, dum incidunt (ut sæpe fit) loco æquationis, inutiles sint & steriles omnino, tamen (ut Algebræ regula hæc nihil tam vile esse sinit in rerum natura, cui non locum aliquem officij assignet) ea posita, mira facilitate formantur valde variæ æquationes reducendæ. Exempli gratia, 12 2ϱ ponātur æquari 12 2ϱ. Quicquid iam transtuleris ab una parte ad alteram, mediante signo subtractorum, nascitur æquatio reducenda, modò hoc quod transponitur nō reijciat signum subtractorum. Inspecta igitur figura quadangulari, transferantur 6 2ϱ ad partem alteram, ita ut pars illa translata ferat signum subtractorum. Vides autem ex figura, ut 6 radices latitudinis faciant 36. Itaq; 6 2ϱ æquantur 12 2ϱ — 36. Sic 8 2ϱ æquantur 12 2ϱ — 24. Item 10 2ϱ æquantur 12 2ϱ — 12. Et sic de alijs.

Item quicquid rursum retrò transtuleris, quod vel signum subtractorum ferat, vel signum additorū, semper manet æquatio sub variationibus istis terminorum. Vt posita hac æquatione, videlicet 6 2ϱ æquatæ 12 2ϱ — 36, transfero de diminuto 6, tunc 6 2ϱ + 6 æquabuntur 12 2ϱ — 30. Sic 6 2ϱ + 30 æquabuntur 12 2ϱ — 6. Item 6 2ϱ — 12 æquantur 10 2ϱ — 36. Item 6 2ϱ — 10 æquantur 10 2ϱ — 34. Sic quicquid transfertur, ita transferatur ut mutet signum, aut additorum in signum subtractorum, aut signum subtractorum in signum additorum, tunc manet illæsa æqualitas, sub terminis mutatis. Manet etiam illæsa æquatio, si utrique termino eadem addantur, aut ab eisdem eadem subtrahantur. De qua re satis dixi capite superiore: quanquā & hæc quæ iam dixi de transpositione, idem prorsus fundamentum habeant.

habeant. id quod diligens Lector facile uidebit. Scilicet posita hac æquatione, 6 2ę æquatæ 12 2ę — 36, si de diminuto transferas 6, sic stabit æquatio, 6 2ę + 6 æquata 12 2ę — 30. Hoc enim factum est, uidelicet ad hanc partem 12 2ę — 36 addidi 6, quando ea subtraxi de diminuto suo. Patet ex communi sensu. Scilicet habere malo 12 ℔ — 30 grossis, quàm 12 ℔ — 36 gros. Itaq; ad alteram partem æquationis etiam addenda sunt 6, ut terminus sic stet, 6 2ę + 6, &c. Notum & hoc est, ut illæsæ maneãt æquationes, si ambo termini uno eodemq; numero uel multiplicentur uel diuidantur, cum hoc (teste Euclide) uerum sit in proportionibus inæqualitatis &c.

Dictum est autẽ superiore capite, Aequationem esse partem essentialem regulæ Algebræ: id quod pulcherrime dicitur atq; obseruandum uenit, ut plenius intelligas, quale & quantum cornucopiæ habeas in ipsa regula Algebræ. Scilicet, quemadmodum in quolibet exemplo regulæ illius, ponitur 1 2ę, aut saltem subintelligitur poni (ut quædam exempla sunt) sic in quolibet exemplo illius regulæ, etiam requiritur proportio æqualitatis (id est, æquatio) mediante qua resoluatur 1 2ę in numerũ aliquem determinatum. Quẽadmodum uero sub unitate ista cossice denominata (id est, sub 1 2ę) comprehenditur tota uniuersitas numerorum indeterminate, cum nullus sit numerus qui quæsitus ex isto sacco copiæ, non prodeat: ita sub æqualitatis proportione (id est, sub cossica æquatione) comprehenditur tota uniuersitas proportionum, cum nulla sit proportio quæ uocata seu quæsita per Algebræ regulam hanc, non prodeat ex æqualitate, &c.

Cum uero Reductio æquationum etiam numeretur inter partes regulæ Algebræ, licet accidentalis sit pars (ut cap. 1. satis dixi) eam reductionem etiam cogor tractare. Accidit aũt æquationi reductio, sicut diuisioni accidit radicum extractio: diuisioni uero seruit, & æquatio, & æquationis reductio. Aequatio itaq; præmittitur diuisioni, ut uidelicet sit, qd̃ possit diuidi.

Contingit autem ſæpe (id eſt, in omnibus æquationibus reducendis contingit) ut æquatio ſtet ſub terminis, ſub quibus diuiſionem (qualē requirit Coſſa, ſeu regula AlGebri) nō recipiat. Hac igitur cauſa reducitur talis æquatio in aliā, cuius termini debitam recipiant diuiſionem. Modus autem reductionis huius poſitus atq; oſtenſus eſt capite ſuperiore, coincidit'q; cum modo tranſpoſitionis ſeu translationis particularum. Scilicet, quicquid in una parte æquationis fuerit additum, tranſpoſitū in partem æquationis alteram, fit ſubtractum: & quicquid fuerit ſubtractum in una parte æquationis, tranſpoſitum in alterā partem, efficitur additum. Nihil (inquam) eſt hoc aliud, quàm quod ex communi ſententia ſuperius dixi, æqualia manere, ſi uel addantur æqualia ad æqualia, uel ab æqualibus æqualia ſubtrahantur. Hæc omnia pulcherrime cernuntur in figura ſuperiori quadrangulari.

Repetamus ad hæc ſuperiora exempla.

Scilicet, $6\,2\varrho$ æquatæ $12\,2\varrho - 36$, ſi ab utraq; parte ſubmoueas $6\,2\varrho$, tunc $6\,2\varrho - 36$ æquantur nihilo: ut neceſſe ſit $6\,2\varrho$ æquari 36. Patet ex tranſpoſitione diminuti. Sed hæc pulchre etiam habet figura quadrangularis ſuperior.

Item $6\,2\varrho + 6$ æquantur $12\,2\varrho - 30$.

Primo ſubtrahuntur ab utraq; parte $6\,2\varrho$, tunc manent 6 æquata $6\,2\varrho - 30$. Trāsfero igit̄ 30. tūc inuenio 36 æquata $6\,2\varrho$. Et ſi $6\,2\varrho - 10$ æquentur $10\,2\varrho - 34$, tunc primo transfertur diminutum prioris partis, & ſic $6\,2\varrho$ æquabuntur $10\,2\varrho - 24$. Poſtea ſubtraho utrobiq; $6\,2\varrho$, tunc inuenio $4\,2\varrho$ æquatas 24.

Illis omnibus reſpondet regula hæc: Eadem ſigna ſubtrahunt, diuerſa uero ſigna addunt.

¶ Aequatio inuenta inter minutias qualeſcunq;, reducitur ad æquationem integrorum per multiplicationem in cruce. Vt ſint $\frac{3\,2\varrho}{5} + \frac{12}{1}$ æquata $12\,2\varrho - 66$, ſic ſtabit exemplum ad reductionem;

$$\frac{3\,2\varrho}{5} + \frac{12}{1} \qquad 12\,2\varrho - 66$$

Itaq;

Itaq; 3 2ę + 12 æquabuntur 60 2ę — 330.

Item $\frac{1}{2}$2ę + 12 æquentur $\frac{10}{5}$2ę ÷ 18 multiplica in cruce, tunc uide bis esse 21 2ę + 84 æquata 50 2ę — 90. Hæc exempla etiam sunt formata ex figura illa quadrangulari.

Ratio reductionis huius sumitur ex ipso Algorithmo minutiarum. Quando enim minutiæ multiplicantur in cruce, tunc acquirunt æquales denominatores, ut patet ex algorithmo minutiarum. Quando autem minutiæ habent æquales denominatores, tunc ea est proportio inter numeratores, quæ est inter ipsas minutias. Si igitur proportio æqualitatis sit inter minutias (ut est inter illas quæ æquationem faciunt) si illæ reducant ad denominatores æquales, necesse est ut inter numeratores etiam sit proportio æqualitatis. Itaq; denominatores abijciuntur tanquam inutiles seu superflui ad hanc rem. Ideoq; sufficit ad prædictam reductionem multiplicatio in cruce.

¶ De æquationibus autē huiusmodi, √$\frac{1}{2}$24 2ę æquata 12, suo loco dicam, i. capite quinto de cossicis numeris irrationalibus. Quamuis hoc exemplum (sumptum de figura superiori quadrangula) etiam nunc facile intelligi possit, reductum. Satis enim constat, ut quadrata inter se necessario sint æqualia, quorū latera sunt æqualia. Itaq; si √$\frac{1}{2}$24 2ę sit æqualis 12, necesse est ut 24 2ę sint æquales 144.

¶ Item in figura quadrangulari etiam facile uidere poteris, ut 2 $\frac{1}{2}$ sint æquales 12 2ę. Sed locus huiusmodi æquationibus declarandis alius inferius deputabitur. Quanquam & hoc exemplum cum similibus etiā iam possit intelligi. Scilicet utraq; pars æquationis diuisa binario (id est, uno & eodem numero ut paulo superius dictum est) relinquit 1 $\frac{1}{2}$ æquatum 6 2ę. Satis autem constat quòd quadratum (id est, 1 $\frac{1}{2}$) habens sex latera seu 6 radices, habebit in uno latere seu in 1 2ę, partes seu puncta 6. Itaq; reducta æquatio sic stabit,

2 2ę æquatæ 12, seu 1 2ę æquata 6.

De

De diuisione quam regula Algebræ præcipit.

SAtis dictum est paulo superius, ut omnia quæ præmittit regula Algebræ diuisioni, ea præmittat propter diuisionē, ut facile intelligere possis Diuisionem esse principalissimam partem regulæ Algebræ. Nec mirum. Ea enim resoluit, 2ę in quolibet exemplo eius, immediate quidem, quoties diuisoris signum fuerit 2ę: mediate uero, cum diuisor aliud habuerit signū cossicum, uidelicet 3. uel cę. uel 33. &c̄

Breuibus iam ostendi potest, quòd regula Algebræ, in uniuersa incomparabiliq; copia sua, sit regulæ Detri ministra officiosissima, ut & hac ratione, regula Detri excellat, quicquid uel inuentum est, uel inueniri potest in tota Arithmetica. Remittit autem Algebræ regula (si acute res inspiciatur) omnia sua ad regulam Detri, cuius opera rursum in multis exemplis indiget, quasi famula dominæ suæ auxilio, ut uidebimus in exemplis.

Sic autem facit Algebra. Aequationes inuentas, uel ex pronunciatione exempli immediate, uel mediante aliqua propositione Euclidis, aut aliquo alio theoremate artis alicuius, reductasq; (id est, ad regulam Detri paratas & coaptatas) ubi res postulat, remittit ad ipsam regulam Detri, quatenus illa more suo, ad æquationem inuentam superaddat alteram, quam rei perfectio requirit. Neq; enim regula DeTri minus operosa est in combinandis æquationibus, quàm in combinandis proportionibus: utrunq; enim uidere licet in quolibet exemplo eius. Vt (exempli gratia) 3 poma emuntur pro 2 ß: ergo (iuxta regulam Detri) 6 poma emuntur pro 4 ß. Seruant quidem numeri rerum, suas coæquatas proportiones. Vt sicut 3 ad 2 habet sesquialteram proportionem, sic eandem proportionem habet 6 ad 4. Sed nihilominus res numerorum, interim seruant suas æquationes combinatas. Vt, sicut 3 poma æquata sunt ab emptore atq; uenditore, duobus denariolis: sic 6 poma æquata sunt 4 denariolis, ab eisdem. Sic similiter dum ex figura quadrangula, colligo in hunc modū: 6 2ę faciūt 72, ergo 12ę fac. 12.

seruant

ſeruant numeri ſuas proportiones inæqualitatis, & res numerorum ſeruant ſuas proportiones æqualitatis.

Sed (ut ad rem inſtitutã regrediar) oſtendendum mihi erit, qua ratione regula Algebræ diuidat, per numerum coſſicum, deponentem ſignum ſuum coſſicum quod gerit. Sed natura numerorum hoc habet, quod duo numeri æquiualentes, inæqualiter denominati (ut apud nos ſunt 2 g2 & 24) inæquales ſint numero unitatum, coaſſumptaq; unitate denominata â denominatione horum numerorum maiore, conſtituant terminos tres regulæ De Tri, qua operatione ualor unitatis ſic denominatæ producatur. Vt hic uides, 2 gro. dant 24 . quantũ dat 1 g2? Item ex figura quadrangulari ſic: 12 2 dant 72, quantũ dat 12? Et ſic intelligitur 1 2 multiplicari in terminum ſecundum, ut ſic etiam ſecundus terminus recipiat ſignum illius unitatis. Sed illud mox interimit diuiſor, qui eſt terminus primus in diſpoſitione De tri. Quando enim diuidendus & diuiſor habuerint eandem denominationẽ, tunc altera alteram tollit (ut ſatis docui libro primo de diuiſione numerorum uulgariter denominatorum) & hac ratione amittit diuiſor (dum diuidit) ſuam denominationem. Ex quibus omnibus patet diuiſionem illam, quam præcipit regula Algebræ, eſſe compendioſam operationem regulæ De tri, &c. Vnde cum ex figura quadrangulari ſuperius poſita, uideam 72 æquari 6 2. item 72 etiã æquari 12 2. diuido 72 per 6, & inuenio 12, id eſt, numerum partium longioris radicis ſeu lateris. Item diuido 72 per 12, & inuenio 6, id eſt numerum breuioris radicis, æque ac ſi per regulam De tri fuiſſem operatus.

VLtimo pars regulæ Algebræ accidentalis eſt, Radicum extractio, de qua nunc ultimo loco mihi dicendum eſt aliquid ex figura quadrangulari poſita. Facile autẽ uides, ut 2 æquentur 72. Et notum eſt, 2 eſſe duo quadrata. Itaq; duo quadrata æquantur 72. Hæc diuiſio non producit reſolutam radicem, ſed reſolutum zenſum. Sic enim regula De tri habet:

2 ☆ dant 72, ergo 1 ☆ dat 36. Quærenda est igitur radix quadrata de 36, ea facit 6. Sic ½ ☆ æquatur 72, facitq; 1 ☆. 144. Et ideo 1 ☉ facit 12. Item 4½ ☆ æquantur 72, facit 1 ☆. 16. Et 1 ☉ facit 4. Item 8 ☆ æquãtur 72, facit 1 ☆. 9. ideo 1 ☉ facit 3. Sic 18 ☆ æquant 72. Vnde 1 ☆ facit 4. Et 1 ☉ facit 2, &c. Et hoc est quod dicit regula Algebræ: Numerum absconditum reuelari, uel in quotiente diuisionis, uel in aliqua radice eius.] Additq; regula, Radix uero si qua fuerit extrahenda, hoc pulchre & sufficiẽter signabit diuisor suo cossico signo.] Scilicet, ubi diuisor habuerit hoc signũ ☇, tunc extrahenda erit radix cubica de quotiente diuisionis. ut hic, 3 ☇ æquati 1029, facit 1 ☇ 343, & 1 ☉ facit 7. Item ubi diuisor fuerit denominatus hoc signo ☆☆, extrahenda erit de ꝙtiente diuisionis radix zensizensica: ut hic, 5 ☆☆ æquantur 80. igitur 1☆☆ facit 16, & 1 ☉ facit 2. Sic ubi diuisor denominabitur isto signo ß, erit extrahenda de quotiente diuisionis radix surdesolida: ut hic, 8 ß æquantur 8192, itaq; 1 ß facit 1024, & 1 ☉ facit 4. Et sic de alijs in infinitum.

Item ubicunq; posita fuerit denominatio signi huius, ☆, ad diuisorem (ut hic, 1 ☆ æquatus 72 — 6 ☉) extrahenda erit radix quadrata de quotiente diuisionis, qualis qualis sit quotiens ille: scilicet quando 2 ☆ æquantur 144 — 12 ☉, tunc 1 ☆ æquãt 72 — 6 ☉. Est ergo radix quadrata quærenda de quotiente hoc 72 — 6 ☉. Sic etiam dum 1 ☆ æquatur 6 ☉ + 72, quærenda est radix quadrata ex quotiente hoc, 6 ☉ + 72. Item si 1 ☆ æquetur 12 ☉ — 36, quærenda erit 1 ☉ de quotiente hoc 12 ☉ — 36. Item si 1 ☆ æquetur 18 ☉ — 72, quærenda est radix quadrata de quotiente hoc, 18 ☉ — 72. Sed de inuentione radicum huiusmodi docebit caput quartum.

SAtis indicaui, ut calculatio secundum regulam Algebræ sit calculatio quædam per lineas & superficies. Ostensæq; sunt ex quadrangulari figura uariæ inuentiones æquationum &c. Restat nunc ut significem, quomodo exempla & ænigmata formari possint secundũ æquationes inuentas aut inueniendas.

Alexander

¶ Alexander magnus, cum aliquando familiarius Calisthenem philosophum compellasset, de ætate sua, suorumq; amicorum, ita disseruit. Ego, inquit, Ephestionem meum duobus annis antecedo. At Clytus amborum annos sua ætate comprehendit, & præterea annos quatuor. Cui Calisthenes: Cum pater meus uixerit annos 96, iucunda mihi fuit ista relatio ô rex. Nam annos trium uestrum ætas eius præcise habuit.

Quæritur qua ætate Alexãdri habitũ fuerit istud colloquium.

Primo pono unam lineam annorũ pro ætate Ephestionis, id est, 1 ☉. Et sic pro ætate Alexandri ponenda erit æqualis linea annorum, & duo anni. i. 1 ☉ + 2. Et sic pro ætate Clyti ponendæ sunt duæ lineæ prioribus æquales, & 6 anni. i. 2 ☉ + 6. Et his simul cõputatis, uidelicet 4 ☉ + 8, æquari sunt 96 anni. Facit 1 ☉. i. una linea, 22 annos. Itaq; ætas Alexandri habuit 24 annos, Clyti 50.

Vel, pro ætate Alexandri pono unam lineã annorum, id est 1 ☉. Et sic ponenda uenit pro ætate Ephestionis una linea, minus annis duobus. i. 1 ☉ — 2. Atq; ita Clyto ueniunt ponendæ duæ lineæ annorũ, plus duobus annis, id est, 2 ☉ + 2. Et sic 4 ☉ æquant annis 96. Facit 1 ☉. 24 ætatem uidelicet Alexãdri &c.

Ex isto exemplo diligens lector poterit discere, ut res accommodandæ sint lineis, formãdaq; sint rerũ exempla ex numeris.

Sequitur exemplum aliud quod accommodatur superficiebus.

¶ Nicanor, ea pugna qua interijt, occurrit Iudæ Machabæo agmine quadrato, collecto ex Syrorum auxiliarijs militibus, atq; ijs quos secum adduxerat. Cæsa sunt autem ex eo agmine 35000, reliqui fuga elapsi sunt: quorum numerus (ultra numerũ auxiliariorum prædictorum) fuit 156. Quæritur nunc, quot militibus occurrerit Nicanor Machabæo?

Pono superficiem unam quadratam militum, id est, 1 ▢. Sunt autem in ea superficie computati, milites cæsi; item numerus auxiliariorum militum, id est 1 ☉: item numerus alius fugatorum, id est, 156. Aequatur itaq; 1 ▢ tribus prædictis summis,

mis, uidelicet 35156 + 12ℰ. Cum igitur diuisor habeat signum hoc ℛ, imo cum 35156 + 12ℰ, proponatur tanquã superficies quadrata, quærenda est radix quadrata de illa superficie, seu de numero isto cossico. Patet autem ex ipso numero inspecto, ut Syrorum milites, solummodo una linea fuerint agminis illius quadrati. Itaq; multiplicatione numeri Syrorum in se, producitur totum agmen exercitus illius.

Vt autem radices ex cossicis numeris huiusmodi extrahantur, dicam capite quarto. Nunc uero caput tertium uideamus, de Algorithmo numerorum cossicorum.

De Algorithmo numerorum Cossicorum. Caput III.

EST autem regula Algebræ talis, ut peculiares numeros requirat, qui proprium Algorithmum habeãt. Et ea ratione numeri tales Cossici dicuntur. Numeri uero Cossici, sunt numeri denominati proportionaliter à terminis progressionum geometricarum. Disposita enim progressione Geometrica ab unitate incipiente, sub quacunq; hoc proportione contingat, uocatur terminus immediate unitatem sequens radix (ut copiose dixi libro primo cap. 4.) & ab hoc termino, qui uidelicet unitatem sequitur, & radix progressionis est, denominantur omnes numeri Cossici signati hoc signo ℰ. Sic omnes numeri cossici signati isto signo ℛ, denominãtur à termino progressionis Geometricæ tertio, uidelicet ab eo qui radicem progressionis immediate sequitur. Vnde tales numeri Cossici uocantur zensi seu quadrati. Vt 146 ℛ significat 136 quadratos terminos alicuius progressionis geometricæ: seu 136 terminos tales, quales inueniuntur in tertio loco alicuius progressionis Geometricæ. Sequitur deinde 1 ☇, id est, numerus cubicus. Cubicum numerum

rum semper sequitur 1 ☵. i. numerus zensizensicus, qui uidelicet numerum quadratum habeat pro sua radice quadrata. Numerum zensizensicum semper sequitur 1 ß, id est, numerus surdesolidus. Numerum talem semper sequitur numerus zensicubicus, qui in cossica progressione sic figuratur, 1 ☵☉. Et sic deinceps in infinitum.

Hæc est igitur progressio cossica, ferens denominationes numerorū cossicorum.

1. 1 ☉. 1 ☵. 1 ☉☉. 1 ☵☵. 1 ß. 1 ☵☉☉. 1 bß. 1 ☵☵☵. 1 ☉☉☉. 1 ☵ß. 1 cß. 1 ☵☵☉☉. 1 dß. 1 ☵bß. 1 ☉☉ß. 1 ☵☵☵☵. Et sic deinceps in infinitum.

Nulla autem est progressio Geometrica, quam ista Cossica progressio cōprehendat, cum nullus sit numerus qui non possit repræsentari per 1 ☉. Et nullus sit numerus quadratus, qui non repræsentetur sub isto termino eius 1 ☵. Atq; nullus sit numerus cubicus, q nō cōprehēsus sit hoc termino eius 1 ☉☉. Et sic de alijs.

Sicut autem denominationes uulgares, non solum unitates recipiunt, sed nullum excludunt: sic denominationes illæ cossicæ, quoslibet numeros patiunt, ut 4 ☉. 10 ☵. 500 ☉☉. Et sic de alijs.

Dicuntur autem Cossici numeri, proportionaliter esse denominati, propter terminos progressionis Cossicæ, ut satis uides.

Sequitur etiam ex progressionis Cossicæ expositione, quòd Cossici numeri nullum certum numerum repræsentent, neq; certam aliquam proportionē ponant. At sub regula Algebræ coartantur, atq; ita coguntur, ut & certos numeros producant, & certas proportiones seruent. Quanquam numeri eorum illi certi, incogniti sint, donec inuenta æquatione aliqua resoluant.

Recipiunt uero Cossici numeri denominationes uulgares, ultra denominationes cossicas. Vt 10 ☉ ℔ sunt decem radices, seu lineæ decem florenorum. Sic 12 ☵ g ☉ sunt duodecim superficies quadratæ ex florenis factæ, ad longitudinem & latitudinem certæ alicuius radicis &c.

¶ Numerorum aūt cossicorum quidam dicuntur simplices, ut 20 ☉, 30 ☵, &c. Et quidā dicunt compositi, ut sunt 1 ☵ + 1 ☉.

item 2 ℨ + 8 &c. Et quidam dicuntur diminuti, ut 2 ℘ — 8 &c.

Deinde aliam diuisionem habent. Nam quidam sunt rationales, aut tanquam rationales: quidam uero sunt irrationales, aut tanquam irrationales. ut in exemplis regulæ Algebræ luculenter uidebimus.

De inuentione denominationum cossicarum.

Notum est ex ijs quæ libro primo dixi, circa progressionũ Geometricarum expositiones, ut progressio numerorum naturaliter progredientium, exponat terminos progressionum Geometricarum. Quemadmodum igitur series numerorum naturalis, exponit singulas progressiõs geometricas, ita etiam cossicam progressionem exponit. Eam uero expositionẽ sufficit subindicare sequenti dispositione.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.
1. 1 ℘. 1 ℨ. 1 ℘℘. 1 ℨℨ. 1 ß. 1 ß ℘. 1 ß ß.

Et sic deinceps in infinitum.

Quemadmodum autem hic uides, quemlibet terminũ progressionis cossicæ, suum habere exponentem in suo ordine (ut 1 ℘ habet 1. 1 ℨ habet 2 &c.) sic quilibet numerus cossicus, seruat exponentem suæ denominationis implicite, qui ei seruiat & utilis sit, potissimũ in multiplicatione & diuisione, ut paulo inferius dicam.

Generantur autem signa Cossica singula, ex suis exponentibus numeris, hoc modo.

Exponentem signi resolue in partes suas aliquotas incompositas, si sit compositus, ita ut ipsum numerum partes illæ referant, multiplicatione sua inter se. Quibus partibus sic stantibus applica cuilibet suum signum, tunc habebis signum integrum integri illius numeri.

Exemplum.

Volo inuenire signum huius numeri 24. Resoluo eum in partes suas aliquotas incompositas, ipsum multiplicatione componentes, uidelicet in 2. 2. 2. 3. Et quia harum partium signa

sunt

sunt hæc ☵. ☵. ☵. ☍. ideo signū cossicum vigesimæquartæ quantitatis cossicæ (unitas enim, i. primus terminus progressionis cossicæ, non reputatur inter quantitates) est hoc ☵☵☵☍. Et reducitur quodlibet signum cossicum rursus in suum exponentem numerum. Sic autem reducitur:

Cuilibet signo suum exponentem suprapone, quo facto, multiplica exponentes illos inter se, & necesse erit ut ea multiplicatione redeat numerus exponens illius signi compositi, ut ☵:☵:☵:☍:

Sic 100 generat hoc signum ☵☵ß, & hoc signum ☵☵ß rursum ad hunc numerum 100 reducitur.

Sicut igitur infiniti sunt numeri, ita infinita sunt signa cossica, seu cossicæ denominationes. Et sicut idem numerus non potest generare alterius numeri signum, sic eadem denominatio cossica non potest esse nisi unius solius numeri exponentis exposita. Et sicut necesse est, ut quilibet exponens cōpositus, pariat signum cossicum compositum, sic necesse est ut exponēs incompositus, pariat signum cossicum incompositum.

Progressio numerorum incompositorum.

2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. 41. 43. 47. 53. 59. 61. 67. 71. 73. 79. 83. 89. 97. 101. 103. 107. &c̄.

Progressio signorum incompositorum.

☵. ☵. ☍. ß. bß. cß. dß. eß. &c.

Progressio signorum compositorum.

☵☵. ☵☍. ☵☵☵. c☍. ☵ß. ☵☵☍. ☵bß. &c.

De multiplicatione & diuisione, & radicum extractione.

1. Quando numerus cossicus fuerit multiplicatus aut diuisus per numerum abstractum, tunc nihil differt ea multiplicatio, aut diuisio, à multiplicatione aut diuisione numeri vulgariter denominati, per numerū abstractum. Vt sicut 4 ℔ multiplicati per 3, faciunt 12 ℔: sic 4 ☵ multiplicatæ per 3, faciunt 12 ☵. Et 4 ☵ multiplicati per 3, faciunt 12 ☵, &c.

Item

Item sicut 12 ℔ diuisi per 3, faciunt 4 ℔: ita 12 2ℓ diuisæ per 3, faciunt 4 2ℓ. Et 12 ⅔ diuisi per 3, faciunt 4 ⅔.

2. Quando numerus cossicus fuerit multiplicatus aut diuisus per numerum cossicum, tunc numeri signorum, suam quidem regulam sequuntur iuxta Algorithmum communem, sed signa suam propriam multiplicationẽ & diuisionem habent.

Regula multiplicationis & diuisionis signorum Cossicorum.

Exponentes signorum, in multiplicatione adde, in diuisione subtrahe, tunc fit exponens signi fiendi.

Exempla multiplicationis.

32 ⅔ multiplicati in 25 ℓ, faciunt 800 ß.

Item 4 2ℓ in se faciunt 16 ⅔. Item 5 ⅔ in se faciunt 25 ⅔⅔.

Exempla diuisionis.

800 ß diuisa per 25 ℓ, faciunt 32 ⅔.

Radix quadrata ex 16 ⅔, facit 4 2ℓ.

Radix quadrata ex 25 ⅔⅔, facit 5 ⅔. Et sic de alijs.

Sic 4 2ℓ in se cubice multiplicata faciant 64 ℓ, cum exponens signi huius 2ℓ triplatus, faciat 3, cuius signum sit ℓ. Ita rursum radix cubica ex 64 ℓ, facit 4 2ℓ, cum exponens signi huius ℓ tertia parte sui faciat 1, cuius signum sit 2ℓ, &c.

Sic igitur probat multiplicatio diuisionem (ut ubicq;) & diuisio multiplicationem. Item multiplicationem quadratam, probat radicis extractio quadrata: & uicissim radicis extractio, probat multiplicationem quadratam &c.

Alia probatio superiorum.

Sit ualor 1 2ℓ. 2 (poteris enim ualorem recipere ad placitũ, cum extra operationes regulæ Algebræ, numeri cossici ponãt uagas ꝓportiones) tunc 32 ⅔ faciunt 128, & 25 ℓ faciunt 200, faciunt uero 800 ß. 25600. Vide iam an multiplicatio duorum horum numerorũ, 128, & 200, etiã faciant 25600. Et sic de alijs.

Demonstratio prædictorum.

Qualiacunq; facit Arithmetica progressio additione, & subtractione, talia facit progressio Geometrica multiplicatione.

&

& diuisione, ut plene ostendi lib. 1. capite de geomet. progres.

Vide ergo,

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Sicut ex additione (in superiore ordine) 3 ad 5 fiunt 8, sic (in inferiore ordine) ex multiplicatione 8 in 32 fiunt 256. Est autem 3 exponens ipsius octonarij, & 5 est exponens numeri 32. & 8 est exponens numeri 256. Item sicut in ordine superiori, ex subtractione 3 de 7, remanent 4, ita in inferiori ordine ex diuisione 128 per 8, fiunt 16.

Similia hic uides,

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	1☉.	1♑.	1☉.	1♑♑.	1♑.	1♑☉.	1♑♑.	1♑♑♑.

Sicut ex additione 3 ad 5 fiunt 8, sic ex multiplicatione 1 ☉ in 1♑, fit 1♑♑♑. Et sicut ex subtractione 3 de 7 remanent 4, sic ex diuisione 1♑♑ per 1☉, remanet 1♑♑.

¶ De reductione cossicorum numerorum, in minimos, sub eadem ꝓportione, facile iudicabis. Scilicet 24☉ & 36♑ sic stant in minimis, 2. & 3♑. Cum numeris enim signorum agimus hic, iuxta Algorithmum communem. Signa uero reducimus per subtractionem minoris signi, ab utroq; numero cossico. Hinc fit ut alter eorū (.i. qui minus signū habet) semp fiat absolutus.

Sic similiť de tribus aut pluribus numeris cossicis iudicabis. Vt si 3♑☉ æquati sint 14♑♑ − 8♑, tūc ita stabit æquatio reducta: 3♑♑ æquari 14♑ — 8. Probo. Radix maior facit 2 (minor enim radix facit $\sqrt{\frac{1}{3}}$) igitur 3♑☉ faciunt 192. Et tantum etiam faciunt 14♑♑ — 8♑. Est igitur æquatio præcise posita.

Item (ut probem reductionem) 3 ♑♑ faciunt 48: & tantum etiam faciunt 14♑ — 8.

¶ Quando igitur fit diuisio numeri Cossici per numerum cossicum maius signum habentem, tunc ponitur diuisor sub diuidendo, ut fiat minutia reducenda in minimos terminos. Vt, sint diuidendi 8♑ per 2♑☉, facit diuisio $\frac{8}{2}$♑☉. Sic autem stat minutia

nutia hæc reducta $\frac{4}{12}$. Et sic in tali casu semper est numerator minutiæ numerus absolutus.

De minutijs non est opus hoc loco plura dicere, sed sufficiēt ea quæ ponam circa finem capitis huius.

De Algorithmo numerorum Cossicorum compositorum & diminutorum.

HActenus in isto capite dixi de numeris cossicis simplicibus, id est, qui neq; signum additorum habent neq; signū subtractorum: restat igitur nunc ut dicam de cossicis numeris compositis, & de diminutis.

Quando autem cossicus numerus additur ad numerum alterius signi, tunc fit cossicus numerus compositus. Vt 6 ☉ ad 12, faciunt 6 ☉ + 12. Item 6 ☉ ad 8 ☽, fac. 8 ☽ + 6 ☉. Et sic de alijs.

Sic quando numerus cossicus subtrahitur à numero alterius signi, aut alius numerus subtrahitur ab eo, tunc fit cossicus numerus diminutus. Vt 6 ☉ de 8 ☽, relinquunt 8 ☽ — 6 ☉. Item 12 de 6 ☉, relinquunt 6 ☉ — 12. Et sic de alijs.

Quando uero duo numeri cossici idem signum habentes, uenerint addendi, aut alter ab altero uenerit subtrahendus, tunc nihil aliud fit nisi numerus cossicus simplex. Vt 8 ☽ ad 4 ☽, fiunt 12 ☽. Sic 5 ☉ de 7 ☉, fiunt 2 ☉. Et sic de alijs.

Ratio autem additionis mediante signo additorum, & subtractionis mediante signo subtractorum, est, quòd numeri cossici signorum diuersorum, aut uagam habent proportionem ad inuicem (ut in exemplis algorithmorum, ubi ad probationē exemplorum ferè quilibet numerus recipi potest pro 1 ☉) aut si non sit uaga, tamen incognita manet donec propria & certa radix eruatur: tunc enim (id est, resoluta 1 ☉) omnes numeri cossici exempli propositi resoluuntur in numeros absolutos.

Pro algorithmo autem numerorum cossicorum Compositorum atq; Diminutorū, repetendæ sunt regulæ Algorithmi signorum additorum & subtractorum, quas posui libro 2.

Regulæ

Regulæ additionis & subtractionis.

1. Eadem signa idem signum ponunt, nisi in subtractione, vbi numeri prepostere ponuntur.

2. Diuersa signa commutant speciem. Et A ponit M. Sed S ponit S.

Regula multiplicationis & diuisionis.

Eadem signa, ponunt signum additorum: diuersa vero signa ponunt signum subtractorum.

Regula æquationum reducendarum.

Eadem signa signant fiendam subtractionem. Diuersa vero signa signant fiendam additionem.

Expositiones regularum harum sufficientes dedi in libro superiore, de irrationalibus numeris. Nihil igitur omnino restat hic dicendum ulterius de regulis his, sed sufficiũt exempla hæc, quæ iam ponam pro complemento Algorithmi numerorum Cossicorum.

Exempla Additionis.

$6\,\mathfrak{2} + 8$	$6\,\mathfrak{z} + 8\,\mathfrak{2}$
$7\,\mathfrak{2} + 10$	$2\,\mathfrak{z} - 10\,\mathfrak{2}$
$13\,\mathfrak{2} + 18$	$8\,\mathfrak{z} - 2\,\mathfrak{2}$

Ad probandum primum exemplum per numeros absolutos, poteris recipere quemlibet numerum pro radice. Et ad probandum exemplum secundum per numeros absolutos, poteris recipere quemlibet numerum integrum quaternario maiorem, pro $1\,\mathfrak{2}$. Nam si una radix recipiatur pro 5, tunc erit æquatio inter $6\,\mathfrak{z} + 8\,\mathfrak{2}$ & $8\,\mathfrak{z} - 2\,\mathfrak{2}$.

Alia exempla additionis.

$6\,\mathfrak{2} - 12$	$6\,\mathfrak{z} - 8\,\mathfrak{2}$
$2\,\mathfrak{2} - 4$	$12\,\mathfrak{2} - 3\,\mathfrak{z}$
$8\,\mathfrak{2} - 16$	$3\,\mathfrak{z} + 20\,\mathfrak{2}$

Pro $1\,\mathfrak{2}$ (causa probandi) poteris recipere quemlibet numerum binario maiorem, in exemplo priore. Et in posteriore exemplo

emplo, poteris recipere pro 1 2ℓ quemlibet numerum quinario minorem.

Exempla Subtractionis.

6 2ℓ + 8	6 2ℓ — 8
2 2ℓ + 4	2 2ℓ — 4
4 2ℓ + 4	4 2ℓ — 4

Exempla exceptionis.

6 ℓℓ — 8 2ℓ	6 ℓℓ + 8 2ℓ
2 ℓℓ — 10 2ℓ	2 ℓℓ — 10 2ℓ
4 ℓℓ + 2 2ℓ	4 ℓℓ — 2 2ℓ

Alia exempla subtractionis.

6 ℓℓ — 8 2ℓ	3 2ℓ + 20
2 ℓℓ + 10 2ℓ	6 2ℓ — 2
4 ℓℓ — 18 2ℓ	22 — 3 2ℓ

Alia exempla subtractionis.

3 ⅓ + 20 2ℓ	8 2ℓ + 0
12 2ℓ — 3 ⅓	12 2ℓ — 24
6 ⅓ + 8 2ℓ	24 — 4 2ℓ

Vltimum exemplum apparet esse contra regulam hanc, & ponit &. Sed signum subtractorum quod ponitur in relicto subtractionis, provenit ex prioribus particulis, & non ex posterioribus.

Exemplum Multiplicationis.

6 2ℓ — 8
5 2ℓ — 3
30 ⅓ + 24 — 58 2ℓ

Aliud multiplicationis exemplum.

6 ⅓ + 8 2ℓ — 6
2 ⅓ — 4
12 ⅔⅓ + 16 ℓℓ — 12 ⅓
— 24 ⅓ — 32 2ℓ + 24
12 ⅔⅓ + 16 ℓℓ — 36 ⅓ — 32 2ℓ + 24

Vel

Vel sic pone summam.

$12\overline{\text{ss}} + 16\overline{\text{cc}} + 24 - 36\overline{\text{s}} - 32\overline{\text{ce}}$.

Exemplum Diuisionis.

$$\begin{array}{l} \qquad -40\overline{\text{ce}} \\ 30\overline{\text{s}} - 58\overline{\text{ce}} + 24 \qquad (6\overline{\text{ce}} - 8. \\ 8\overline{\text{ce}} - 3 \\ \qquad 8\overline{\text{ce}} - 3. \end{array}$$

Aliud exemplum diuisionis.

$$\begin{array}{l} \qquad -12\overline{\text{s}} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{quotiens} \\ 12\overline{\text{ss}} + 16\overline{\text{cc}} - 36\overline{\text{s}} - 32\overline{\text{ce}} + 24 \qquad (6\overline{\text{s}} + 8\overline{\text{ce}} - 6. \\ 2\overline{\text{s}} + 0\overline{\text{ce}} - 4 \\ \qquad 2\overline{\text{s}} + 0\overline{\text{ce}} - 4 \\ \qquad\qquad 2\overline{\text{s}} + 0\overline{\text{ce}} - 4 \end{array}$$

Exemplum extractionum radicum quadratarum.

$$\begin{array}{l} 36\overline{\text{ss}} - 96\overline{\text{ce}} + 64 \qquad (6\overline{\text{ce}} - 8. \\ \quad 12\overline{\text{ce}} \end{array}$$

Aliud exemplum extractionis radicum.

$$\begin{array}{l} \qquad -12\overline{\text{s}} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{radix} \\ 36\overline{\text{ss}} + 48\overline{\text{cc}} - 120\overline{\text{s}} - 80\overline{\text{ce}} + 100 \qquad (6\overline{\text{s}} + 4\overline{\text{ce}} - 10. \\ \quad 12\overline{\text{s}}. \quad 12\overline{\text{s}} + 8\overline{\text{ce}} \end{array}$$

Probatur multiplicatione radicis in se, ut

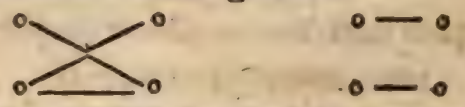
$$\begin{array}{l} 6\overline{\text{s}} + 4\overline{\text{ce}} - 10 \\ 6\overline{\text{s}} + 4\overline{\text{ce}} - 10 \\ \hline 36\overline{\text{ss}} + 24\overline{\text{cc}} - 60\overline{\text{s}} \\ \quad + 24\overline{\text{cc}} + 16\overline{\text{s}} - 40\overline{\text{ce}} \\ \qquad - 60\overline{\text{s}} - 40\overline{\text{ce}} + 100 \\ \hline 36\overline{\text{ss}} + 48\overline{\text{cc}} + 100 - 104\overline{\text{s}} - 80\overline{\text{ce}}. \end{array}$$

Sed de diuisionibus istis, & de radicum extractionibus talibus, infrà dicam in capite 12. Sunt enim exẽpla ista arte facta. Regulariter uero non potest diuisio fieri per diuisorem, habentem signum additorum aut subtractorum.

Quando uero tibi occurrerit diuisor, qui sit numerus cossicus compositus aut diminutus, tunc subscribe eum tuo diuidendo, ut fiat minutia. Ea igitur minutia utere, donec tibi succurrat æquatio aliqua expedies & complens diuisionem illam tuam. Sed exempla pulchre te docebunt de huiusmodi negocijs, ut hic nihil opus sit ulterius docere.

De Minutijs numerorum Cossicorum.

ALgorithmus numerorum Cossicorum, iudicetur iuxta regulam generalem de Algorithmis Minutiarum, quæ docet quoscunq; Algorithmos minutiarum, componi ex regulis integrorum suorum, atq; ex regulis Algorithmi communis minutiarum, quas superius libro primo cap. 1. docui memoriæ commendandas sub duabus figuris his:



Restat igitur nihil aliud, quàm ut te paucis exemplis harum regularum admoneam.

Exemplum additionis.

$\frac{1}{2}\,2\mathcal{Q}$ × $\frac{4}{3}\,\frac{3}{\mathcal{C}\mathcal{C}}$ facit $9\frac{3}{6}\frac{3}{\mathcal{C}\mathcal{C}} + 8\frac{3}{6}$

Exemplum subtractionis.

$\frac{1}{2}\,2\mathcal{Q}$ de $9\frac{3}{6}\frac{3}{\mathcal{C}\mathcal{C}} + 8\frac{3}{6}$ relinquunt $\frac{4}{3}\,\frac{3}{\mathcal{C}\mathcal{C}}$

Exemplum multiplicationis.

$9\frac{3}{6}\frac{3}{\mathcal{C}\mathcal{C}} + 8\frac{3}{6}$ per $\frac{1}{2}\,2\mathcal{Q}$ facit $27\frac{3}{12}\frac{3}{\mathcal{C}\mathcal{C}} + 24\,\mathcal{C}\mathcal{C}$

Exemplum diuisionis.

$27\frac{3}{12}\frac{3}{\mathcal{C}\mathcal{C}} + 24\,\mathcal{C}\mathcal{C}$ per $\frac{1}{2}\,2\mathcal{Q}$ facit $9\frac{3}{6}\frac{3}{\mathcal{C}\mathcal{C}} + 8\frac{3}{6}$

Exemplum reductionis ad terminos signorum.

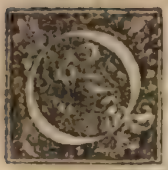
$27\frac{3}{12}\frac{3}{\mathcal{C}\mathcal{C}} + 24\,\mathcal{C}\mathcal{C}$ facit $27\frac{3}{12} + 24$

Exemplum reductionis ad terminos numerorum.

$27\frac{3}{12} + 24$ facit $9\frac{3}{4} + 8$

De

De extractione radicum ex numeris Cossicis. Caput IIII.



CTO regulas cossicas Christophori, reducit hoc caput quartum ad meam unicam regulam Algebræ. Cui aũt displicet ista mea reductio, ille sit bonus socius, & expungat etiam Algorithmum numerorum cossicorũ, & loco illius fingat & ponat tot regulas, quot res ipsa requirit. Sed nemo erit, qui tale studium probaturus sit.

Satis aũt ex cap. 3. uides, ut radix quadrata ex 64 ⅜ sit 8 2̣.
Et radix cubica ex 8 c̣ faciat 2 2̣.
Et radix zensizensica ex 81 ⅜⅜. faciat 9 2̣.
Et radix surdesolida ex 32 ß faciat 2 2̣.
Et radix zensicubica ex 64 ⅜c̣, faciat 2 2̣. Et sic de alijs.

Sequitur ergo modus extrahendi radices quadratas, ex numeris cossicis, æquatis alicui alij, cuius exponens, cum exponentibus alterius partis illius æquationis, faciat tres terminos progressionis arithmeticæ. ut uides in sequentibus æquationibus.

1 ⅜c̣ æquatus 1 ß + 35156 ⅜⅜. exponentes sunt, 6. 5. 4.
Item 1 ß æquatum 1 ⅜⅜ + 35156c̣. exponentes sunt 5. 4. 3.
Item 1 ⅜⅜ æquatus 1 c̣ + 35156 ⅜. Et sic de alijs.

Reducuntur enim omnium huiusmodi æquationum signa, (ut ex capite tertio didicisti) ad signa horum exponentium numerorum, 2. 1. 0.

Satis autem constat ex multis locis superiorum duorum librorum, ut 0 sit primus terminus numerorum naturaliter progredientium, quẽadmodum unitas est primus terminus numerorum geometrice progredientium. Itaq; unaquæq; æquationum positarum, reducitur in æquationem exempli quod dedi in fine capitis secundi de Iuda Machabæo & Nicanore, uidelicet hanc: 1 ⅜ æquatus 12 2̣ + 35156, exponentes sunt 2, 1, 0.

Nec

Nec impeditur extractio fienda iuxta modum quem iam dabo, etiam si ordo signorum cum exponentibus suis mutetur: ut hic, 1 ℨ æquatus 725 — 4 2ℓ. Hic ordo sic reponit exponẽtes, 2. 0. 1. &c. Sed de his plura inferius circa finem capitis.

☞ Sequitur modus iste extrahendi.

Primo. A numero radicum incipe, eumq; dimidiatum, loco eius pone dimidium illius, quod in loco suo stet, donec consumata sit tota operatio.

Secũdo. Multiplica, dimidium illud positum, quadrate.

Tertio. Adde vel Subtrahe iuxta signi additorũ, aut signi subtractorum, exigentiam.

Quarto. Inuenienda est radix quadrata, ex summa additionis tuæ, vel ex subtractionis tuæ relicto.

Quinto. Adde aut Subtrahe iuxta signi aut exempli tui exigentiam.

Modum extrahendi hunc tibi, mi bone Lector, formaui, ita ut memoriæ tenaciter hærere possit adminiculo dictionis huius AMASIAS. Significat autem A primum membrum (ab A incipiens) docẽs positionem dimidij numeri radicum. M litera secundum membrum repræsentat, quod imperat multiplicationem. A & S tertium membrum repræsentant, quod uel additionem uel subtractionem, iuxta rei exigentiam (ut exempla clare dabunt) requirit. I litera, inuẽtionem radicis quadratæ requiri significat. A & S notant ultimũ regulæ illius membrum, quod iterum additionis aut subtractionis alicuius mentionem facit.

Videamus nunc exempla, quæ modum illum exponant, ut postea modi istius membra singula, demonstratione optima, fiant perspicua.

☞ Primum igitur exemplum sumatur ex isto Algebræ exemplo, quod immediate præmissum fuit capiti huic: uidelicet 1 ℨ fuit æquatus huic numero cossico, 1 2ℓ + 35156.

Ita q; primo pono ½ pro numero radicum. Numerus autem radicum nullus alius est præter 1 2ℓ. Modus autem dicit, quòd dimi-

dimidium (non radicum) ſed numeri radicum, ſit ponendum. Itaq; non pono ½ 2ꝙ, ſed pono ½ abiecto ſigno. Et hoc poſitum dimidiū duabus uicibus uenïet utendum. Ideo dicit modus iſte, ipſum non eſſe de loco ſuo mouendum, donec finita ſit operatio. i. donec inuenta ſit radix quæ inquiritur.

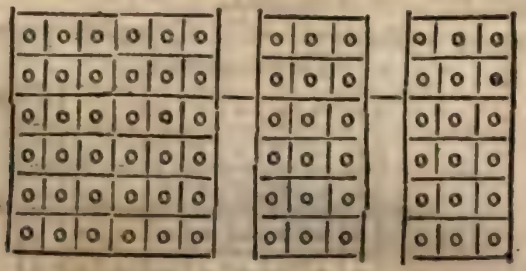
Secundo multiplico ½ in ſe, facit ¼.

Tertio addo illi producto multiplicationis numerum, qui habet ſignum additorum, uidelicet 35156. ſcilicet $\frac{140624}{4}$ addo ad ¼ (propter ſignum additorū quod ſtat à parte numeri illius) & ſic fiunt ex ea additione $\frac{140625}{4}$.

Quarto inuenio de $\frac{140625}{4}$ radicem quæ facit $\frac{375}{2}$.

Quinto addo radicem illam ad ½, id eſt, ad dimidiū numeri radicum, poſitum à principio. Addo uero propter ſignum additorum. Fiunt autē ex additione illa 188, de hoc numero coſſico 1 2ꝙ + 35156. Probo ſic: 1 2ꝙ facit 188. illum numerum addo ad 35156, fiunt 35344. Cuius radix quadrata facit 188.

Sed ut facile poſſis ꝓducere æquationes huiuſmodi, rationales radices habentes, uolo repetere figuram præcedentis capitis quadrangularem, diuiſam iuxta propoſitionem primam ſecundi, ipſius Euclidis, hoc modo.



Scilicet 1 ℨ + 6 2ꝙ, æquantur 72.

Item 1 ℨ + 8 2ꝙ — 12, æquantur 72.

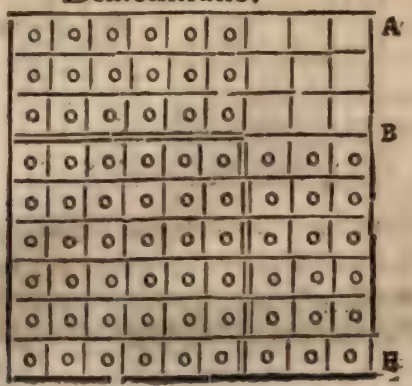
Item 1 ℨ + 3 2ꝙ + 18, æquantur 72. Et ſic de aliis.

Harum æquationem mediam pro exemplo accipiamus: ſci-

licet 1 ☉ + 8 ☌ — 12 æquatur 72. Primo fit reductio, ſcilicet ad priorem partem æquationis, addo 12, fiunt 1 ☉ + 8 ☌. & ſimiliter addo 12 ad poſteriorē partem, fiunt 84. Secundo fiat tranſpoſitio: ſcilicet à priore parte ſubtraho 8 ☌, & ſimiliter à poſteriore, & ſic 1 ☉ æquatus manet 84 — 8 ☌. Sic autem debet fieri tranſpoſitio, ut diuiſor ſolus ſter, ſitq; æquatus reliquis particulis æquationis. Et hoc eſt quod dicit regula Algebræ: Diuide per numerum coſſici ſigni maioris, reliquum equationis, eidem diuiſori (ſed denominato) equatum ꝛc. Cum autem 1 ☉ ſit æqualis 84 — 8 ☌, ideo requirenda eſt radix de hoc connexo 84 — 8 ☌. Pono — 4 loco — 8 ☌: quæ multiplico in ſe, faciunt 16, & hæc addo ad 84, fiunt 100. Addo autem (& non ſubtraho) quia dimidium numeri radicum, intelligitur poni cum ſuo ſigno ſubtractorum, ſic — 4. Eadem aũt ſigna huiuſmodi, ponunt in multiplicatione, ſignum additorum: ſcilicet — 4 in — 4 facit + 16. Deinde radix quadrata ex 100, ſunt 10, ab illis ſubtraho 4, id eſt, dimidium numeri radicum. Subtraho uero, propter ſignum ſubtractorum, quod ponitur à parte numeri radicum. Intelligitur eī dimidium numeri eius poni hoc modo — 4, ut ſuperius iam dixi. Et ex illa ſubtractione remanent 6, id eſt, radix æquationis inuenta.

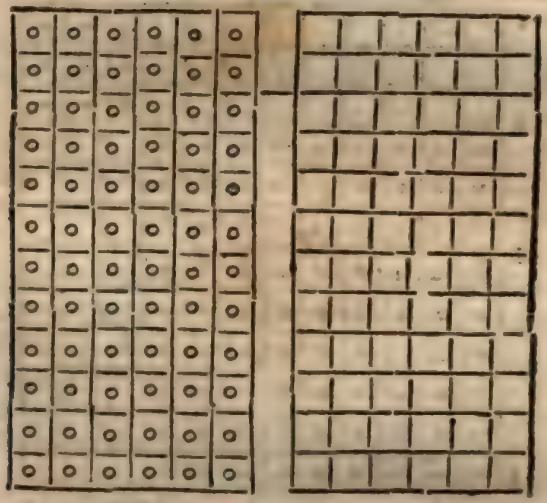
Item 1 ☉ æquatus 72 — 6 ☌. Quæritur quanta ſit 1 ☌ de 72 — 6 ☌.

Demonſtratio.



Quando pono dimidium numeri radicum, tunc pono lineolam A B. Eam multiplico quadrate, facit 9 superficiem eius quadratam, quam nolui signare cifris. Ei superficiei (id est 9) addo 72, facit gnomonem eius totum signatū cifris: atq; ita fit quadratum integrum. Ideo extraho radicem eius quadratam, facit 9. i. lineam A E. Ab ea linea subtraho A B lineolam. i. dimidium numeri radicum. Tunc remanet linea B E seu C D, quæ est radix quadrati huius 72 — 6 2ę, faciens sua longitudine 6. Vnde 36 æquatur huic numero cossico 72 — 6 2ę. Figuram autem demonstrationis huius, nosti esse exemplum quartæ propositionis secundi libri Euclidis.

Sequuntur aliæ formationes æquationum ex secunda secundi Euclidis.



1 ☐ æquatus 6 2ę + 72.

1 ☐ — 72 æquatus 6 2ę.

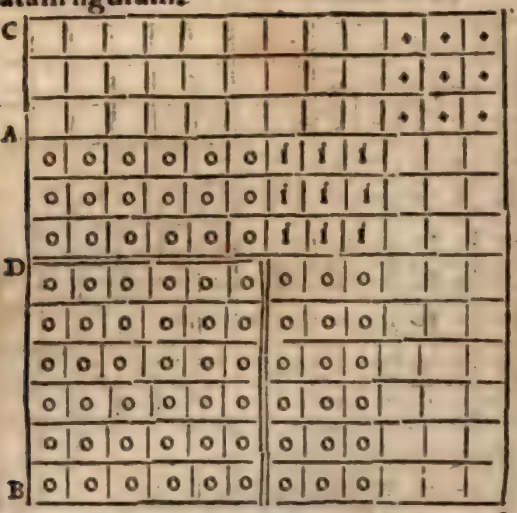
1 ☐ — 2 2ę + 24 æquata 6 2ę + 72.

Reducta ultima trium harum æquationum, inuenies 8 2ę + 48 æquari 1 ☐; ergo 8 2ę + 48 est quadratum.

Itaq; radicem eius quadratam quæramus. Primo pono 4, id est, numerum radicum dimidiatū, quem in se multiplico, fiunt 16. Huic addo 48, propter signum additorum positum à parte illius numeri. Fiunt aūt ex additione illa 64. Cuius radix quadrata facit 8. Et hanc addo (propter idem signum additorum) ad 4. i. ad dimidium numeri radicum. Et sic uenit radix quæsita.

Item 1 ☐ æquatus 6 2ℓ + 72.

Primo (ut demonstrem Geometrice) pono radicem quadrati signati literis, i, in figura sequenti: hoc est, dimidium numeri radicum, uidelicet 3. Eam radicem in se multiplico, & fit quadratum signatum literis i. Et huic addo 72, id est, gnomonem addo seu circumpono, quem uides signatum cifris. Atq; sic habes quadratam figuram.



Itaq; extraho radicem eius quadratam, id est, A B, faciens longitudine sua 9. Demum addo radici illi inuentæ, dimidium numeri radicum, uidelicet 3. hoc est, addo (propter signum additorum) illi radici lineolam A C, ut cōstituatur quadratum, cuius radix sit 12. Quod quadratum repræsentabatur per numerum

hunc,

hunc cossicum, 6 2ę + 72. Item per 1 ⅜. Figura autem ipsa est exemplum propositionis sextæ secundi.

De æquationibus, duas radices habentibus.

¶ Sunt autem æquationes quædam, quibus natura rerum huiusmodi, dedit habere duplicem radicem, uidelicet maiorem & minorem: id quod plene docebo atq; demonstrabo.

Et ut citius rem hanc capias, recipiamus exemplum æquationis, cui conueniat figura immediate superior: scilicet,

1 ⅜ sit æquatus 18 2ę — 72.

Primo pono dimidium numeri radicum, uidelicet 9 (cum in æquatione stent 18 2ę) hoc est, pono lineam A B, facientem longitudine sua 9. Secundo, multiplico eam in se, facit 81, id est, quadratum signatum cifris & literis i. Tertio, subtraho ab illo quadrato, numerum æquationis positum à parte signi diminutorum, id quod signum subtractorum signat, uidelicet fieri debere subtractionem: scilicet, 72 subtraho ab 81. hoc est, à quadrato lineæ A B, subtraho gnomonem quem uides signatum cifris, Et sic remanet quadratum quod literis i signatum uides. Quarto igitur extraho radicem quadratam ex illo quadrato relicto, facit radix illa 3: est enim radix quadrata signati literis i. Quinto (cum iam 72, id est, numerus positus à parte signi subtractorum, per subtractionem suo officio functus sit, atq; cum signo suo diminutorum omnino reiectum: neq; enim numerus talis duplici usu gaudet, ueluti dimidium numeri radicum. id quod me oportuit uerbosius dicere hic pro expositione membri quinti seu ultimi, modi illius quem superius posui de extractionibus huiusmodi, & iuxta quem modum ista omnia fiunt quæ hoc capite docentur) nullum signum amodo supereſt, id est, neq; signum subtractorum, neq; signum additorum, quod expresse esset positum. Ideo res pulcherrime respondet æquationi, siue radix illa quadrati signati literis i, uidelicet 3 (quantum etiam facit lineola A D sua longitudine) subtrahatur de radice quadrati signati cifris & literis i (id ē, de linea A D) siue ad

eam addatur. Si subtrahitur, tũc relinquitur radix D B. Si uero additur, tunc fit radix C B. Scilicet si 1 ⅔ æquetur 18 2ę — 72, tunc radix 6 respondet æquationi tanquam minor radix, & 12 eidem æquationi respondet tanquam maior radix. Nam si pro radice recipias 6, tunc 1 ⅔ facit 36. Vide iam an respondeat altera pars æquationis, uidelicet an 18 2ę — 72 etiam faciant 36. Faciunt autem 18 2ę (12ę faciente 6) 108, à quo subtracta 72, relinquunt 36.

Item si recipias pro radice, lineam C B (id est, 12) tunc 1 ⅔ facit 144. Vide iam an respondeat altera pars æquationis: hoc est, uide an 18 2ę — 72 etiam faciat 144. Faciente aũt 12ę. 12. faciunt 18 2ę. 216. à quibus subtrahe 72, tunc remanẽt 144. Et res sic inuenitur probata.

Sic quoties 1 ⅔ æquaẽ numero radicum, posito cum numero absoluto, mediante signo subtractorum, tunc semper (uno solummodo casu excepto) habebit ipsa æquatio duplicem radicem. Alijs uero casibus, impossibile est unam æquationem continere plures æquationes quãm unam.

Exemplum exceptionis.

Vt sit 1 ⅔ æquatus 12 2ę — 36. Pono primo dimidium numeri radicum, id est, 6. Secundo multiplico 6 in se, fiunt 36, à quibus subtraho 36 posita à parte signi diminutorum, remanet 0. Nihil igitur erit, quod uel subtrahatur à dimidio numero radicum, aut ad eum addatur.

Itaq; quoties inciderit æquatio inter 1 ⅔ & radices positas, cum numero absoluto, mediante signo subtractorum, fueritq; absolutus ille numerus æqualis quadrato dimidij numeri radicum, tunc ex causa iam ostensa, habebit æquatio talis pro radice sua, dimidium illud numeri radicum simpliciter.

Et ut

Et ut plenius capias membra, modi extractionum, quæ loquuntur de additione & subtractione (ut sunt membra, tertium & quintum, modi illius) ita accipe rem hanc.

Quoties 1 ☍ æquatur tali numero cossico, 8 ☌ + 38, seu (quod idem est) 38 + 8 ☌. hoc est, quoties in altera parte æquationis mediat signum additorum inter radices & numerum absolutum, tunc semper fit additio in utroq; membro, id est, in tertio & in quinto, & nunquam fit subtractio, & impossibile est ut talis æquatio duas radices habeat.

Et quoties signum subtractorum, mediat in altera parte æquationis, æquatæ 1 ☍, steterintq; radices à parte signi subtractorum, ut hic 38 — 8 ☌, tunc iuxta tertium membrum fit additio, & non fit subtractio, eò quòd duo subtracta inter se multiplicata, faciant additum, seu ponant signum additorum. Sed iuxta membrum quintum seu ultimum, fit subtractio, propter signum illud subtractorū positum. Et impossibile est, ut æquatio habeat plures radices quàm unam.

Et quoties signum subtractorum mediat in ea parte æquationis, quæ æquatur 1 ☍, ita ut numerus absolutus stet à parte signi diminutorum, ut sic 8 ☌ — 38, tunc in tertio membro modi prædicti, fit subtractio, & non fit additio, uidelicet propter ipsum signum subtractorum fit subtractio, cum hic non multiplicetur subtractum in se, per membrum secundum, sicut in priore dispositione æquationis fiebat.

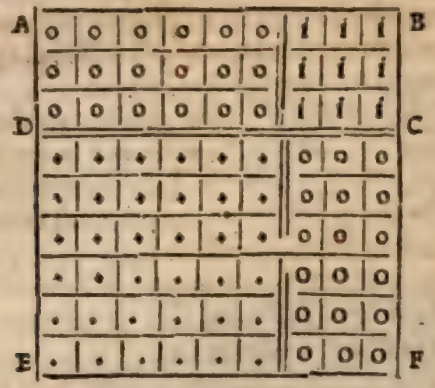
Transit autem numerus ille absolutus cum signo suo, eò q; simplex officium habeat. Numerus uero dimidius radicum, duplex officium habeat.

Ideo in ultimo membro, neq; nota subtractionis neq; additionis remanet. Ideoq; (lege æquationis) liberum erit tibi, ut uel subtrahas uel addas: utroq; enim modo inuenies radicem æquationi satisfacientem.

In casu exceptionis prædictæ, nihil additur, & nihil subtrahitur, iuxta membrum modi ultimum, Ideo &c.

Adijcienda

VAdijciendanunc est demonstratio, qua uideas & intelligas, æquationes huiusmodi (ubi signum subtractorũ mediat, stante numero absoluto à parte illius signi) habere duas radices (plures autem duabus, nulla æquatio habebit) naturaliter. Et in hunc usum repetamus figuram capitis huius secundam, uidelicet hanc:



Quæ ut hic stat, est exemplum propositionis tertiæ, secundi libri Euclidis, cum æque possit esse exemplum quartæ secundi.

Vide igitur. Cum dico 1 ⅛ æquari 1 2 2ę — 18. Certe ex ipsa figura uides, ut ista hæc æq̃tio conueniat quadrangulo A B C D, atq; quadrangulo C D E F. Quadratum enim minus, quod uidelicet literis i est signatum, uides æquari 1 2 2ę — 18. Scilicet totum quadrangulum A B C D continet 1 2 2ę, quales radices habet ipsum quadratum minus, signatum literis i. Vnde si ab istis radicibus subtrahatur numerus 18, id est, hæc pars eius quæ cifris signata est, tunc remanet 1 ⅛, id est, quadratum ipsum signatum literis i.

Conuenit etiam per omnia quadrangulo C D E F: quadratũ enim maius quod punctis est signatum, uides æquari similiter 1 2 2ę — 18. Scilicet, totũ quadrangulum C D E F continet 1 2 2ę, quales

quales radices habet ipſum quadratum maius, punctis ſignatū. Vnde ſi ab iſtis 12 2♎ ſubtraxeris numerum 18, id eſt, hanc partem quadranguli quæ cifris ſignata eſt, tunc remanet 1 ♎, id eſt, quadratum ipſum punctis ſignatum.

Certe uides unam & eandem æquationem hanc 1 ♎ æquatus 12 2♎ — 18, habere duas radices, cum utriq; quadrangulo conueniat. Et eſt 3 radix eius minor: & 6 eſt radix eius maior. Vt ſatis uides B C eſſe latus minoris zenſi, & D E eſſe latus maioris zenſi.

Quando autem dico, 1 ♎ æquatum 27 — 6 2♎. Certe uides ut illa æquatio ſolummodo minori quadrangulo conueniat, uide licet A B C D.

Sic quando dico, 1 ♎ æquatum eſſe 72 — 3 2♎, uides maiori ſolummodo quadrangulo conuenire.

At qñ dico, 1 ♎ æquari 6 2♎ + 36. aut 1 ♎ æquari 3 2♎ + 72, uides ut æquationes iſtæ conueniant ſolummodo quadrato, continente quadrangulum utrunq;, uidelicet A B F E.

Regula quædam generalis comprehendens extractiones radicum zenſizenſicarum, zenſicubicarum, zenſizenzenſicarum, zenſurdeſolidarum, zenzenſicubicarū, zenbſurdeſolidarū &c

QVando fuerint tres partes æquationis, quarum duæ coſſice ſint denominatæ, ita ut exponentes denominationū ſeruent leges progreſſionis Arithmeticæ, cum exponente partis non denominatæ (qualem conſtat eſſe o) tunc poteſt fieri extractio radicis quadratæ, iuxta modum hoc capite poſitum: prouenit enim ſemper numerus abſolutus, ſiue ille ſit rationalis, ſiue irrationalis. Poteris igitur poſtea ex numero inuento, extrahere aliam radicem (ſi ſignum coſſicum maius, ſit compoſitum) iuxta reliquam partem ſigni compoſiti, ſubnotatam.

Sequuntur exempla regulæ huius, radices rationales producentes.

1	2 ☵ æquatí 1450 — 8 ☵.
2	1 ☵ æquatus 18 ☵ + 648.
3	1 ☵ æquatus 433 ☵ — 41616.
4	1 ☵ cc æquatus 5120 — 16 cc.
5	1 ☵ cc æquatus 200 cc + 3456.
6	1 ☵ cc æquatus 800 cc — 156751.
7	1 ☵☵ æquatus 2146517001 — 20 ☵☵.
8	1 ☵☵ æquatus 2000 ☵☵ + 185076881.
9	1 ☵☵ æquatus 20000 ☵☵ — 78461119.
10	1 ☵ß æquatum 7424 — 200 ß.
11	1 ☵ß æquatum 80 ß + 39609.
12	1 ☵ß æquatum 2000 ß — 999424.

Declaratio exemplorum.

Primi exempli signa sunt hæc, ☵☵. ☵. 0. Horum signorum exponentes sunt hi, 4. 2. 0. Seruant autem termini illi, 4. 2. 0. conditiones omnes progressionis Arithmeticæ, quemadmodū isti termini progressionis Geometricæ, 1. 2. 4. seruant conditiones progressionis Geometricæ, &c.

Sic signa cossica exempli quarti sunt hæc, ☵cc. cc, 0. Eorum autem signorum exponentes, sunt 6. 3. 0.

Sic signa septimi exempli sunt, ☵☵☵. ☵☵. 0. Horum ☵☵ signorum exponentes sunt, 8. 4. 0.

Sic exempli decimi signa sunt ☵ß. ß. 0. Horum uero signorum exponentes, sunt 10. 5. 0.

☞ Modo & regulis huius capitis subiiciuntur etiam æquationes huiusmodi signorum (ut uidebis capite sexto) uidelicet secundarum radicum.

A ☵. A. 0. horum signorum exponentes sunt 2. 1. 0.
Item A ☵☵. A ☵. 0. & horum signorū exponentes sunt 4. 2. 0. &c.
Sic B ☵cc. B cc. 0. horum signorum exponentes sunt 6. 3. 0.
Similiter C ☵☵. C ☵. 0. horum signorum exponentes sunt 4. 2. 0.
Et sic de alijs.

Sed

Sed repetemus priora exempla.

Primum exemplum fuit, 2 ⅔ ℘ aequati 1450 — 8 ⅔. Diuido igitur 1450 — 8 ⅔ per 2, tunc 1 ⅔ ℘ inuenitur æquatus 725 — 4⅔. Extraho igitur radicē zenſicam, ſeu quadratam ex 725 — 4⅔, facit 25. Deinde quæro radicem quadratam ex 25, facit 5. Et hæc eſt radix æquationis.

Sic radix æquationis exempli quarti, eſt 4. Nam 1 ⅔ eius inuentus iuxta modum in hoc capite datum, eſt 64. Quærenda igitur eſt radix cubica ex 64 (iuxta ſigni huius ℂ ſubnotationem) facit 4. Et ſic de alijs.

De numeris coſſicis irrationalibus, & eorum Algorithmo: & de numeris abſurdis. Caput v.

SAEPISSIME utimur numeris irrationalibus ſub regula Algebræ, adeò ut à plærisq; doctis uiris, numeri irrationales abſoluti, uocētur Coſſici. Sed nos Coſſicos numeros ſolummodo eos uocamus, qui denominatione aliqua coſſica ſunt ſignati, ut ſatis ſuperius indicaui. Eos autem Coſſicos irrationales uocamus, qui faciem irrationalium numerorum ferunt ſub coſſica aliqua denominatione, etiam ſi reſoluta 12℘, inueniantur fuiſſe rationales. Neq; enim de ijs iudicare poſſumus, antequàm 1 2℘ reſoluatur, an ſint rationales uel irrationales; cum ſub eodem ſigno radicali, atque ſub eodem ſigno coſſico, modo ſint rationales modo irrationales. Vt (exempli gratia) ſi in aliquo exemplo inueniatur iſte numerus √⅔ 202℘, fuiſſe ſub æquatione aliqua, cuius 12℘ inuenta, fecerit 5, certum eſt ipſum numerum fuiſſe rationalem, æquatumq; cum 10, cum nihilominus in aliquo alio exemplo, infinitis modis, æquari poſſit numeris irrationalibus, atq; ita uere eſſe irrationales. Sic fieri po-

test (imô sæpe fit) ut numerus cossicus, absq; signo aliquo radicali positus, sit irrationalis: ut si iste numerus 20 2ℓ inueniatur fuisse sub æquatione aliqua, cuius 1ℓ fecerit 18, certũ est ipsum numerum fuisse irrationalem, æquatũq; √ℓ7200 &c. Hæc ideo dico, ut intelligas me numeros cossicos irrationales uocare eos, qui sub Algorithmo cadunt, quem hoc capite tractabo, id est, qui à parte siniſtra habent signum radicale, significans radicem extrahendam, quam numerus ipse non habet: scilicet √ℓ12 2ℓ atq; √ℓ36 2ℓ uocabimus irrationales, & √ℓ36 ℓ uocabimus rationalem &c. Credo ista sufficere pro repræsentatione huius Algorithmi. Nec enũciatio numerorũ huiusmodi difficilis est. Scilicet √ℓ20 2ℓ sic enunciatur, Radix quadrata de uiginti radicibus. Item √ℓ20ℓ—√ℓ20 2ℓ sic enunciatur, Radix quadrata de uiginti ℓ, plus radice quadrata de uiginti radicibus. Item $\sqrt{ℓ}\frac{20}{7}2ℓ$ sic enunciatur, Radix quadrata de uiginti radicibus, diuisis per radicem quadratam de septenario. Et sic de alijs.

Et quia numeri, quorum Algorithmũ hoc capite ponam, duplicia signa ferunt, unum uidelicet à parte siniſtra, quod radicale signum uocamus, & alterum à parte dextra, quod cossicum uocamus, satis constat Algorithmum eorum componi ex triplici Algorithmo: uidelicet ex Algorithmo communi, & ex & Algorithmo numerorũ irrationalium, atq; ex Algorithmo numerorum cossicorum. Præter Algorithmum minutiarum. Algorithmum signorum additorum & subtractorum. Hæc aũt non dico ut te absterream à re hac, sed magis ut breui sententia uniuersam rem hanc subindicem tibi, mi lector. Non enim difficilis aut perplexa est calculatio præsentis Algorithmi: sed talis est, ut sola obseruatione signorum facile capiatur & retinea tur. Neq; enim ego talia legendo didici, sed sola obseruatione rerum intellexi, & signorum beneficio (quæ in hunc usum mihi adauxi) memoriæ commendaui, ita ut in omnibus calculationibus meis, signa mihi ubiq; sint regulæ.

De

De additione & ſubtractione.

¶ Additio numerorũ Coſſicorum irrationaliũ, fit mediante ſigno additorum. Et ſubtractio fit mediante ſigno ſubtractorũ.

Vt $\sqrt{\text{ȝ}}$ 36 2ę ad $\sqrt{\text{ȝ}}$ 12 ȝ, facit $\sqrt{\text{ȝ}}$ 12 ȝ + $\sqrt{\text{ȝ}}$ 36 2ę.

Item 36 de $\sqrt{\text{ȝ}}$ 36 2ę, facit $\sqrt{\text{ȝ}}$ 36 2ę — 36. Et ſic de alijs.

Veruntamen ſi ſigna coſſica ſint æqualia, & numeri irrationales, ſiue ſignis illis addi poſſint, abſq; ſignis additorum, tunc ſigna eos nihil impediunt, quemadmodum denominationes uulgares eos non remorantur ab Algorithmorũ ſuorum praxi.

Vt quia ex $\sqrt{\text{ȝ}}$ 8 ad $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18, fit $\sqrt{\text{ȝ}}$ 50. Ideo etiam ex $\sqrt{\text{ȝ}}$ 8 2ę ad $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18 2ę fit $\sqrt{\text{ȝ}}$ 50 2ę. Et ex $\sqrt{\text{ȝ}}$ 8 ȝ ad $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18 ȝ, fit $\sqrt{\text{ȝ}}$ 50 ȝ.

Sic etiam ex $\sqrt{\text{ȝ}}$ 8 2ę de $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18 2ę remanet $\sqrt{\text{ȝ}}$ 2 2ę. Et ex $\sqrt{\text{ȝ}}$ 8 ȝ de $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18 ȝ ſubtracta, remanet $\sqrt{\text{ȝ}}$ 2 ȝ, eò quòd ex $\sqrt{\text{ȝ}}$ 8 ſubtracta de $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18, remaneat $\sqrt{\text{ȝ}}$ 2.

Sed probemus tamen exempla data arithmetice.

Pono q 1 2ę faciat 2, tunc 8 2ę facient 16, cuius radix quadrata eſt 4, igitur $\sqrt{\text{ȝ}}$ 8 2ę facit 4. Sic $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18 2ę facit 6. Nam 18 2ę faciunt 36, cuius $\sqrt{\text{ȝ}}$ facit 6. Itaq; $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18 2ę + $\sqrt{\text{ȝ}}$ 8 2ę ſeu $\sqrt{\text{ȝ}}$ 50 2ę, faciunt 10. Vide iam an $\sqrt{\text{ȝ}}$ 50 2ę etiam faciant 10. Scilicet 50 2ę faciunt 100, cuius $\sqrt{\text{ȝ}}$ facit 10. Sic ſimiliter inuenies $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18 2ę — $\sqrt{\text{ȝ}}$ 8 2ę ſeu $\sqrt{\text{ȝ}}$ 2 2ę facere 2, quemadmodum 2 de 4 ſubtracta relinquunt 2. Altero exemplo (quod datum fuit) fit ex $\sqrt{\text{ȝ}}$ 8 ȝ, addita ad $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18 ȝ, hoc aggregatum $\sqrt{\text{ȝ}}$ 50 ȝ. Faciat igitur 1 2ę. 2. tunc 1 ȝ faciet 4. atq; ita 8 ȝ facient 32, cuius radix quadrata facit $\sqrt{\text{ȝ}}$ 32. Sic $\sqrt{\text{ȝ}}$ 18 ȝ ſunt $\sqrt{\text{ȝ}}$ 72. Adde nunc $\sqrt{\text{ȝ}}$ 32 ad $\sqrt{\text{ȝ}}$ 72, tunc inuenies $\sqrt{\text{ȝ}}$ 200. Et tantum etiam facere debet $\sqrt{\text{ȝ}}$ 50 ȝ. Scilicet 50 ȝ faciunt 200. cuius $\sqrt{\text{ȝ}}$ facit $\sqrt{\text{ȝ}}$ 200.

Satis igitur uides res iſtas eſſe certas. Et pulchre eis reſpondent reliquæ regulæ huiuſmodi operationum.

De multiplicatione & diuiſione.

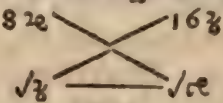
¶ Quia numeri coſſici irrationales, ſequuntur Algorithmũ numerorum irrationalium, ideo non ferunt multiplicationem aut diuiſionem, niſi idem ſignum radicale habeat uterq;, id eſt,

multiplicans & multiplicandus, aut diuisor & diuidendus. (De signis autem cossicis hic nihil dico, eò quòd illa multiplicationem nunquam impediant, & diuisionem etiam non semper impediāt, ut satis nota sunt hæc: scilicet 6 2℘ diuisæ per 3 ⅓, faciunt $\frac{2\,2℘}{1}$, cum 6 ⅓ diuisi per 3 2℘ faciant 2 2℘ &c.) Restat igitur ut de reductione signorum radicalium dem ò dicam. Sufficit tamen si hoc fiat per exemplum aliquod. Ea enim regula, quam dedi de huiusmodi signorum reductione, superius libro secundo, in Algorithmo numerorum irrationalium medialiū, nihil hic uariat.

Sed exemplum uideamus.

Volo multiplicare √⅓ 8 2℘ per √℘ 16 ⅓. Primo igitur eos reduco ad idem signum radicale.

Sic autem stant ad regulam reductionis.



Fiunt autem per regulam hi duo numeri cossici, √⅓℘ 512 ℘, & √⅓℘ 256 ⅓⅓. Iam igitur stant sub eisdem signis radicalibus, atq; sub priori ualore seu proportione, id qd' probandū est sic. Faciet 1 2℘. 2. tunc 8 2℘ faciunt 16. Cuius √⅓, facit 4. Itaq; √⅓ 8 2℘ sunt 4. Item √℘ 16 ⅓ sunt etiam 4. Nam 16 ⅓ (1 2℘ faciente 2) faciunt 64: cuius √℘ facit 4. Vide iam an cossici numeri inuenti respondeant, id est, an uterq; eorum faciat 4.

Faciente aūt 1 2℘. 2. faciet 1 ℘. 8. Itaq; 512 ℘, facient 4096. Cuius √⅓℘, id est radix zensicubica, facit 4. Item 1 ⅓⅓ facit 16. Faciunt igitur 256 ⅓⅓ etiam 4096, ut eius √⅓℘ faciat 4.

Iam igitur multiplico √⅓℘ 512 ℘ in √⅓℘ 256 ⅓⅓, & sic fiunt √⅓℘ 131072 bβ. Proba.

1 bβ facit 1.128. unde 131072 bβ faciunt 16777216. Iam uide an √⅓℘ huius numeri faciat 16. Nam cum uterq; multiplicationis terminus faciat 4. & 4 in 4 faciant 16, sequitur quòd numerus

rus prædictus faciat 16. Scilicet √ȝ de 16777216, facit 4096. & √ce de 4096, facit 16.

Exemplum diuisionis.

Volo diuidere √ȝce 131072 bȝ per √ȝce 512 ce, facit diuisio √ȝce 256 ȝȝ. Scilicet 131072 per 512 diuisa, faciunt 256.

Sic signa radicalia in multiplicatione & diuisione sunt indeclinabilia, sed signa cossica declinantur: ideo Quotiens facit √ȝce 256 ȝȝ.

De reductione irrationalium cossicorum numerorum ad terminos.

Quandiu autem signa radicalia terminorum proportionis aut æquationis alicuius, non fuerint reducta, non poterit fieri reductio signorum cossicorum, qualem reductionem docui capite superiori.

Vt positis his numeris duobus cossicis irrationalibus, √ȝ8 2ę & √ce 16 ȝ, si 1 2ę intelligatur facere 2, ipsi inter se æquati erunt. At si reducas signa eorum cossica, signis radicalibus non prius reductis, nequaquam manebit æquatio. Neq; enim æquabitur √ȝ8 cum √ce 16 2ę, si 1 2ę faciat 2, ut suppositum fuit. Reductis enim signis radicalibus, fierent √ȝce 512 & √ȝce 256 ȝ. Et satis uides ut √ȝce 512 & √ȝce 1024, non sint numeri æquales. At reductis prius signis radicalibus, antequàm reducãtur signa cossica, sic stabunt, √ȝce 512 ce & √ȝce 256 ȝȝ. Deinde reductis signis cossicis, sic stabunt √ȝce 512 & √ȝce 256 2ę. Satis autem uides, ut 1 2ę faciente 2, faciat √ȝce 256 2ę, numerum æqualem alteri sine signo cossico posito &c.

De Minutijs huius Algorithmi.

Nihil quidem est in tota Arithmetica hac, quod sæpius repetitum fuerit hac regula, uidelicet quod Minutiæ qualescunq;

cunq; ſequantur Algorithmum ſuorum integrorum, iuxta regulas Algorithmi communis. Itaq; nihil opus eſt hoc loco, ut uel regulæ uel exempla ponantur, quòd toties dederim exempla de huiuſmodi operationibus.

De ſignis additorum & ſubtractorum, & de numeris Abſurdis.

NEc opus eſt plura dicere, ut Algorithmus præſens utatur ſignis additorum & ſubtractorum. Ea enim dicerentur quæ dicta ſunt prius. Sciendum tamen, quòd duplici neceſſitate utimur ſignis illis. Primo enim utimur illis in numeris talibus, quorum proportio præciſe dari non poteſt: ut in numeris irrationalibus. Secundo utimur eis in numeris talibus, quorum ꝓportio ignota eſt, & ſi præciſa ſit: ut in numeris coſſicis, dum numeros quærimus nobis abſconditos. Sed præter neceſſitatẽ hanc duplicem, utimur eis commoditatis gratia, ut aliquid per ea monſtremus aut doceamus, quẽadmodum me hoc loco uti uidebis, non neceſſitatis ſed commoditatis cauſa.

Prima autem regula de ſignis illis tradita, quatuor habet uariationes exemplorũ, quæ ſequentibus exemplis repræſentant.

8 + 4	8 — 4	10 + 5	10 — 5
10 + 5	10 — 5	8 + 4	8 — 4
18 + 9	18 — 9	2 + 1	2 — 1

Sequitur exceptio regulæ, quæ pertinet ad ſubtractionem. Et habet etiam quatuor uariationes, quæ ſequentibus exemplis repræſentantur.

8 + 5	10 + 2	10 — 2	8 — 2
10 + 2	8 + 3	8 — 3	10 — 5
3 — 2	2 — 1	2 + 1	3 — 2

Secunda regula, quantum attinet ad additionem, etiam quatuor uariationes habet, quæ ſequentibus exemplis repræſentantur.

8 + 5

8+5	8−5	8−4	8+4
10−4	10+4	10+5	10−5
18+1	18−1	18+1	18−1

Quantum uero ſecunda regula pertinet ad ſubtractionem, huiuſmodi quatuor uariationes habet.

18+5	18+4	18−5	18−4
8−4	8−5	8+4	8+5
10+9	10+9	10−9	10−9

Regula multiplicationis & diuiſionis, quantum attinet ad multiplicationem, quatuor uariationes habet huiuſmodi.

0+6	0−6	0+6	0−6
0+4	0−4	0−4	0+4
0+24	0+24	0−24	0−24

Quantum uero attinet ad diuiſionem, quatuor ſimiles uariationes habet huiuſmodi:

0+24	0+24	0−24	0−24
0+6	0−6	0+6	0−6
0+4	0−4	0−4	0+4

VIdes certe, ut hæc omnia uaniſſimis nugis uideãtur eſſe ſimilima, & tamen Coſſicæ operationes, ſecundum ea factæ, plane mirificas inuentiones habent. Sed ut nihil obmittam eorum quæ ad integritatem Arithmeticæ pertinent, meamq; facultatem non ſuperant, dicendum mihi uidetur hoc loco de Numeris fictis infra nihil.

Quemadmodum autem uariæ finguntur radices numeroꝝ, ſub numeris nõ habentibus eas radices, fitq; hæc fictio ſumma utilitate pro rebus mathematicis: ita finguntur etiam non frustrà, numeri infra o, id eſt, infra nihil. Vt uolo exemplum ſubtractionis poſitum ſuperius repetere hoc:

8−2
10−5
3−2

Primo ſubtraho 10 de 8, & non inuenio numerum aliquem ſupra 0, id eſt, ſupra nihil, quem ponere poſſim iuſta ſubtractionis lege. Nam ſi ille â quo debet fieri ſubtractio, eſſet maior eo qui ſubtrahitur (ut ſi loco numeri 8 poneretur numerus 12) tum tandem haberem numerum ponendum uerum. Sic ſi ille numerus â quo fieri debet ſubtractio, eſſet æqualis ei qui ſubtrahitur (ut ſi loco 8 ponerentur 10) tunc relinqueretur 0. i. nihil, (quod mediat inter numeros ueros & numeros abſurdos) Iam uero cum numerus ſubtrahendus maior ſit eo â quo fit ſubtractio, reſtat ut numerus infra 0, id eſt, infra nihil, ponatur, uidelicet 0 — 2. Sic ſimili ratione poſtea ſubtraho 0 — 5 de 0 — 3, & inuenio 0 + 3. i. numerum ſupra nihil, ſeu numerum uerum.

Sic Coſſa ſolet, pro immenſa copia ſua, ijs uti quæ ſunt, & ijs quæ finguntur eſſe. Nam ſicut ſupra unitatem ponuntur numeri integri, & infra unitatem finguntur minutiæ unitatis, & ſicut ſupra unum ponuntur integra, & infra unum ponuntur minuta ſeu fracta: ſic ſupra 0 ponitur unitas cum numeris, & infra 0 fingitur unitas cum numeris. Id quod pulchre repræſentari uidetur in progreſſione numerorum naturali, dum ſeruit progreſſioni.

Sed oſtendenda eſt iſta ſpeculatio per exemplum.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Poſſet hîc fere nouus liber integer ſcribi de mirabilibus numerorum, ſed oportet ut me hîc ſubducã, & clauſis oculis abeã. Repetam uero unum ex ſuperioribus, ne fruſtra dicar fuiſſe in campo iſto. Sed ſententia inuerſa repetam quod mihi repetendum uidetur.

¶ Qualiacunq; facit progreſſio Geometrica multiplicãdo & diuidendo, talia facit progreſſio Arithmetica addendo & ſubtrahendo. Exemplum.

Sicut $\frac{1}{8}$ multiplicata in 64, facit 8, Sic — 3 additum ad 6, facit 3.

cit 3. Est autem —3 exponens ipsius $\frac{1}{8}$, sicut 6 est exponens numeri 64, & 3 est exponens numeri 8.

Item sicut $\frac{1}{8}$ diuidens 64, facit 512: sic —3 subtractum de 6 facit 9. Est autem 9 exponens numeri huius 512.

Item sicut 64 diuidens $\frac{1}{8}$ facit $\frac{1}{512}$. sic 6 subtracta de —3 relinquit —9. Est autem —9 exponens fractionis huius $\frac{1}{512}$.

Et sic patet pulcherrimum iudicium de minutijs unitatis abstractæ, & de ijs quæ Euclides, Boëtius, & alij senserũt de indiuisibilitate unitatis. De qua re etiam primo libro disputaui, uidelicet minutias unitatis habendas esse pro numeris fictis.

Sed qua ratione fit, ut —24 diuisum per —6 faciat +4? Respondeo. Ea ratione qua ex uno minuto diuiso per unum sextum (quod incredibiliter minus est millesima parte unius minuti) fiunt horæ 7776c0000, facientes fere 88716 annos. Item (ut familiarius simile ponam) ea ratione qua $\frac{1}{2}$ diuisa per $\frac{1}{4}$ facit 2. Nouerunt etiam indocti $\frac{1}{4}$ ſ contineri sub $\frac{1}{2}$ ſ bis. Sic unum sextũ continet sub uno minuto toties, 777600000. (cum unum minutum tot faciat sexta) & sic contrahitur ad quotientem istum aduerbialem, denominatio ista temporis, uidelicet horarum, ut deinde tot horæ faciant annos 88716. Sic dum diuido —24 per —6, tunc dico —6 continẽri sub —24 quater. Et iste quotiens sic notandus uenit +4. Quãdo enim subtraho —6 de —24, tunc remanet —18. Et sic semel subtraxi —6 de —24. Subtraho igitur —6 de —18, & remanet —12: & sic 2, id est, bis subtraxi —6 de —24. Tertio subtraho —6 de —12, & remanet —6. atq; ita ternarium feci subtrahendo. Quarta igitur subtractione facta, 4 produxi, remanente 0. Vides aũt ut in absurdis numeris omnia fiant absurde siue inuerse: scilicet, in ueris numeris ita fit, ut subtractione minuantur, in absurdis uero numeris ita uidisti fieri, ut subtractione augeantur. Quod cum ita sit, necesse erit ut additione minuantur, ut —6 ad —4, facit —10. &c.

Habes itaq; ex his fontem rationum de omnibus quæstioni

bus ad Algorithmum ſignorum additorum & ſubtractorum pertinentibus. Vt cum audis diuerſa ſigna in additione ſubtractionem requirere, ſatis intelligis regulam eſſe intelligendam, de ſubtractione, qualem requirunt numeri ueri. Talis autē ſubtractio, eſt additio, in numeris abſurdis. Scilicet — 8 ad + 4, facit — 4. Et + 8 ad — 4, facit + 4. Sic — 8 de + 4 facit + 12; & + 8 de — 4, facit — 12. Licet enim ſint additiones ſecundum Algorithmum uerorum numerorum, tamen illæ additiones ſunt ſubtractiones ſecundum Algorithmum abſurdorum numerorum &c. Sic ex ijs quæ dicta ſunt de diuiſione, pulchre ſequuntur omnia quæ uel de diuiſione uel de multiplicatione docent regulæ. Si enim — 24 diuiſum per — 6 facit + 4: ergo + 4 & — 6 inter ſe multiplicata, faciunt — 24. Generale enim eſt, ut multiplicatio probet diuiſionem, & diuiſio probet multiplicationem; additio ſubtractionem, & ſubtractio additionem.

De perfectione regulæ Algebræ, & de ſecundis radicibus. Caput VI.

VNICA hac regula artis Algebræ, gratia dei, præſtitiſſe me abunde omnia illa arbitror, quæ Chriſtophorus per octo regulas præſtitit, & alij per 24 regulas. Vt enim illa mea unica regula, ſimpliciſſima eſt, ita ſimul eam capaciſſimam eſſe conſtat, cum non ſolum complectatur regulas omnes quæ hactenus fuerunt inuentæ, ſed omnes etiam quæ in hanc rem inueniri poſſunt: id quod exemplis Chriſtophori, Hieronymi Cardani, & Adami Riſ, ſatis teſtatum faciam. Neq; enim fieri poteſt, ut incidat exemplum aliquod, quod numerum abſconditum fintum inquirat, quod ſub regula mea hac nō cadat. An uero prius aliquando ſit ſub tali ſimplicitate inuenta, mihi non conſtat, niſi quòd coniectura appellationis adducor ad huius quæſtionis affirma-

affirmatiuam. Sæpius enim singulari consueuimus uoce, quàm plurali regulam Algebræ uocare. Mihi uero uox hæc displicebat: maluissem enim rem hanc artem dici, quàm regulam, ut quam multis uariisq; regulis cõstare uidebam. Sed nunc nihil moror, utcunq; appellet. Ego mea hæc æquis iudicibus libens resigno iudicanda.

Quando autem de perfectione regulæ huius unicæ disputo, nemo me adeo somnolentum esse censeat, ut non uideam aut cogitem ea quæ ad hanc regulam conferuntur, seu ad quæ se hæc regula extendit. Sed cogitent illi etiam hoc, quôd regulæ illi non sit imputandum, si ego sim tardus aut ignarus rerum earum ad quas se regula extendit. Certum est autem, eum qui plura artium theoremata nouit (qualia Euclides proponit) latius posse uti regula Algebræ, quàm is possit qui talium theorematum nihil nouit, licet regulam illam sciat. Quod si scienti regulam Algebræ, occurrat nodus, quẽ soluere nequeat, quòd ea ignoret quorum scientiam regula Algebræ requirit, inepte facit si ignorantiã illam à se transfert, & regulam ipsam culpat.

Vt (exempli gratia) si quis à me petat proferri numerum, cuius quadratum multiplicatum per quartam partem petiti numeri, faciat 432 (est exemplum Christophori primum, pro sua regula tertia positum) sic operor iuxta regulã meam. Pono 1 ☉, cuius quadratum est 1 ▢. Hoc igitur multiplico per $\frac{1}{4}$ ☉, facit productum $\frac{1}{4}$ ▢ æquatam 432. Diuisione uero facta, producitur quotiens cuius cubicam radicem quærendam esse docet regula, propter signum diuisoris istud ▢. Quam si extrahere nequiuero, culpa ignorantiæ mea erit, non regulæ.

Sic similiter, si iubear proferre numerum, à quo subtracta 5 relinquant relictum, cuius radix quadrata multiplicata per numerum illum absconditum, faciat $\sqrt{\ }$ 192. Pono 1 ☉. Subtractis autẽ 5, remanet 1 ☉ — 5. cuius radix quadrata est $\sqrt{\ }$. 1 ☉ — 5. quæ multiplicata per 1 ☉, facit $\sqrt{\ }$. 1 ▢ — 5 ▢. æquatam $\sqrt{\ }$ 192. Reducta uero & trãsposita ista æquatione, inuenit 1 ▢ æquari

5 ℘ + 192. Itaq; iuxta regulam quærenda est radix cubica ex isto cõnexo 5 ℘ + 192, propter signum diuisoris istud ℘. At si extrahere nequeam radicem, qualem mihi indicat regula, regula nihilominus manet in sua perfectione. Facit autem radix extrahenda 8. Sed de his infra suo loco latius dicam.

De secundis radicibus.

QVando in pronunciatione alicuius exempli, post positionem 1 2℘, occurrit adhuc alius numerus absconditus, sub indeterminata proportione ad numerum latẽtem sub 1 2℘ prius posita, tunc ponitur numerus ille absc̃oditus sub 1 A. Et est 1 A idem quod 1 A2℘. Hoc est, 1 A nihil aliud est quàm 1 2℘ secunda, distincta ab 1 2℘ prima seu prius posita. Cum igitur 1 2℘ prima alium ualorem habeat, ab 1 2℘ secunda, requiritur hoc ut in operatione exempli radices illæ non confundantur, nec una pro altera recipiatur. Ista uero uix caueri possent, nisi signis diuersis distinguerentur radices secundæ à radicibus primis. Volo autẽ nomine secundarum radicum comprehensas esse tertias, quartas, quintas, &c. Tales, inquam, docendi gratia omnes dicãtur secundæ radices, respectu primarum: ut scias eandem omnino rationem esse in omnibus, siue multiplicandæ uenerint, siue diuidendæ, siue addendæ sint siue subtrahendæ, &c.

Secundæ igitur radices sic repræsentantur, 1 A (id est, 1 A2℘) 1 B (id est, 1 B2℘) 1 C (id est, 1 C2℘) 1 D. &c.

Non igitur mirum est, quòd 1 A in se multiplicata, faciat 1 A℘. &c. Curandum autem est, ut in exemplis secundarum radicum, secundæ resoluantur in primas, per inuentam aliquam æquationem, Raro autem contingit ut primæ radices ueniant resoluendæ in secundas.

Reliqua uero quæ docenda sunt de radicibus secũdis, dicam per occasiones ponendorum exemplorum.

Christo-

F Christophorus & Hieronymus Cardanus, tractant radices secundas sub uocabulo Quãtitatis, ideo eas sic signant 1 q. Latius uero eas tractauit Cardanus. Christophorus enim nihil habet de commissionibus radicum secũdarum cum primis. Eas autem Cardanus pulchris exemplis notificauit, ita ut ipsas facile didicerim. Eas autem commissiones secundarum radicum cum primis sequentia exempla satis docent.

Volo multiplicare 2 ℘ in 2 A, fiunt ea multiplicatione 4 ℘ A. hoc est (quod ad repræsentationem & pronunciationem huius Algorithmi pertinet) 4 ℘ multiplicatæ in 1 A.

Volo multiplicare 3 A in 9 B, fiunt 27 A B. hoc est, 27 A multiplicatæ in 1 B.

Volo multiplicare 3 B in se cubice, facit 27 B cℭ.

Volo multiplicare 3 ⅓ in 4 B, fiunt 12 ⅓ B.

Volo multiplicare 2 cℭ in 4 A⅓, fiunt 8 cℭ A⅓. hoc est, 8 cℭ multiplicati in 1 A⅓.

Volo multiplicare 1 A quadrate, fit 1 A⅓.

Volo multiplicare 6 in 3 C, fiunt 18 C.

Volo multiplicare 1 A in 1 A⅓, fit 1 A cℭ.

Volo multiplicare 2 A⅓ in 5 A cℭ, fiunt 10 A⅔.

Volo multiplicare 1 cℭ in 1 ℘ A⅓, facit, quantum 1⅓ A in se quadrate. hoc est, 1⅔⅓ A⅓.

Volo multiplicare 1 A cℭ in 1⅓ A, facit, quantum 1 ℘ A⅓ in se. hoc est, 1⅓ A⅔⅓.

Diuisiones.

Volo diuidere 8 cℭ A⅓ per 4 A⅓, facit 2 cℭ.

Vides ut diuisio recipiat reductionem signorum.

Volo diuidere 8 cℭ A⅓ per 4 cℭ, facit 2 A⅓.

Volo extrahere radicem quadratam de 25 A⅓, facit 5 A.

Volo extrahere radicem zensizensicã de 16 D⅔⅓, facit 2 D.

Volo extrahere radicem cubicam de 3 A⅓, facit √cℭ 3 A⅓.

Et sic de alijs.

Probantur

Probantur autem operationes huiusmodi per progressionum Geometricarum suppositionem. Vt (exempli gratia) uolo probare ꝙ ex multiplicatione 2 ☍ in 4 A ⅓ proueniant 8 ☍ A ⅓ (hoc est, 8 ☍ multiplicati in 1 A ⅓) Suppono progressionem Geometricam duplæ proportionalitatis, pertinere ad primas radices: & progressionem triplæ proportionalitatis pertinere ad secundas radices. Itaq; 2 ☍ faciunt 16, & 4 A ⅓ faciunt 36. Multiplico igitur 16 in 36, fiunt 576. Iam uideo an 8 ☍ multiplicati in 1 A ⅓ etiam faciant 576. Faciunt autem 8 cubi 64, & 1 A ⅓ facit 9. &c.

De additione & subtractione nullam habemus difficultatẽ. Scilicet 2 2☍ ad 2 A, faciunt 2 2☍ + 2 A. Sic 2 A de 2 2☍, faciunt 2 2☍ — 2 A, &c.

Vt uero totam secundarum radicum tractationem intelligas, subijcienda sunt prædictis exemplis Algorithmi, exempla quædam usu facilia, donec capite 12 alia ponantur.

Exemplum Christophori 20.

1. Sunt duo numeri, qui additi ad se, faciunt 15. Diuisus uero maior per minorem, facit 19.

Numeri illi sunt 1 2☍ & 1 A.

Et sic semper (dum duo numeri proponunt quærendi, obmissa proportionis eorum connotatione) poteris pro secundo numero ponere 1 A. Quando uero duo numeri quærendi proponuntur, & connotatur proportio, ut facile, absq; adiutorio secundæ radicis, possis utrunq; repræsentare, tunc persuade tibi peccatũ esse, si per plura fiant quæ possunt fieri per pauciora. Vnde si mihi proponantur duo numeri quærendi sub proportione dupla, qui multiplicati inter se faciant 18. ego mox pono hos duos numeros cossicos 1 2☍. 2 2☍. statimq; inuenio 2 ⅔ æquatos 18, &c. At si hos duos posuero 1 2☍. 1 A. tunc oportebit me primo secundam radicem, id est 1 A, resoluere in radices primas, antecq; possim procedere. Scilicet, cum proportio dupla debeat esse inter duos numeros illos, tunc suppono 1 A esse duplum

plum ad 12ℓ. Vnde si 12ℓ dupletur, tunc erit æquatio inter 2 2ℓ & 1 A. Diuido igitur, & inuenio 1 A facere 2 2ℓ. Et sic pono tandem hos duos numeros, 1 2ℓ. 2 2ℓ. &c.

Sequitur prosecutio exempli prioris.

Positis duobus numeris exempli dati, 1 2ℓ. 1 A. audio in pronunciatione, additos facere 15. Itaq; 1 2ℓ + 1 A æquantur 15. Et per transpositionem 1 A, æquatur 15 — 1 2ℓ. Facit igitur 1 A. 15 — 1 2ℓ. Vnde numeros inuētos denuò pono, sic 1 2ℓ. 15 — 1 2ℓ. Audio igitur ulterius ex pronunciatione exempli, quòd maior diuisus per minorem, faciat 19. Hic si dubitas, uter eorum sit maior, scito hoc situm esse in arbitrio tuo. hoc est, 1 2ℓ potes recipere uel pro maiore uel pro minore. Si enim 1 2ℓ pro maiore receperis, tunc $\frac{1\ 15 - 1\ 2ℓ}{1\ 2ℓ}$ æquabitur 19, & faciet 1 2ℓ. 14 $\frac{1}{4}$. & sic minor numerus erit $\frac{3}{4}$. Si uero 1 2ℓ receperis pro minore numero, tunc $\frac{1\ 15 - 1\ 2ℓ}{1\ 2ℓ}$ æquabitur 19, & sic faciet 1 2ℓ. $\frac{3}{4}$.

Idem exemplum aliter.

Sunt duo numeri, quorum maior diuisus per minorem, facit 19. Additi uero ad se, faciunt 15.

Numeri sunt, 1 2ℓ. & 1 A.

Diuisa autem 1 2ℓ per 1 A, facit $\frac{1\ 2ℓ}{1\ A}$ æquatam 19. Itaq; 19 A sunt æquata 1 2ℓ. Facit igitur 1 A. $\frac{1\ 2ℓ}{19}$. Vnde sic repetuntur numeri primo positi, 1 2ℓ. $\frac{1\ 2ℓ}{19}$. Vlterius autem in pronūciatione audio, quòd numeri inuenti faciant 15 si addantur. Itaq; 1 2ℓ + $\frac{1\ 2ℓ}{19}$: hoc est, $\frac{20}{19}$ 2ℓ æquantur 15. Et per reductionem, 285 æquantur 20 2ℓ, facit 1 2ℓ. 14 $\frac{1}{4}$. Ergo $\frac{1\ 2ℓ}{19}$, facit $\frac{3}{4}$.

Vel sic operare.

Numeri sunt, 1 2ℓ. 1 A.

Audio autem maiorem diuisum per minorem facere 19. Vnde $\frac{1\ A}{1\ 2ℓ}$ æquatur 19. Et per reductionem ad integra, 1 A æquatur 19 2ℓ. Igitur 1 A facit 19 2ℓ. Itaq; sic stant numeri in proportione inuenta, 1 2ℓ. 19 2ℓ. Et illos duos numeros audio facere 15, si addantur. Itaq; 20 2ℓ æquantur 15, facit 1 2ℓ. $\frac{3}{4}$.

¶ Vel (si libet) resolue 1 2ę in 1 A. ut

Sunt duo numeri, qui ad se additi faciant 15. Diuisus uero maior per minorem facit 19.

Numeri sunt, 1 2ę & 1 A.

Hi additi, faciunt 1 2ę + 1 A, æquatum 15. Ergo per transpositionem 1 2ę æquat̃ 15 — 1 A. Igitur 1 2ę facit 15 — 1 A. Sic ergo repetuntur numeri, 1 A. 15 — 1 A.

Sequitur in pnunciatione exempli, quòd maior diuisus per minorem faciat 19. Itaq; $\frac{1A}{15-1A}$ æquatur 19. Et per reductionem ad integra, 1 A æquatur 285 — 19 A. Et per reductionem ad simplicia, 20 A æquantur 285. Facit 1 A, 14 $\frac{1}{4}$. Et sic de alijs.

¶ Aliud exemplum.

2. Septem uiri debent mihi pecuniam hoc modo. Primus, & secundus, tertius, quartus, quintus, & sextus, debent 142 ff. (Hic obserua, quòd debitum septimi debitoris solummodo excluſum est ab hac summa florenorum. Pono igitur pro summa septimi 1 2ę florenorum, & sic erit summa totius debiti, 142 + 1 2ę flo.) Secũdus, tertius, quartus, quintus, sextus, & septimus, debent 126 flo. (Hic excluditur debitum primi. Pono igitur prõ summa primi, 1 A florenorum: & sic iterum uenit summa omnium, faciens 126 + 1 A flo.) Tertius, quartus, quintus, sextus, septimus, & primus, debent 136 flo. (Excluditur hic debitum secundi: pono igitur pro debito eius 1 B flor. & sic iterum producitur summa omnium, faciens 136 + 1 B ff.) Quartus, quintus, sextus, septimus, primus, & secundus, debent 128 flo. (Hic uides excludi debitum tertij. Itaq; 1 C florenorum debet tertius, & erit summa omnium 128 + 1 C flo.) Quintus, sextus, septimus, primus, secundus, & tertius, debent 130 flo. (Hic excluditur debitum quarti, quod facit 1 D florenorum. Est igitur summa totius debiti, 130 + 1 D ff.) Sextus, septimus, primus, secundus, tertius, & quartus, debent 120 ff (Hic excluditur debitum quinti, facit itaq; uniuersum debitũ istud, 120 + 1 E ff.) Septimus, primus, secundus, tertius, quartus, & quintus, debent

148 flo. (Hic excluditur debitum sexti, faciens 1 F florenorum, ut totum debitū faciat 148 + 1 F flo.) Quæstio ergo est, quantum quilibet horum debitorum peculiariter debeat?

Habes autē æquationes septem in hoc exemplo. Satis enim constat ut quodlibet totum, sibi integro, sit æquale.

142 + 12ℨ	
126 + 1 A	Quia septies ponitur
136 + 1 B	summa omnium, ideo
128 + 1 C	sex æquationes erunt.
130 + 1 D	
120 + 1 E	
148 + 1 F	

1. Quia 142 + 1 2ℨ æquatur 126 + 1 A, ergo per reductionem 1 A æquatur 16 + 12ℨ. Et est summa florenorum quam debet primus.

2. Sic cum 142 + 12ℨ æquetur 136 + 1 B, faciet 1 B, 6 + 12ℨ. Et est summa secundi.

3. Item 142 + 12ℨ æquatur 128 + 1 C. Facit igitur 1 C, 14 + 12ℨ.

4. Et 142 + 12ℨ æquatur 130 + 1 D. Facit igitur 1 D, 12 + 12ℨ.

5. Sic 142 + 12ℨ æquatur 120 + 1 E, Facit igitur 1 E, 22 + 12ℨ.

6. Et 142 + 12ℨ æquatur 148 + 1 F. Facit igitur 1 F, 12ℨ — 6.

Summæ singulorum:

Debitum primi,	16 + 12ℨ
Debitum secundi,	6 + 12ℨ
Debitum tertij,	14 + 12ℨ
Debitum quarti,	12 + 12ℨ
Debitum quinti,	22 + 12ℨ
Debitum sexti,	12ℨ — 6
Debitum septimi,	12ℨ.

Additio harum summarū omnium facit, 72 + 64. Et quia est summa omnium, ideo ei æquantur 142 + 12, cum etiam sit summa omnium, ut uidimus superius. Reducta æquatione hac, inuenies 12 facere 13.

Summæ igitur singulorum sic stabunt resolutæ.

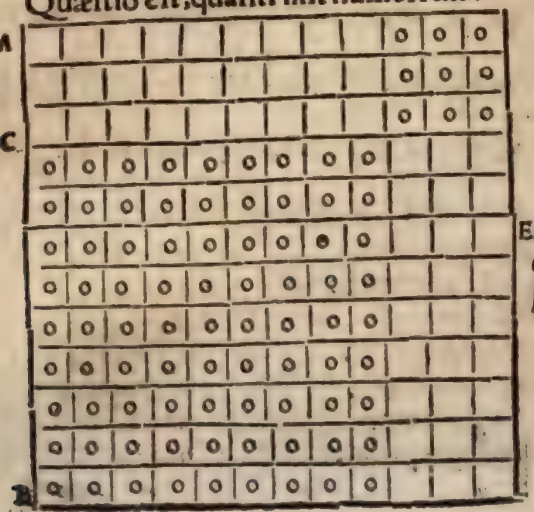
Debitum primi.	29 ☞
Debitum secundi.	19 ☞
Debitum tertij.	27 ☞
Debitum quarti.	25 flo.
Debitum quinti.	35 ☞
Debitum sexti.	7 ☞
Debitum septimi.	13 ☞

Satis uides, uidebis'q; plenius ex capitis duodecimi exēplis, quàm commoda sint signa mea pro secundis radicibus posita.

☛ Aliud exemplum egregium.

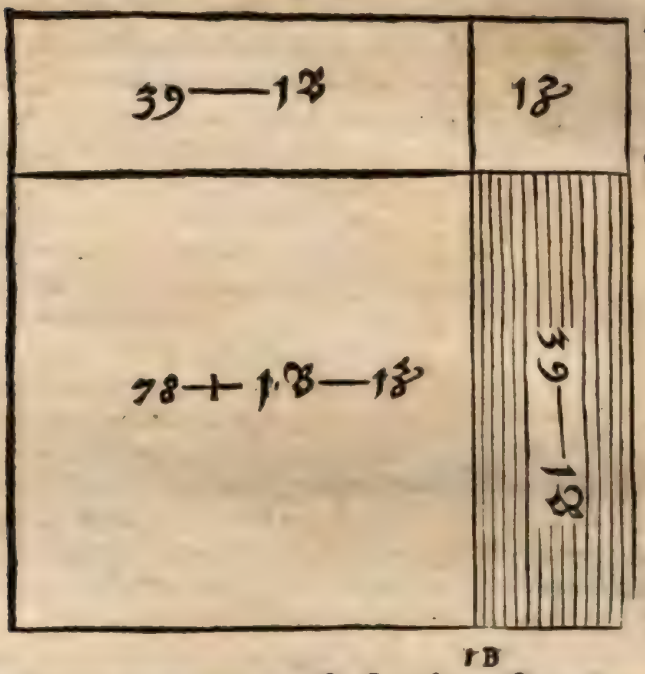
3. Sunt duo numeri, qui subtracti à suis quadratis, relinquunt 78. Additi uero ad productum proueniens ex multiplicatione numerorum ipsorum inter se, faciunt 39.

Quæstio est, quanti sint numeri illi?



Exemplū istud ex hac figura sumptum est.

Pictura exempli præsentis.



Pro primo numero pono 1 ☉ (& est A C linea) & pro numero secundo pono 1 A (& est linea C B) & pro summa amborum, pono 1 B (& est linea A B) siquidem summã amborum debeo, iuxta pronunciationem exempli, addere ad summam proueniẽtem ex multiplicatiõe unius in alterum, eandemq; summam subtrahere debeo à summa quadratorum ex utroq; numero factorum. Facit igitur quadratum numeri A C (seu 1 ☉) 1 ☍. Et quoniam summa amborum quadratorum, facit 78, postquam summa amborum numerorum (id est, 1 B) fuerit ab eis subtracta, ideo signo maius quadratum sic 78 + 1 B — 1 ☍. cum ambo quadrata simul sumpta, faciant 78 + 1 B. Et supplementum unum, i, medium, proportionale inter illa duo quadrata, sic signo,

39 — 1 B, eô quòd ſupplementum illud prouenies ex multiplicatione unius in alterum, faciat 39 — 1 B. Nam ſi 1 B (inquit pronunciatio) addatur ad ſupplementum illud, tunc tandem fiunt 39. Sic ſi 1 B ſubtrahatur à ſumma quadratorum, tunc tandem relinquuntur 78.

Clare autem ex pictura exempli uides, quòd duo quadrata (id eſt, 78 + 1 B) & duo ſupplemẽta (id eſt, 78 — 2 B) æquentur quadrato lineæ A B, quæ linea facit 1 B. Itaq; 1 B ℣ æquatur 156 — 1 B. Quæro itaq; radicem quadratã ex 156 — 1 B, iuxta modum extrahendi, datum capite 3. Eodem enim modo extrahes de 156 — 1 B radicem, quo extraheres de 156 — 12.

Pronunciatio autem exempli unum ſolummodo ponit ſupplementum, ideo alterum addendum eſt, ut figura quadrati lineæ A B compleatur. Inuenies autem per extractionem talem, q; 1 B faciat 12. Et hæc eſt ſumma amborum numerorum.

Deinde quæſtio eſt, quantum faciat uterq; per ſe. Noſti autẽ iam, q; 1 B faciat 12. Itaq; 39 — 1 B facit 27. & 78 + 1 B — 1 ℣ facit 90 — 1 ℣. Et eſt 27 medium proportionale inter 1 ℣ & 90 — 1 ℣ (ut ſatis cognoſcis ex inſpectione figuræ). Multiplicato igitur 1 ℣ in 90 — 1 ℣, fit hoc productum 90 ℣ — 1 ℣℣, æquatum quadrato numeri 27. i. 729. Vnde 1 ℣℣ æquabitur 90 ℣ — 729. Quære igitur radicem zenſizenſicam ex 90 ℣ — 729. Scilicet radix zenſica ſeu quadrata, primo quærẽda eſt ex 90 ℣ — 729, eo modo per omnia, ſicut docui cap. 3, uidelicet nõ aliter quàm ſi pro 90 ℣ — 729 ponerentur 90 2 — 729 æquatæ 1 ℣. Facit igitur radix zenſica maior 81, cuius radix quadrata eſt 9. & ille eſt numerus maior. Sic radix zenſica minor facit 9, cuius radix quadrata eſt 3. & eſt numerus inueniendus minor. Noſti enim ex ijs quæ dixi capite tertio, ut huiuſmodi numeri coſſici habeant duplicem radicem: & hic uides, ut natura rei, hic, & in ſimilibus exemplis, cogat hanc duplicitatem.

De

De exemplis regulæ Algebræ pertinentibus ad caput primum. Caput VII.

NVNC, parte præceptorum Algebræ huius finita, sequitur pars altera, de exẽplis regulæ Algebræ, quorum maximam partem recepi ex iucundissima copia illa exemplorum, quam Christophorus nobis exhibuit. Habet etiam Hieron. Cardanus ingeniosissimas quasdam exemplorũ operationes, quas oportebit me addere exemplis Christophori: quibus superaddam nõnulla Adami Ris seu Gigantis. Confido autem quòd liceat mihi hoc, quemadmodum licere mihi puto usum illum propositionum Euclidis, ex Campano & Theone, quẽ uides in libro Arithmeticæ huius secundo &c. Cui autem hoc displicet, reputet quàm diligenter & candide hanc artem colam, qui reuerenter singulos quorum scriptis utor, appellem, & nihil eorũ mihi arrogem. Deinde si Christiani sumus, non dubitamus OMNIA ESSE A DEO, etiam spinas has, quibus se ambitiosi & inuidi torquent atq; alios pungunt.

Capitis autem præsentis exempla, talia erunt, quæ partes regulæ Algebræ essentiales (de quibus dixi capite primo) habeant solummodo, & qualia Lector intelligere possit ex primo capite intellecto, etiam si nondum intelligat sequentia capita.

Primum capitis huius exemplum.

Et est Christophori 2.

SVmmam pecuniæ quam in manu mea fero, existimat quidam astantiũ nalere 20 flor. Cuius errorem ego sic corrigo. Si inquam pecuniæ huius meæ haberem adhuc partes, tertiam & quartam, tunc haberem 20 florenos.

Quæstio est quantum habeam.

Facit $1\,2\varrho$ flor. cuius $\frac{1}{3}$ (id est, $\frac{1}{3}\,2\varrho$) & $\frac{1}{4}$ (id est $\frac{1}{4}\,2\varrho$) cum toto (id est, cum $1\,2\varrho$) efficiunt simul $1\frac{7}{12}\,2\varrho$, æquat'q; summa illa cum 20 ℔.

Diui-

Diuidendi sunt igitur (iuxta regulam) 20 ℔ per $1\frac{7}{12}$, tunc inuenies $12\frac{12}{19}$ ℔. & est ualor unius radicis positæ. Tantum igitur pecuniæ habeo in manu mea. hoc est, 12 ℔. 13 gro. $3\frac{3}{19}$ ₰.

Obseruabis aũt, ut in uno exemplo multæ concurrant æquationes. Vt in hoc exemplo, æquatur primo 1 2ę numero inuento: uidelicet $12\frac{12}{19}$. Secundo $\frac{1}{3}$ 2ę, æquatur $4\frac{4}{19}$. Tertio $\frac{1}{4}$ 2ę æquatur $3\frac{3}{19}$. Quarto tandem $1\frac{7}{12}$ 2ę æquantur 20. Satis itaq; uides ut post positam unam radicẽ, fiat processus per obscuras æquationes, donec peruenias ad æquationem claram, ubi ambo termini æquationis expresse sint positi: qualis est in hoc exemplo æquatio duorum terminorum horum $1\frac{7}{12}$ 2ę. $12\frac{12}{19}$.

Secundum exemplum. Et est Christophori 27.

HAbeo 4 grossos diuersorum ualorum, ualentes simul 6 ℔. Quorũ primus seu maximus, ualet duplo plus secundo. Et secũdus ualore triplus est ad tertium. Et tertius quadruplus est ad quartum.

Quæritur quanto quisq; ualeat.

24 2ę
12 2ę æquantur 6 ℔.
4 2ę
1 2ę

Hoc est, 41 2ę æquantur 6, facit 1 2ę. $\frac{6}{41}$ ℔. & est ualor quarti.

Itaq; 4 2ę faciunt $\frac{24}{41}$ ℔. Valor tertij.

Et 12 2ę faciunt $1\frac{2}{41}$ ℔. Valor secundi.

Et 24 2ę faciunt $3\frac{2}{41}$ ℔. Valor primi.

Valente igitur 1 floreno 21 gr, & 1 gro. ualente 12 ₰ (quem ualorem unius floreni uolo retinere per totum librum, sic enim nõ oportebit me eandem rem sæpius repetere) ualebit primus seu maximus, 3 ℔. 10 gro. $9\frac{3}{41}$ ₰.

Secundus ualebit 1 ℔. 15 gro. $10\frac{22}{41}$ ₰.

Tertius ualebit 12 g2ę. $3\frac{21}{41}$ ₰.

Quartus 3 gro. $\frac{36}{41}$ ₰.

Satis

Satis autem uides, ut posita 1 2ę factus sit ascensus à minimo usq; ad maximum. i. ab 1 2ę usq; ad 24 2ę. Poteris tamen etiam (posita 1 2ę) descendere hoc modo.

1 2ę
$\frac{1}{2}$ 2ę æquantur 6.
$\frac{1}{6}$ 2ę
$\frac{1}{24}$ 2ę

Hoc est $\frac{1}{24}$ 2ę æquantur 6. Facit 1 2ę, 3 $\frac{1}{41}$ ʃ̃, ualorem primi grossi, &c.

Exemplum tertium capitis huius.
Et est Christophori 28.

TRes socij conferunt totam pecuniam suam, atq; ita colligunt $\frac{1}{7}$ ʃ̃. Fuerat autem summa primi subdupla ad summam collatam à secundo. Et summa secundi fuerat subtripla ad summam tertij.

Quæritur quantum quisq; contulerit.

1 2ę
2 2ę æquantur $\frac{1}{4}$ ʃ̃.
6 2ę

Hoc est, 9 2ę æquantur $\frac{1}{7}$ ʃ̃. Itaq; 1 2ę facit $\frac{1}{12}$ ʃ̃. hoc est, 1 gros. 9 ß. & est summa primi. Ergo summa quam contulit secundus, fuit 3 gro. 6 ß. Et summa tertij fuit, 10 gro. 6 ß.

Exemplum quartum capitis huius,
& est Christophori 29.

ESt progressio geometrica, triplæ proportionalitatis, trium terminorum, cuius summa aggregationis facit 10.

Quæritur quanti sint termini illi.

1 2ę. 3 2ę. 9 2ę. Sunt igitur 13 2ę æquatæ 10, facit 1 2ę. $\frac{10}{13}$:
Et hæc est progressio quæsita, $\frac{10}{13}$. $\frac{30}{13}$. $\frac{90}{13}$.

Quintum exemplum capitis huius.
Et est Christophori 30.

DVo numeri sunt sub proportione quadrupla, quorum mi

nor subtractus à maiore, tantum relinquit, quantum maior facit diuisus per minorem.

Quæritur quanti sint duo numeri illi.

Facit 1 2ę & 4 2ę. Itaq; diuisus maior, id est, 4 2ę per 1 2ę, facit 4. Sic enim ostendi libro primo, denominationem diuidendi tolli per denominationem diuisoris, si altera alteri sit æqualis. Et constat satis, 1 2ę quater inueniri in 4 2ę, &c. Subtracta igitur 1 2ę à 4 2ę, relinquit 3 2ę æquatas 4, facit 1 2ę. $1\frac{1}{3}$. Igitur 4 2ę faciunt $5\frac{1}{3}$.

Exemplum sextum capitis huius.

Et est Christophori 107.

MOriens quidam testamentum relinquit, 3000 ℔. uxori, filio, & duabus filiabus. Portio filij debet esse dupla ad portionem matris: & portio matris debet esse dupla ad portionem unius filiæ.

Quæritur de portione uniuscuiusq;.

Portio	filiæ	1 2ę		375
	filiæ	1 2ę	id est,	375
	matris	2 2ę		750
	filij	4 2ę		1500

Aequantur ergo 8 2ę cum 3000 flore. facit 1 2ę. 375.

Septimum exemplum capitis huius.

Et est Christophori 156.

MErcator quidam, qualibet parte summæ alicuius tertia, lucratur partem uigesimam eiusdem summæ capitalis. Deinde lucratur qualibet parte tertia summæ prioris capitalis, partem nonam lucri prioris. Et sic omnibus simul computatis, uidelicet summa capitali cum lucro toto, inuenit 864 ℔.

Quæritur quanta fuerit summa capitalis, &c.

Summa capitalis est 1 2ę.

Lucrum primum facit 3 2ę diuisas per 20. i. $\frac{3}{20}$ 2ę.

Lucrum secundum facit tres nonas de $\frac{3}{20}$ 2ę.

hoc est $\frac{1}{3}\frac{3\,2ę}{20}$ facit $\frac{1}{20}$ 2ę. Hæc

Hæc autem omnia, id est, 1 2ę & $\frac{1}{10}$ 2ę & $\frac{1}{20}$ 2ę addita, faciunt $1\frac{1}{7}$ 2ę æquata 864 ℔. Facit 12ę. 720 summam capitalem.
Et lucrum primum, id est $\frac{1}{20}$ 2ę facit 108 ℔. Et lucrum secũdum facit $\frac{1}{20}$ 2ę, id est 36 ℔. Summa omnium facit 864.

Octauum exemplum capitis huius,
& est Christophori 157.

MErcator quidam summam florenorum imponit, & qualibet parte tertia summæ illius lucratur partem uigesimam illius summæ capitalis. Deinde singulis partibus tertijs summæ capitalis, lucratur partem 9 aggregrati ex summa capitali & lucro priori. Et sic singulis computatis, inuenit mercator ille 138 ℔.

Quæritur quanta fuerit summa capitalis &c.

Facit 1 2ę ℔ summa capitalis.
Lucrum primum facit $\frac{1}{20}$ 2ę. Lucrum secundum $\frac{21}{400}$ 2ę.
Aggregatum horum omnium facit $\frac{21}{11}$ 2ę, æquatum 138 flore.
Facit 1 2ę. 90. summam capitalem.
Et sic est lucrum primum $13\frac{1}{2}$ ℔.
Et lucrum secundum $34\frac{1}{2}$ ℔. &c.

Exemplum capitis huius nonum,
Et est Christophori 158.

MErcator quidam summam florenorum imponit, qui singulis quartis partibus summæ illius, lucratur trigesimã partem summæ illius capitalis. Deinde singulis partibus quintis summæ illius capitalis, lucratur uigesimam septimam partẽ summæ illius capitalis. Et illis singulis computatis, i. summa capitalis & lucro utroq; inuenit 2136 ℔.

Quæritur quanta fuerit summa capitalis &c.

Summa capitalis 1 2ę.
Lucrum primum $\frac{3}{11}$ 2ę.
Lucrum secundum $\frac{5}{297}$ 2ę.

Hæc omnia simul, una summa, faciunt $\frac{1788}{1331}$ 2ę æquata 2136 ℔. facit 12ę. 1620.

Exemplum capitis huius decimum.

Et est exemplum regulæ De tri.

TRria poma uenduntur 11 denariolis. Quæritur quot poma uendantur pro 572 §.

Hoc exemplum ideo pono, ut significem regulam Algebræ, simpliciter omnes rationes calculandi ambire atq; complecti. Quanquam enim ipsa indigeat aliquoties regula De tri, nihilominus tamen etiam ipsam De tri regulam comprehendere uidetur. Ponitur autem pro numero inueniendo 1 2e.

Et sic stant numeri.

po.	§.	po.	§.
3.	22.	1 2e.	572.

Notum est autem, ut duo termini regulæ De tri extremi, inter se multiplicati, æquentur duobus terminis medijs inter se multiplicatis. Vnde 11 2e æquantur 1716, facit 1 2e. 156 poma.

Volo iam etiam uariationes exempli huius ponere, ut uideas quanta licentia sit in regula Algebræ.

po.	§	po.	§
12e.	572.	3.	11.
§	po.	§	po.
11.	3.	572.	12e.
§	po.	§	po.
572.	12e	11.	3.

Satis autem notum est, ut uariatio ista positionum, uariet etiam pronunciationem.

Ostenditur etiam exemplis huiusmodi, ut æquationes exemplorum regulæ Algebræ aliquando sint arte aliqua quærendæ.

Exemplum undecimum capitis huius.

Et est Adami Gigantis, Est autem exemplum regulæ De tri inuersæ.

EST massa quædam argenti, pondus habens marcarum 7, & continet quælibet marca massæ illius 5 semiuncias puri argenti. Commiscetur autem massæ illi liquatæ, alia massa cupri.

pri puri, ponderis 21 marcarum. Quæritur quantũ argenti puri habitura sit massa illa noua sub qualibet marca.

Sic stat exemplum.

argen. mix.	arg. pu.	arg. mix.	argen. pu.
7.	5.	28.	1 2ꝙ

In regula autem De tri inuersa, æquantur duo termini priores, inter se multiplicati, duobus terminis posterioribus, inter se multiplicatis. Vnde 28 2ꝙ æquantur 35, facit 1 2ꝙ. 1¼ semunciarum puri argenti, sub qualibet marca, nouæ illius massæ memoratæ. Reliqua uero pars uniuscuiusq; marcæ, erit cuprum purum: scz faciente una marca mixti argenti sedecim semuncias, continebit (per hæc quæ iam dicta sunt) unaquæq; marca 14¾ semiuncias cupri puri.

¶ Ne autem illusor aliquis tibi persuadeat, ex loco hoc, mea non posse intelligi, absq; lectione libellorum ab aliis scriptorũ, de huiusmodi regulis, uolo tibi mi Lector latius declarare exemplum hoc, rationemq; regulæ de tri inuersæ sufficienter exponere, id quod etiam in sequentibus exemplis faciam: id est, non solum numeros, sed etiam res numerorum exponam, ubi hoc necesse esse inuenero, ut non sit necesse auxilium petere ex libris aliis pro intelligentia exemplorum quæ ponam. Quanq; uellem, ut omnes qui meam hanc Algebram legunt, libros illos haberent quos ego cito, eaq; quæ cito conferrent &c.

Declarabo autem exemplum positum, & rem ipsam per simile hoc.

SVnt septem socij, quorum quilibet habet 5 ℔. Veniunt aũt ad illos alij socij 21, qui pecunia omnino carent, inter quos istos posteriores socios, diuidũt 7 socij priores suam pecuniam æqualiter, ita ut tota pecunia illa diuisa sit inter uigintiocto socios illos æqualiter.

Quæritur iam, quantum quilibet illorum 28 sociorum habeat.

Facile aũt intelligis, ut quilibet eorum minus habeat, quàm unusquisq; 7 sociorum prius habuerit, eò quòd quilibet eorum

de ſua pecunia aliquantū dederit illis 21 ſocijs ſupuenientibus. Et hoc etiam uides, ut quanto terminus regulæ De tri tertius augetur, tanto oporteat quartum terminum minui. Et hoc eſt ſignum peculiare, quo pronunciatio exemplo regulæ De tri diſcernitur à pronunciatione regulæ De tri inuerſæ. Vt hic: Ex ſocijs ſeptem habuit quilibet 5 ℔: ergo ex ſocijs 28 habebit quilibet 1 ¼ ℔. Vides certe ut 28 ponat minorem numerum, & maiorem proportionem quàm ponat numerus iſte 7. At ſecundum regulam De Tri, ponente hoc numero 7, hunc numerum 5, poneret iſte numerus 28, hunc numerū 20: ſcilicet maiorem numerum poneret quàm ponat iſte numerus 7, eò q eandem poneret proportionem, quàm ponit 7.

Iam itaq facile intelligis (ut ad exemplum Adami redeā) quòd marcæ prioris maſſæ, quæ argentū continebant, communicent argentum ſuum, marcis alterius maſſæ, nihil præter purum cuprum continentibus. Atq ea ratione fieri uides, ut numerus maior marcarū, conſtituat minorem numerū ſemiuncia rum argenti, quàm minor numerus marcarum conſtituat.

Et ſic de alijs exemplis etiam iudicabis facile. Vt ſi quæſtio incidat de aliquo opere perficiendo per plures perſonas, quod per pauciores, longius tempus requirat: ſcies ex his tale exemplum pertinere ad regulam De tri inuerſam.

Duodecimum exemplum capitis huius.
Et eſt exemplum regulæ Sex.

TRes cōmenſales mei, dant mihi hebdomodatim undecim groſſos. Quæſtio eſt, quantū mihi debeant 18 commenſales pro menſa ad 40 dies.

Numeri exempli ſic ſtant.

perſo.	dies	groſ.	perſo.	dies	groſ.
3.	7.	11.	18.	40.	12ℭ

Reducuntur autem iſti numeri ſex ad numeros quatuor regulæ De tri, per multiplicationem perſonarum in tempus. Scilicet

licet ex 3 in 7 fiunt 21, & ex 18 in 40, fiunt 720. ut nunc sic ueniant termini regulæ De tri locandi.

personæ	grossi	personæ	gro.
21.	11.	720.	1 2ª

Aequantur autem 21 2ª. 7920. Facit 1 2ª. 377 1/7 gro.

De huiusmodi exemplis facile est iudicium. Notum enim est, ut eadem pecunia hospiti proueniat, siue unus, duobus diebus utatur mensa ipsius, siue duo utãtur ea uno die. Quod dico ut intelligas rationem reductionis illius prædictæ.

¶ Simili ratione multiplicatur pondus in spacium, iuxta sequentem pronunciationem.

PRo 3 centenarijs, uehendis per milliaria 7, debẽtur uectori 11 gro. Quæro iam sic (ut & uariationem numerorum simul cum uariatione rerum significem) quot uehendi sunt centenarij, pro 377 1/7 gro. per 40 milliaria?

Sic stant numeri in ordine suo.

cent.	millia.	gro.	cent.	mil.	gro.
3.	7.	11.	1 2ª	40.	377 1/7.

Scilicet eandem mercedem habet uector, siue uehat 2 cent. per unum milliare, siue unum cent. uehat per 2 milliaria.

Tale etiam est exemplum Christophori 145, quod sic pronunciauit.

TRes sartores perficiunt 7 tunicas 14 diebus. Quot diebus perficiunt 2 sartores, 8 tunicas?

Sic stant numeri exempli.

sar.	dies	tuni.	sart.	dies	tuni.
3.	14.	7.	2.	1 2ª	8.

Sic autem stant ad regulam De tri.

42. 7. 2 2ª 8.

Itaq; æquantur 14 2ª & 336, facit 1 2ª, 24 dies.

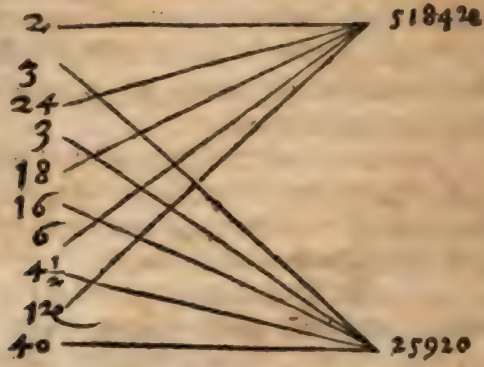
Et sic de similibus exemplis.

Tertium

Tertiumdecimum exemplum.

DVo denarioli Bohemici, faciunt 3 denariolos Saxonicos seu Misnenses: & 24 denarioli Saxonici faciunt 3 grossos Marchionicos: & 18 Marchionici faciunt 16 solidos Wirtenbergenses: & 6 solidi Wirtenbergenses faciunt 4 ½ gro. Saxon.

Quæritur, quot Saxonicis grossis ualent 40 denarioli Bohemici?



Satis uides, ut exemplum multiplicationibus reducatur ad regulam De tri, sub numeris istis stans:

51842. 25920. 12.

Facit 12 gros. 5 gros. Et tantum etiam faciunt 40 denarioli Bohemici.

Quartumdecimum exemplum.

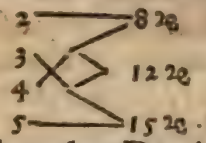
TRes socij uolunt diuidere 455 fl. Et quando primus recipit 2 fl, tunc debet secundus recipere 3 fl. Et quando secundus, recipit 4 fl, tunc debet tertius recipere 5 fl.

Quæritur, quot florenos recipit quilibet de summa illa diuidenda?

Quali multiplicatione hoc exemplum reducatur ad regulam De tri, satis clare significatur sequenti figura.

Aequantur

Aequantur autem 35 2ę & 455. Et facit 12ę. 13.



Sic ſtat ad regulam De tri.

	8 2ę			104
35 2ę	12 2ę	455	facit	156
	15 2ę			195

Sic probabis. Primo uide, an numeri inuenti additione ad ſe, faciant 455. Deinde uide an 104 diuiſus per 2, faciat quantum 156, diuiſus per 3. Item an 156 diuiſus per 4, faciat quantū 195, diuiſus per 5.

Figura diuiſionis huiuſmodi inter quatuor ſocios.

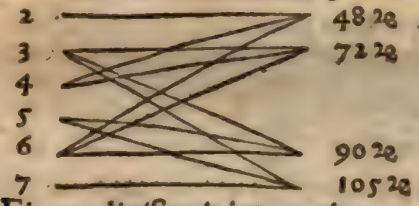
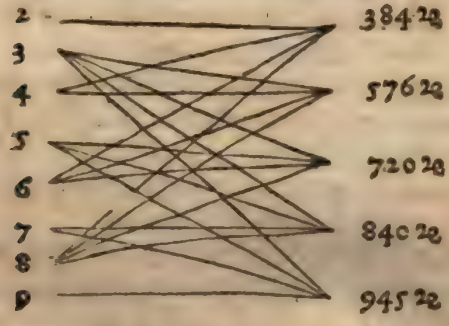


Figura diuiſionis inter quinq;.



Et ſic deinceps.

Quintumdecimum exemplum capitis huius.

TRes mercatores ſocietatē ineunt, Primus cum 40 ℔ manet

uu duobus

duobus menſibus. Secũdus cum 20 ℔ manet quinq; menſibus. Tertius cum quadam ſumma florenorum manet 3 menſibus. Lucrantur autem 3276 florenos. Et in diuiſione recipit primus 1040 ℔. Secundus recipit 1300 ℔. Et tertius 936 ℔.

Quæritur quanta fuerit ſumma florenorum impoſita à tertio.

Sic ſtant numeri.

40.	2.		1040.
20.	5.	3276.	1300.
1 ☍	3.		936.

Reducti per multiplicationem ad regulam De tri, ſic ſtant.

	80.		1040.
252.	100.	3276.	1300.
	3 ☍		936.

Aequantur autem 98282 & 235872. Facit 1 ☍, 24.

℣ Variationes exempli huius ſic notantur.

40.	1 ☍		1040.
1 ☍	5.	3276.	1300.
24.	3.		1 ☍

Alia ſocietatum exempla uidebis capite duodecimo. Iſta iam pro primo capite poſita ſufficiant.

Sextumdecimum exemplum capitis huius.

Et eſt Chriſtophori 50.

EMi aliquot ulnas panni, quæ iterum uendidi. Emi autem 5 ulnas pro 7 ℔. Et uendidi 7 ulnas pro 11 ℔. Lucratusq; ſum hac mercatura 100 ℔.

Quæritur quot ulnas emptæ ſint atq; uenditæ.

Facit 1 ☍ ulnarum.

Vtitur autẽ regula Algebræ, regula De tri, ſæpiſſime, quemadmodum utitur aliis ꝓpoſitionibus Euclidis, atq; aliis artium ſpeculationibus.

Sic autem inuenitur æquatio huius exempli.

ulnæ	℔	ulnæ	
5.	7.	1 ☍	facit $\frac{7}{5}$ ☍ ℔.

ulnæ

ulnæ	℔	ulnæ	
7.	11.	1 2ę.	facit $\frac{11}{7}$ 2ę ℔.

Satis autem intelligis $\frac{7}{1}$ 2ę esse florenorum summam, expoſi tam pro ulnis emptis, seu summam capitalem. Et $\frac{11}{7}$ 2ę esse florenorum summam receptam pro ulnis uenditis. Itaq; ſi ſubtrahatur ſumma expoſita, ſeu capitalis ſumma, de ſumma receptorum, tunc manet lucrum purum. Scz $\frac{7}{1}$ 2ę de $\frac{11}{7}$ 2ę, relinquunt $\frac{60}{77}$ 2ę, quod eſt lucrum purum. Et hoc æquatur 100 ℔. Cum pro nunciatio dicat lucrum mercaturæ prædictæ fuiſſe 100 ℔.

Diuidendi ſunt igitur iuxta regulam Algebræ 100 per $\frac{60}{77}$, facit 1 2ę. 583 $\frac{1}{3}$ ulnarum emptarum atq; uenditarum. Pro illis emptis ulnis expoſui $\frac{7}{1}$ 2ę flo. id ẽ, 816 $\frac{2}{3}$ ℔. Et pro uenditis illis, recepi $\frac{11}{7}$ 2ę. 916 $\frac{2}{3}$ ℔.

Sic inuertitur exemplum hoc.

Emi aliquot ulnas panni. Emi autem 7 ulnas pro 11. flo. Et totum pannum illum iterum uendidi. Coactus autẽ fui dare 5 ulnas pro 7 flore. Et ſic mercatura iſta intulit mihi damnum 100 florenorum. Quæritur ut prius &c.

Decimumſeptimum exemplum capitis huius.

Et eſt Adami Gigantis, licet ſub alijs numeris ſit poſitum.

SI 100 libræ cæræ emantur pro 17 flo. Quæritur, quot libræ dabuntur pro 1 ℔, quatenus 102 ℔ faciant lucrum 18 florenorum? Facit 120 2ę librarum.

Sic autem ſtat exemplum ad regulam De tri.

℔	℔	℔	℔
17.	100.	102.	600.
℔	℔	℔	℔
1	1 2ę	102 + 18.	120 2ę

Aequantur autem duo producta regulæ De tri ſibĩnuicem. Scilicet 120 2ę æquantur 600 ℔. Facit 1 2ę. 5 ℔.

Sic inuertitur exemplum hoc.

Emi 100 libras cæræ pro 17 ℔, & damnum intulit mihi

mercatura hæc 18 florenorum per 102 florenos expositos.

Sic stant numeri ad regulam De tri.

fl	lb	fl		lb
17	100.	102.	facit	600.
fl	lb	fl		lb
1	12ℓ	102—18.	facit	84ℓ

Aequantur itaq; 84ℓ cum 600. facit 1ℓ. $7\frac{1}{7}$ librarum datarum pro 1 fl.

Vendidi itaq; 600 ulnas pro 84 flo. quas emerã pro 102 fl. cum coactus fuerim uendere $7\frac{1}{7}$ ul. pro 1 flo.

Sequuntur uariationes exempli ipsius Adami, quarum pronunciationem diligens lector facile dabit.

Prima uariatio.

fl	lb	fl		lb
1ℓ	100.	102.	facit	$\frac{10200}{1ℓ}$
fl	lb	fl		lb
1	5	102+18.	facit	600.

Secunda uariatio.

fl	lb	fl		lb
17.	1ℓ	102.	facit	6ℓ
fl	lb	fl		lb
1	5	102+18.	facit	600.

Tertia uariatio.

fl	lb	fl		
17.	100	1ℓ	facit	$\frac{100ℓ}{17}$
fl	lb	fl		
1	5	1ℓ+18.	facit	5ℓ+90.

Quarta uariatio.

fl	lb	fl		lb
17.	100.	102.	facit	600
fl	lb	fl		lb
1ℓ	5.	102+18.	facit	600ℓ

Quinta:

Quinta uariatio.

℔	ß	℔		ß
17.	100.	102.	facit	600.
℔	ß	℔		ß
1.	5.	102 + 12ę	facit	510 + 52ę.

Similes uariationes etiam habet exemplum inuersum. Sed sufficiunt signatæ uariationes diligenti Lectori.

Decimumoctauum exemplum capitis huius.
Et est Adami Gigantis.

QVidam mercator emit lanam & ceram pro 124 florenis. Emit autem 100 libras lanæ pro septem florenis. Et 100 libras ceræ pro 14 ℔. Et pondus lanæ emptæ duplum est ad pondus ceræ. Quæritur, quantum emit de duplici re tali?

Sic stat exemplum ad regulam De tri.

ß	℔	ß		℔
100.	14.	12ę	facit	$\frac{142ę}{100}$
ß	℔	ß		℔
100.	7.	2ęę	facit	$\frac{142ę}{100}$

Aequantur ergo $\frac{2\,8\,2ę}{100}$ cum 124. Et facit 12ę, $442\frac{6}{7}$ lib. ceræ emptæ, Itaq; libras lanæ emit $885\frac{5}{7}$.

Decimumnonum exemplum capitis huius.
Et est Adami Gigantis.

ARgentarius quidam cambiens, 568 ℔ recipit, pro quibus exponit grossos quadruplicis ualoris. Quorum quidam 7 faciunt 1 ℔. Et quorundam 18 faciunt 1 ℔. Quorundam 21 faciunt 1 ℔. Et quorundam 28 faciunt 1 ℔. Exponit autē æqualem numerum grossorum de qualibet specie eorum.

Quæstio. Quot grossos exponit de qualibet specie grossorū illorum? Facit 12ę grossorum de specie qualibet.

Sic stat exemplum ad regulam De tri.

gro.	℔	gro.	℔
7			$\frac{1}{7}$ 2ℊ
18	1	1 2ℊ	$\frac{1}{18}$ 2ℊ
21			$\frac{1}{21}$ 2ℊ
28			$\frac{1}{28}$ 2ℊ

Itaq; $\frac{71}{252}$ 2ℊ æquantur 568. Facit 1 2ℊ, 2016 groſſos de qualibet ſpecie. Probationes huiuſmodi exemplorum faciles ſunt, ideo eas breuitatis cauſa intermitto.

Vigeſimum exemplum capitis huius.
Et eſt Chriſtophori 115.

DVos tabellarios intercipit ſpacium milliariorum 140, qui una & eadem hora incipiunt proficiſci alter uerſus alterum. Vnus eorum quolibet die perambulat 8 milliaria. Alter uero perambulat quolibet die 6 milliaria.

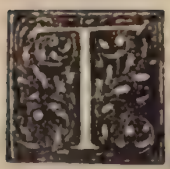
Quæſtio eſt, quando conueniant. Facit in 1 2ℊ dierum.

Sic ſtat exemplum ad regulam De tri.

dies	mil.	dies	mil.
1	8	1 2ℊ	8 2ℊ
1	6	1 2ℊ	6 2ℊ

Itaq; 14 2ℊ æquantur 140. Facit 1 2ℊ, 10 dies.

De exemplis regulæ Algebræ pertinentibus ad ſecundum caput præceptorum.
Caput VIII.



TALIA iam exempla ponenda ſunt, quæ ultra partes eſſentiales regulæ Algebræ, admittãt partem accidentalem priorem, quæ eſt reductio æquationum, habentium ſigna additorum & ſubtractorũ, ad æquationes ſiue ſignis talibus repoſitas.

Et quia aliquando laborioſæ additiones & ſubtractiones incidunt

incidunt, sub exemplis, talia signa recipientibus, uolo illis præmittere theoremata quædam, quorum beneficio & labor huius modi operationum atque tædium facile uincantur.

Theorema primum.

Positæ rei partes, ad ipsam rem positã cõpendiose addere.

Vt sit res posita, $^{3\ gro.}\ \overline{-}\ _{2}^{16\ den.}$

Sint rei huic addendæ tres quartæ ipsius rei. Hic non opus est ut primo extraham tres quartas de re posita, ut ijs extractis, ipsas rei toti addam, sed cõpendiose ita operor. Addo $\frac{3}{4}$ (id est, denominationem partium totius) ad unitatem, facit $\frac{7}{4}$, quas multiplico in $^{3\ gro.}\ \overline{-}\ _{2}^{16\ den.}$, facit $^{21\ gro.}\ \overline{-}\ _{8}^{112\ den.}$

Secundum theorema.

Partem rei positæ, ad partem alteram eiusdem rei compendiose addere.

Sit res posita, $^{8\ 2\varrho}\ \overline{-}\ _{5}^{12}$.

Volo partem tertiam rei huius addere ad partem quartam eiusdem rei. Addo $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, fiunt $\frac{7}{12}$: quas multiplico in $^{8\ 2\varrho}\ \overline{-}\ _{5}^{12}$, facit $^{2\ 2\varrho}\ \overline{-}\ _{3}^{3}$, & est summa aggregationis quæsitæ.

Theorema tertium.

Positæ rei partem uel partes ab ipsa re compendiose subtrahere.

Sit res posita, $7\frac{7}{8}\ +\ \frac{8\ 2\varrho}{12\ 2\varrho}\ -\ 10$.

Volo ab hac re posita, subtrahere $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{7}$, subtraho eas ab unitate, remanent $\frac{7}{11}$: quas multiplico in rem positam, & fiunt $49\frac{7}{8}\ +\ \frac{56\ 2\varrho}{88\ 2\varrho}\ -\ 70$, & hæc est summa quam quærebam.

Theorema quartum.

Positæ rei partem unam à parte alia eiusdem rei compendiose subtrahere.

Sit res posita, $^{12\ 2\varrho}\ +\ _{7}^{8}$.

Volo de parte tertia rei huius, subtrahere partem eius quartam. Subtraho $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$, remanet $\frac{1}{12}$. Multiplico igitur rem positã per $\frac{1}{12}$, facit $^{3\ 2\varrho}\ +\ _{7}^{2}$, & hoc est relictum quod quærebam.

Theorema

Theorema quintum.

¶ Positæ rei partem uel partes inuenire.

Sit res posita. $^{12}\,2\varrho \frac{+8}{1}$.

Volo partes eius, tertiam & quartã compendiose inuenire. Recipio $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, quas addo, fiunt $\frac{7}{12}$. Eas partes multiplico in rem positam, fiunt $^{12}\,2\varrho \frac{+14}{12}$. Et est pars tertia & pars quarta de $^{12}\,2\varrho \frac{+8}{1}$. Item uolo $\frac{3}{4}$ de eadem re posita inuenire. Multiplico eam per $\frac{3}{4}$, fiunt $^{9}\,2\varrho \frac{+6}{1}$. Et sic de alijs.

Theorema sextum.

¶ Ipsam rem de qua partes sunt extractæ, restituere.

Vt sint partes tertia & quarta rei alicuius $^{12}\,\frac{-2}{1}\,2\varrho$.

Volo inuenire numerum illum, de quo sumptæ sunt partes positæ. Addo $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, faciunt $\frac{7}{12}$: & per illam minutiam diuido partes positas, fiunt $^{144}\,\frac{-24}{35}\,2\varrho$. Huius integri, partes tertia & quarta, sunt $^{12}\,\frac{-2}{1}\,2\varrho$.

Primum exemplũ capitis huius, & est Adami Gigantis.

SInt quatuor massæ argenti mixti. Primæ pondus habeat 11 marcas, quarum quælibet contineat 9 semiuncias puri argenti. Secundæ massæ pondus sit 15 marcarum, cuius quælibet marca contineat 7 semiuncias puri argenti. Tertiæ massæ pondus habeat 24 marcas, quarum quælibet contineat 10 semiuncias puri argenti. Quartæ massæ pondus sit 136 marcarum, quarum quælibet contineat 14 semiuncias puri argenti. Sit aũt conflanda ex his quatuor massis, una massa, cuius quælibet marca contineat 15 semiuncias puri argenti. Quæstio.

Quantum argenti puri admiscendum est massis istis?

Facit 12ϱ marcarum puri argenti?

Explicatio exempli illius.

Marcæ mixti argenti.	*Semiunciæ puri argenti.*	*Semiunciæ puri cupri.*
11	99	77
15	105	135
24	240	144
136	1904	272
186	2348	628

Quæ

Quælibet marca supponitur pondus habere 16 semiunciarum. Vnde quando marca una dicitur continere 9 semuncias puri argenti, tunc intellige reliquam partem esse cuprum. Quando igitur fuerit massa proposita, quæ habeat 11 marcarum pondus, & quælibet marca cõtineat 9 semuncias puri argenti, tunc totum argentum massæ illius faciet 99 semuncias puri argenti. Ergo cuprum massæ eiusdem, faciet 77 semuncias. Vbi enim sub una marca continentur nouem semunciæ puri argenti, necesse est sub eadem marca contineri 7 semuncias puri cupri, &c.

Sic autem ponitur exemplum ad regulam De tri.

Marcæ mix. arg. Mar. pu. arg.	Semunciæ cupri.	Marca mixta.
186 + 1 ♎	628.	1

Facit 1 marca mixta, massæ nouæ, $1\ 8\frac{628}{+}\ 1$ ♎ semuncias cupri. Et æquatur hæc minutia uni semunciæ cupri. Nam si una marca debet cõtinere 15 semuncias puri argenti, certe necesse est eandem marcam (per suppositionem prædictam) continere 1 sem. cupri. Vnde (per reductionem ad æquationem integrorum terminorum) æquabuntur 628 cum 186 + 1 ♎. Et (per reductionem æquationis ad simplicium terminorum æquationem. i. quæ neq; signa habeat additorum neq; subtractorum) æquabitur 1 ♎ cum 442. Itaq; 1 ♎ facit 442; scz 1 ♎ marcarum facit 442 marcas, & 1 ♎ semunciarum facit 442 semuncias.

Vnde 442 marcæ puri argenti, addi debẽt massis prædictis, tunc noua massa, conflata ex massis prædictis liquatis, continebit sub qualibet marca 15 semuncias puri argenti.

Sic (si quæstio sit, quantum cupri addi debeat massis illis liquandis, ut sub qualibet marca contineatur 1 semuncia puri argenti) stabit exẽplum ad regulam de tri pro cupro addendo.

Marcæ mix. arg. Marcæ puri cupri.	Semunciæ argenti.	Marca mixta.
186 + 1 ♎	2348	1

Facit igitur 1 marca mixta, massæ nouæ, $1\ 86\frac{2348}{+}\ 1$ ♎. Et hæc minutia

nutia æquatur uni semiunciæ puri argenti. Facit 1 ♎. 2162. Tot igitur marcæ cupri commiscendæ erunt massis prædictis liquandis.

¶ Si autem quæstio sit, quantum contineat 1 marca argenti, si conflentur massæ prædictæ, & nihil eis addatur aut subtrahatur, sic stabit exemplum.

marcæ	semiunc.	mar.	semiunciæ
186	2348	1	facit $12\frac{50}{93}$.

Probatur sic per cuprum.

marcæ	semiun.	mar.	semiun.
186	628	1	facit $3\frac{35}{93}$

¶ Et si quæstio sit, de quinta massa, commiscenda prædictis massis, quæ sub qualibet marca contineat 3 semiuncias puri argenti: & qua commixta seu cum prædictis massis liquata, producatur noua massa, continens sub qualibet marca 5 semiuncias puri argenti. Quæstio inquam sit, quantum pondus habeat talis massa. Sic stabit exemplum.

Marcæ mix. *Marcæ mix.*	*Semiunciæ arg.* *Semiun. arg.*	*Marca noua.*
$186+1\,♎$	$2348+3\,♎$	1

Facit igitur 1 marca nouæ massæ $\frac{2348+3\,♎}{186+1\,♎}$ semiun. argen. æquatas 5 semiunc. arg. Facit 1 ♎. 709. Et tot marcas habuit massa quinta.

Probo sic:

marcæ	semiunciæ	marca	semiun.
895	4475.	1	5

Fit autem 895 ex additione 709 ad 186. Et 4475 fit ex additione 2348 ad triplum numeri huius 709, &c.

¶ Et si quæstio sit de superioribus quatuor massis, quantum cupri igne consumēdum sit, ut sub qualibet marca nouæ massæ conflandæ ex illis quatuor, inueniantur quindecim semiunciæ puri argenti, sic stat exemplum.

marcæ

Marcæ mi.arg. Marcæ puri cupri.	Semiunciæ argenti.	Mar. no. maſſæ.
186 — 1 ♎	2348	1

Facit itaq; una marca de maſſa noua $1\ 6\frac{2348}{5} - 1$ ♎ ſemiun. argenti puri. Aequaturq; minutia hæc cum 15 ſemiunc. puri argenti. Facit igitur 1 ♎, $29\frac{7}{17}$. Tot itaq; marcæ de cupro, prædictarũ quatuor maſſarum conſumptæ, relinquerent maſſam nouam, quæ ſub qualibet marca cõtineret 15 ſemiuncias puri argenti.

Probatur.

Marcæ	Semiunc.	Marcæ	Semiunc.
$\frac{2348}{17}$	$\frac{2348}{1}$	$\frac{1}{1}$	15

Poterat etiã proxima quæſtio ſuperior inueniri per ſequentem poſitionem.

Marcæ mi.arg. Marcæ cupri.	Semiunciæ cupri.	Marca nouæ maſſæ.
186 — 1 ♎	628 — 16 ♎	1

Hic uides $\frac{628}{186} - \frac{16♎}{1♎}$ ſemiun. cupri æquari uni ſemiũciæ cupri, eò quòd una marca debeat continere 15 ſemiuncias argenti. Facit 1 ♎, ut prius, $29\frac{7}{17}$. Quando autem ſubtrahitur 1 ♎ marcarum cupri, de 186 marcis, tunc ſubtrahendæ ueniunt 16 ♎ ſemiunciarum cupri, de numero ſemiunciarum cupri (cum 1 marca contineat 16 ſemiuncias, ut ſuppoſitum eſt) ſic enim manet æquatio inter cuprum contentum ſub 186 marcis mixtis, & ſemiuncias cupri expreſſe poſitas &c.

Sic poſitio hæc

Marcæ mix. arge. Marcæ puri cupri.	Semiunciæ arg. puri.	Marca mixta.
186 + 1 ♎	2348	1

ſic poterat diſponi:

Marcæ mixti arg. Marcæ puri cupri.	Semiunciæ cup. puri.	Marca mixta.
186 + 1 ♎	628 + 16 ♎	1

in utraq; enim diſpoſitione idem facit 1 ♎.

Sic etiam poſitio hæc

Marcæ mixti arg. Marcæ arg. puri.	Semiunciæ cupri.	Marca mixta.
186 + 1 ♎	628	1

sic poterat disponi:

Marcæ mixti arg.	Marcæ puri argenti.	Semunciæ puri arg.	Marca mixta.
186 + 12ℨ		2348 + 162ℨ	1

Secundum exemplum capitis huius, & est Christophori 74. sub uariatis tamen rebus positum.

DVas habeo mensuras uini, quarum una ualet 12 §, & altera 15 §. Volo miscere mensuram unam ualentem 13 §. Quæstio. Quantū uini recipiēdum est de qualibet mensura? Facit de priore 1 2ℨ mensuræ partium. Et de altera 1 — 1 2ℨ partium mensuræ.

Et sic stat exempli dispositio.

mensura	§	mens.	§
1	12	1 2ℨ	facit 12 2ℨ
1	15	1 — 1 2ℨ	facit 15 — 15 2ℨ.

Et duo illa producta, id est, 12 2ℨ & 15 — 15 2ℨ, æquantur 13 §. Facit 1 2ℨ $\frac{2}{3}$. De illo igitur quod utilius est, recipio $\frac{2}{3}$ unius mensuræ: & de reliquo recipio $\frac{1}{3}$.

Probo sic.

mens.	§	mens.	§
1	12	$\frac{2}{3}$	facit 8
1	15	$\frac{1}{3}$	facit 5

Tertium exemplum capitis huius.

Et est Christophori 75. sub re tamen uariata.

MEnsura uini ualet 10 §. Huic uolo tantum aquæ commiscere, ut una mensura commixtionis illius ualeat 7 §. Quæstio. Quantum aquæ commiscendum est?

men. uini.	men. aquæ.	§	men. cōmix.	§
1 + 1 2ℨ		10	1	fac. $1 \frac{10}{+1}$ 2ℨ.

Aequantur igitur $1 \frac{10}{+1}$ 2ℨ & 7, facit 1 2ℨ. $\frac{3}{7}$. Itaq; tres septimæ unius mensuræ, commixtæ cum una mensura uini illius, faciunt commixtionem cuius una mensura ualeat 7 §.

Probatio.

Probatio sumitur penes dispositionem exempli sic:

mens.	℔	mensura		℔
$1\frac{3}{7}$	10	1	facit	7

Quartum exemplum capitis huius.

Et est Christophori 77. sub re tamen uariata.

SVnt in quodam uasculo 20 mensuræ uini, quarum quælibet ualet 12 ℔. Et uasculo illi infunditur aqua, donec uasculum uino illo atq; aqua repleatur. Et tunc ualet 1 mensura uini illius sic commixti cum aqua, 10 ℔.

Quæstio. Quanta est capacitas uasis illius?

Facit $20 + 12\mathfrak{Q}$ mensuræ.

Sic stat exemplum.

mensuræ uini.	mensuræ aquæ.	℔	mens. commixti.
$20 + 12\mathfrak{Q}$		240	1

Satis uides ut, $20 + 12\mathfrak{Q}$ & 10 sint æquata. Facit igitur $1\mathfrak{Q}$, 4. Ita uasculum illud capax erat 24 mensurarum.

Quintum exemplum capitis huius.

Et est Christophori 86.

DVm Archimedes iussu Hieronis inquireret, quantum argenti dolo artificis loco auri fuisset immixtum coronæ suæ idolo uotæ, recepit uas in huiusmodi usum aptum. Eo aũt uase aqua repleto, immissaq; corona, collegit aquam effluentẽ. Deinde uase denuo aqua repleto, immisit massam auri puri, sumptam ad pondus coronæ, & iterum collegit aquam effluentem. Tertio uas repleuit aqua, immissaq; massa argenti, sumptam ad pondus coronæ, iterum collegit aquam effluentem. Et sic ex proportionibus partium aquæ ter collectæ, inuenit quantum argenti latuerit sub auro illius coronæ.

Quæstio. Quantum argenti fuit per Archimedem inuentũ sub corona latentis? Facit $1\mathfrak{Q}$ marcarum argenti.

Supponamus ergo coronam totam pondus 10 marcarum habuisse. Tunc aurum coronæ habuit 10 marcas auri, minus

una radice argenti, uidelicet 10 — 1 2ę. Supponimus deinde aquam ex immissione coronæ effluxam, canthari partem esse octauam, & ex immissione auri, effluxisse partem trigesimam unius canthari: ex immissione uero argẽti, effluxisse tres quartas unius canthari.

His suppositis sic stabit exemplum ad regulam De tri.

marcæ	canth.	marcæ	canth.
10	$\frac{3}{4}$	1 2ę	$\frac{3\ 2ę}{40}$
10	$\frac{1}{30}$	10 — 1 2ę	$\frac{10-1\ 2ę}{300}$

Ambo autem termini quarti, æquantur cum $\frac{1}{8}$ canth. tanq̃ partes integri simul sumptæ, æquatæ suo integro, ut satis uides ex operatione, per ea quæ supponuntur. Vnde cum 1 2ę faciat $1\frac{1}{43}$. satis uides pondus argenti latẽtis sub auro, fuisse $1\frac{1}{43}$ mar. aurum autẽ (iuxta ea quæ supponimus) habuisse $8\frac{1}{43}$ marc.

Sextum exemplum capitis huius.

Et est Christophori 151.

DVo mercatores commutant res suas uenales. Primus crocum habet, cuius 1 libra ualet $4\frac{1}{8}$ ℔. in commutatione autem ponit quamlibet libram pro 5 ℔. Secundus habet margaritas, quas ponit in commutatione illa pro $7\frac{1}{2}$ ℔. Repetit autem primus à secundo quartam partem ualoris croci positi in commutationem.

Quæstio est, quanti æstimatæ sint margaritæ citra commutationem. Facit pro 1 2ę flo.

Sic autem stat exemplum.

$4\frac{1}{8}$ — $1\frac{1}{4}$	5 — $1\frac{1}{4}$	1 2ę	$7\frac{1}{2}$

Subtracta quæ uides poni ad terminos priores, ideo ponuntur, quòd primus, iusta lege commutationum, repetit à secũdo quartam partem ualoris rerum suarum in cõmutationem positarum. Est autem $1\frac{1}{4}$ pars quarta de 5. Ideo intelligi debet pars illa tanquam exempta à commutatione. Atq; ita loco 5 ℔ ponitur ad regulam 5 — $1\frac{1}{4}$. id est, $3\frac{3}{4}$. Sed quòd æqualis portio etiam

etiam ſubtrahitur â termino primo,& loco $4\frac{1}{8}$ ponit̃ $4\frac{1}{8} - 1\frac{1}{4}$. id eſt, $2\frac{1}{12}$. Ideo fit,quòd inter terminos duos priores, atq; terminos duos poſteriores,non ſolum eſſe debet æquatio proportionis numerorum poſteriorum, ad proportionem numerorũ priorum,ſed ſupponitur etiam æquatio rei,numeri ſecundi,ad rem numeri primi, tanc̃ æquatio rei pertinentis ad numerum quartum,poni intelligitur ad rem pertinentem ad numerum tertium,ut ſimul habeas æquationem proportionum, & æquationem æqualitatum, in qualibet emptione & commutatione facta ſecundum regulam De tri. Et iſta ſpeculatio dedit mihi occaſionem ponendi exempla de Commutationibus mercatorum,aliâs enim contempſiſſem huiuſmodi exempla. Sed nihil eſt in uniuerſa Arithmetica,quod ſpeculationem iſtam, arte dignam,tam aperte pandat, & uidere etiam cogat, uti exempla huiuſmodi mercatorum. Scilicet,hoc fit in commutationibus,ut minor ſumma extra eam,æquetur ſummæ maiori intra ipſam commutationem conſideratæ. Hoc autem quod repetitur,à commutantibus,ideo repetitur, quod ad commutationẽ non ptineat, ideoq; ſubtrahitur ab utroq; termino,iuxta illud: Si ab æquatis æqualia demas,quæ remanent æquata manebũt.

Sed (ut ad exemplum redeam) productum extremorum inter ſe multiplicatorum, æquatur producto intermediorum. Vnde fit ut 1 2℔ faciat $5\frac{5}{8}$. Et ſic patet quòd margaritæ æſtimatæ ſint extra commutationem pro $5\frac{5}{8}$ ℔. Vide autem quæ ſit proportio inter terminum ſecundũ & quartum, ut ſcias quot libras croci primus poſuerit in commutationem. Cum enim proportio ſit dupla, pulchre inuenies eum duas libras commutaſſe pro margaritis,& quartam partem ualoris duarum librarum repetiuiſſe. Scilicet duæ libræ faciunt 10 flo. niſi quòd repetitur quarta pars. Facit autem quarta pars de 10 flore. $2\frac{1}{2}$ ℔. quam partem ſi ſubtrahas,remanebit hæc ſumma $7\frac{1}{2}$ ℔. Et tantam uides etiam illam ſummam eſſe, qua æſtimantur margaritæ in commutatione, &c.

Si

Si autem primus æstimasset duas libras suas extra commutationem pro 8 ℔, & intra cõmutationem pro 10 ℔. Secundus uero margaritas suas extra commutationem æstimasset pro 20 ℔, & intra commutationem pro 24 ℔. Tunc secundus repetiuisset aliquid à primo, ut facile uides hoc ex ipsis terminis, 8. 10. 20. 24. Maior enim est proportio inter duos priores ꝯ inter posteriores.

Si autem scire uelis, quantum repetat secundus, hoc casu, à primo, sic pone ad regulam:

8	10	20 — 1 2ę	24 — 1 2ę

Multiplica extremos, deinde medios terminos inter se, tunc inuenies 192 — 8 2ę æquata 200 — 10 2ę. Et facit 1 2ę, 4. Tot ergo florenos repeteret secundus à primo. id est, sextam partem de 24. Patet sic. Primus recepisset à secundo margaritas æstimatas pro 24, pro quibus ipse dedisset duas libras croci, ualentes solummodo 20 ℔. Itaq; iure redderet secundo 4 ℔.

Si autem secundus duplicaret margaritas, tunc primus duplicaret etiam crocũ suum. Poneret enim 4 libras croci ualentes 40 ℔, & margaritæ facerent 48. Cum ergo primus recepe-ret rem ualentem 48 ℔, pro sua re ualente solummodo 40 ℔, ideo restitueret primus secundo 8 ℔, id est, sextam partẽ de 48. Et sic de huiusmodi alijs.

Exemplum septimum capitis huius.
Et est Adami Gigantis.

INterrogatus quidam, quota sit hora diei? Ita respondit: Dimidia pars horarum à media nocte usq; ad hanc horam, collecta ad tres quartas horarum futurarum usq; ad mediam noctem, faciunt numerum horarum quem quæris.

Quæstio. Quantus fuit iste numerus horarum?

Facit 1 2ę horarum præteritarum à media nocte, usq; ad horam in qua facta est ista quæstio. Vnde cum à media nocte ad mediam noctem fluant horæ 24, satis uides summam horarũ, quæ

quæ futuræ erãt usq; ad mediam noctem, esse 24 — 1 2ę. Huius summæ tres quartæ, faciunt $^{72}\frac{}{4} - ^{3}2ę$. Huic adde $\frac{1}{2}$ 2ę seu $\frac{2}{4}$ 2ę. cum sit dimidia pars horarum à media nocte usque ad horam quæstionis huius, fiunt $^{72}\frac{}{4} - ^{1}2ę$. Et huic æquatur 1 2ę. Facit itaq; 1 2ę. 14 $\frac{2}{7}$. Fuit ergo hora inter secundam & tertiam post meridiem.

Exemplum octauum capitis huius.

Et est Christophori 4.

ESt numerus, cuius duæ tertiæ, æquantur parti eiusdem numeri dimidiæ, ternario adauctæ.

Quæstio. Quantus est numerus iste.

Facit 1 2ę. Cuius duæ tertiæ faciunt $\frac{2}{3}$ 2ę: & dimidia pars numeri inueniendi, adaucta ternario, facit $^{1}2ę\frac{}{2}^{6}$. Huic igitur æquantur $\frac{2}{3}$2ę, facit 12ę. 18.

Exemplum nonum capitis huius.

Et est Christophori 9.

SVnt duo numeri, qui ad se additi faciunt 20. Quorũ maior diuisus per 3, quotientem facit qui sumptus ad octauam partem minoris, facit cum ea 5.

Quæstio est, quanti sint duo illi numeri.

Primus facit 1 2ę.

Secundus facit 20 — 1 2ę.

Sit igitur 1 2ę numerus maior (nam 1 2ę potest etiam pro minore recipi &c.) qui diuisus per 3, facit $\frac{1}{3}$2ę. Est aũt octaua pars de 20 — 1 2ę, hæc $^{20}\frac{}{8} - ^{1}2ę$. Addo illi $\frac{1}{3}$2ę, facit $^{60}\frac{}{24} + ^{5}2ę$. Huic æquantur 5. Facit 1 2ę. 12. & est numerus maior. Facit itaq; minor numerus 20 — 1 2ę. id est 8.

Exemplum decimum capitis huius.

Et est Christophori 7.

NVmeri cuiusdam pars tertia, superaddita eidem numero, facit aggregatum, quod excedat 40 tanto, quanto ipse numerus inueniendus excedítur à 44.

Quæritur quantus sit numerus ille.

Facit 1 2ę. Huic ſuperaddita pars eius tertia, facit 1 $\frac{1}{3}$ 2ę. Vnde 1 $\frac{1}{3}$ 2ę — 40, æquatur cum 44 — 1 2ę. Facit 1 2ę. 36.

Exemplum undecimũ capitis huius, & eſt Chriſto. 8.

EST numerus, à quo ſubtractæ duæ quintæ ipſius, relinquũt tantum infra 100, quanto numerus ipſe ſuperat 100.

Quæſtio eſt, quantus ſit numerus ille.

Facit 1 2ę. à quo ſubtractæ duæ quintæ ipſius, relinquunt $\frac{3}{5}$ 2ę. Vnde $\frac{100}{\frac{3}{5}}$ 2ę æquantur cum 1 2ę — 100. Facit 1 2ę. 125.

Exemplum duodecimum, & eſt Chriſtophori 23.

EST progreſſio arithmetica, nouẽ habens terminos ſub differentia unitatis progrediens, cuius ſumã aggregationis facit 48. Quæſtio eſt, quæ ſit iſta progreſſio.

Facit 1 2ę. 1 2ę + 1. 1 2ę + 2. &c. Et ſic ultimus terminus erit 1 2ę + 8. Huic additus terminus primus, fit 2 2ę + 8. Huius dimidium eſt 1 2ę + 4. quod multiplicatum per numerum terminorum, i. per 9. facit 9 2ę + 36. Et huic æquantur 48. Facit 1 2ę. 1 $\frac{1}{3}$. terminum uidelicet primum.

Vnde hæc eſt progreſſio quæſita.

1 $\frac{1}{3}$. 2 $\frac{1}{3}$. 3 $\frac{1}{3}$. 4 $\frac{1}{3}$. 5 $\frac{1}{3}$. 6 $\frac{1}{3}$. 7 $\frac{1}{3}$. 8 $\frac{1}{3}$. 9 $\frac{1}{3}$.

Iſta omnia ſimul faciunt 48.

Exemplum tertiumdecimum capitis huius, & eſt Chriſtophori 25.

EST progreſſio arithmetica nouem terminorum, cuius terminus primus facit 4. Summa uero aggregationis terminorum facit 48. Quæritur quæ ſit iſta progreſſio.

Facit 4. 4 + 1 2ę. 4 + 2 2ę. &c. Et ſic ultimus terminus erit 4 + 8 2ę. Cui additus primus, facit 8 + 8 2ę. Cuius dimidium eſt 4 + 4 2ę. quod multiplicatũ per numerum terminorum, i. per 9. facit 36 + 36 2ę. Facit 1 2ę. $\frac{1}{1}$, terminũ uidelicet primũ.

Vnde hæc eſt progreſſio quæſita.

4. 4 $\frac{1}{3}$. 4 $\frac{2}{3}$. 5. 5 $\frac{1}{3}$. 5 $\frac{2}{3}$. 6, 6 $\frac{1}{3}$. 6 $\frac{2}{3}$.

Iſta omnia ſimul addita faciunt 48.

Exemplum

Exemplum decimumquartum huius capitis.

Et est Christophori 26.

EST progressio arithmetica, cuius terminus primus facit 5. & ultimus facit 10. Et summa aggregationis facit 60.

Quæstio est, quot terminos habeat progressio ista.

Facit 1 2ę terminorum. Vnde extremorum aggregatum facit 15, cuius dimidium est $\frac{15}{2}$. Quod multiplicatum per numerę terminorum. i. per 1 2ę. facit $\frac{15}{2}$ 2ę æquatas 60. Facit 1 2ę. 8. Et tot terminos habet progressio talis.

Iam quæstio est de terminis intermedijs. Sed illi sint hi, 5 + 1 2ę. 5 + 2 2ę. 5 + 3 2ę. 5 + 4 2ę. 5 + 5 2ę. 5 + 6 2ę. Et hi æquantur 45 (id est, 60 — 15 — 5). Facit 1 2ę. $\frac{5}{7}$.

Vnde sic stat progressio.

5. 5 $\frac{5}{7}$. 6 $\frac{3}{7}$. 7 $\frac{1}{7}$. 7 $\frac{6}{7}$. 8 $\frac{4}{7}$. 9 $\frac{2}{7}$. 10.

Exemplum decimumquintum capitis huius.

EST progressio geometrica quadrupla septem terminorū, qui ad se additi faciant 85 $\frac{21}{84}$.

Quæritur quæ sit ista progressio.

Facit 1 2ę. 4 2ę. 16 2ę. &c. Vltimus terminus facit 4096 2ę. qui multiplicatus per 4, facit 16384 2ę. subtracto termino primo, remanent 16383 2ę. Quæ diuisæ per 3, relinquunt 5461 2ę æquatas 85 $\frac{21}{84}$ seu $\frac{7160}{84}$, facit 1 2ę. $\frac{1}{84}$.

Vnde sic stat progressio quæsita.

$\frac{1}{84}$. $\frac{1}{28}$. $\frac{4}{84}$. 1. 4. 16. 64.

Exemplum decimumsextum capitis huius.

EST progressio geometrica tripla, cuius summa aggregationis facit 80, terminus autem ultimus facit 54.

Quæritur quanta sit ista progressio.

Terminus ultimus triplatus facit 162, à quo primus terminus subtractus, relinqt 162 — 1 2ę. Cuius dimidiū est $\frac{162}{2}$ = 1 2ę. & hoc æquatur cum 80. Facit 1 2ę. 2.

Sic igitur stat ista progressio.

2. 6. 18. 54.

Sic (si dicas esse progressionem quadruplam, cuius summa aggregationis faciat 255, & terminus primus sit 3) recipio pro ultimo termino 1 2ę, cuius quadruplatio facit 4 2ę, à quibus subtraho 3. facit 4 2ę — 3, quæ diuido per 3. Et sic $\frac{4 2ę - 3}{3}$ æquatur cum 255. Facit 1 2ę. 192. Et hæc erit progressio, 3. 12. 48. 192.

Exemplum decimumseptimum capitis huius.

Et est Adami Gigantis 10, de regula Falsi datum.

CIuis quidam seruo suo pigro ita mercedē triginta dierum constituit, ut laboranti singulis diebus dare uelit 7 §: ociantem uero multare uelit 5 §. Ratione autē facta post tempus illud, seruus neq; recipit aliquid, neq; domino aliquid pendit.

Quæstio est, quot diebus laborauerit &c.

Facit 1 2ę dierum laboris, & 30 — 1 2ę dierum ocij.

Sic stat exemplum ad regulam De tri.

dies	§	dies	§
1	7	1 2ę	7 2ę
1	5	30 — 1 2ę	150 — 5 2ę.

Aequantur itaq; 7 2ę & 150 — 5 2ę. Facit 1 2ę. 12½. dies laboris. Vnde dies ocij fuerunt 17½.

Exemplum decimumoctauum capitis huius.

Et est Adami Gigantis.

MErcator quidam uendidit 20 libras pro 45 ℔. quarum aliquot fuerunt de croco, & reliquæ de zinzibere. Vendidit aūt 1 libram croci pro 3 ℔: & 1 librā zinziberis pro ½ ℔.

Quæstio est, quot fuerint libræ de croco uenditæ &c.

Facit 1 2ę librarum croci. Et 20 — 1 2ę librarum zinziberis.

Vnde sic stat exemplum ad regulam De tri.

℔	℔	℔	℔
1	3	1 2ę	3 2ę
1	½	20 — 1 2ę	$\frac{20 - 1 2ę}{2}$

Aequantur igitur 3 2ę ℔, & $\frac{20 - 1 2ę}{2}$ ℔, cum 45 ℔. Facit 1 2ę. 14. Igitur uendidit 14 libras croci & 6 libras zinziberis.

Exemplum

Exemplum decimumnonum capitis huius.

Et est Adami Gigantis.

ARgentarius quidam habet 560 gro. ualentes 160 ℔. Quidam autem illorum ualent singuli $\frac{1}{3}$ ℔, & reliquorum singuli ualent $\frac{1}{4}$ ℔.

Quæstio est, quot grossi sint quorum singuli faciant $\frac{1}{3}$ ℔, &c.

Facit 1 2ę gro. quorum singuli ualent $\frac{1}{3}$ ℔.

Et 560 — 1 2ę, quorum singuli ualent $\frac{1}{4}$ ℔.

Sic stat exemplum ad regulam De tri.

gro.	℔	gro.	℔
1	$\frac{1}{3}$	1 2ę	$\frac{1}{3}$ 2ę
1	$\frac{1}{4}$	560 — 1 2ę	$\frac{560}{4}$ — 1 2ę

Duo termini quarto loco positi, faciunt 160 ℔. Facit igitur 1 2ę, 240. Vnde 240 gro. sunt quorum unusquisq; ualet $\frac{1}{3}$ flor. & 320 sunt quorum unusquisq; ualet $\frac{1}{4}$ ℔.

Exemplum uigesimum capitis huius.

Et est Adami Gigantis.

QVidam lanio boues emit. Qui interrogatus, quantum unum emerit? Respondit: Quanto 10 boues emi pluris 40 florenis, tanto emissem 18 boues plurís 96 ℔.

Quæstio est, quantum faciat 1 bos.

IN isto exemplo subindicare uolui, qua occasione mihi uideatur Algebra primo esse inuenta. Vides autem ut numeri uulgariter denominati, & sub diuersis signis æquati ad inuicem, eam uim habeant, quam habent numeri cossici: nisi quòd denominationes tales multiplicationẽ non habent. Requirendi igitur erant numeri denominati, quorum denominationes reciperent multiplicationem, &c.

Patet autem ex pronunciatione, quòd 10 boues — 40 flore. æquentur 18 bo. — 96 ℔. Quia 10 boues — 40 ℔, est excessus precij 10 boum, ultra 40 ℔. Sic 18 bo. — 96 ℔, est excessus seu differentia 18 boum ultra 96 ℔. Et utrunq; excessum pronunci

atio æquat mutuò. Reducta igitur æquatione hac, inuenitur 1 bos facere 7 ℔.

Si autem dixisset lanio ille, 10 boues tanto se emisse pluris 40 ℔, quanto 18 boues emere potuisset minoris 96 ℔, tunc ita staret æquatio: 10 boues — 40 ℔, æquati 96 ℔ — 18 bo. faceretq; 1 bos, 4 ℔. 18 gro.

Sic (si dicas, 4 gro. — 3 ouis emi 41 oua) æquatio erit inter duos numeros positos, quemadmodum superius indicaui sub quibuslibet quatuor terminis regulæ De tri, esse duas proportiones ad inuicem æquatas, quæ ita sint proportiones inæqualitatis sub numeris, ut simul sint æqualitates duæ sub æstimatione rerum consideratæ &c. Pulchre igitur inuenies 1 grosso emi 11 oua.

Sic si dicas, 4 gro. — 3 §, facere 41 §, inuenies 1 grossum facere 11 dena.

Sic si dicas, 10 ℔ + 3 libris facere 30 ℔, inuenies 1 libram facere 6 ℔. 14 gro. Si aũt quæstio sit, quot libras faciat 1 ℔, tunc numerus flor. erit diuisor, & inuenies 1 ℔ facere $\frac{1}{10}$ lib.

☞ Similis æquatio est in isto exemplo Adami.

DVm 7 ulnæ uenderentur pro 4 $\frac{1}{2}$ ℔, emerem 17 ulnas pro 10 ℔. 13 gro. Quæstio est, quot grossi cõputent pro 1 ℔. Sic stant quatuor termini regulæ De tri.

ulnæ	℔	ulnæ	℔ gro.
7	4 $\frac{1}{2}$	17	10. 13.

Multiplica quartum terminum per numerũ primi termini, id est, per 7. Et secundum terminum multiplica per numerum tertij termini, tunc inuenies æquationem inter numeros uulgariter denominatos, uidelicet inter $\frac{153}{2}$ ℔, & 70 ℔ + 91 gros. inueniesq; 1 ℔ facere 14 gro.

☞ Sic æquatio inter numeros uulgariter denominatos inuenitur ex isto exemplo.

QVidam recipit à mercatore quodam crocum pro 10 flo. Deinde iterum recepit ab eodem mercatore 24 lib. croci.

Postea

Postea reddidit mercatori 30 ℔ croci, & mercator supputato ualore croci, restituit ei 14 ʃ.

Vides certe, ut 10 ʃ + 24 ℔ fuerit debitum totum, & similiter 30 ℔ — 14 ʃ. Ideoq; 10 ʃ + 24 ℔ æquantur 30 ℔ — 14 ʃ, facitq; 1 ℔ 4 ʃ.

¶ Item in isto exemplo Adami simili ferè modo incidit æquatio præter numeros cossicos.

QVidam ciuis inuenit pauperes ante ianuam domus suæ, quibus septenos erogat denariolos, reseruatq; in manu sua 30 §. Qui si cuilibet dare uoluisset 9 §, tũc ei defecissẽt 30 §.

Vides hic, ut septem summæ denariolorum, iuxta numerum pauperum sumptorũ, plus 30 denariolis, fuerit totus numerus denariolorũ, quos ciuis ille in manu habebat. Et similiter 9 summæ tales, minus 30 denariolis. Itaq; 7 sum. + 30 § æquantur 9 sum. — 30. Reducta itaq; æquatione, inuenies 1 summam facere 30, id est, numerum pauperum.

¶ Incredibile aũt est, quanta celeritate, facilitate, atq; commoditate omnia calculentẽ per regulam Algebræ, ꝯ quæ calculari solent per regulam Falsi, per mutuatã hanc denominationem uulgarem prædictam, id quod uno aut altero exemplo monstrare me oportet.

Primum, & est Christophori 147.

PRo 70 plaustris uini penditur uectigal, 1 plaust. — 32 ʃ. Et pro 200 plaustris penditur 1 plaust. + 20 ʃ.

Hic quæstio est, quanti 1 plaustrum sit æstimatum.

Mutuata igitur prædicta denominatione uulgari, sic pono exemplum ad regulam De tri, pro inuentione æquationis.

plau.	ʃ	plau.	ʃ
70	1 sum. — 32	1	1 sum. $-\frac{32}{70}$.
200	1 sum. + 20	1	1 sum. $+\frac{20}{200}$

Et cum in quarto loco utrunq; productũ uideas esse uectigal unius plaustri, satis constat alterũ alteri æquari, atq; ita beneficio mutuatæ denominationis uulgaris, inuenisse æquationẽ.

Reducitur

Reducitur aũt æquatio ista minutiarũ, in æquationẽ existentẽ inter 200 sum. — 6400 florenorum, & 70 sum. + 1400 florenorum. Et hæc æquatio rursum reducitur ad hanc æquationẽ simplicium terminorũ. 13 sum. æquatæ 780. Facit itaq; 1 sum. florenorum 60 fl. Vidisti autem in positione 1 sum. florenorũ, positam fuisse loco unius plaustri. Et iam uides ualorem unius plaustri fuisse 60 flo.

Aliud, & est Christo. 146.

SEruo cuidam debet dominus suus, pro seruitio 12 mensiũ, 10 fl & 1 tunicam. Pro seruitio uero 7 mensiũ debet ei tunicam illam, & 2 fl.

Hic quæstio est, quanti tunica illa æstimata sit.

Sic inuenio æquationẽ, per mutuatã denoiationem prædictã.

menses	fl	mens.	fl
12	1 sum. + 10	1	$\frac{1 \text{ sum.} + 10}{12}$
7	1 sum. + 2	1	$\frac{1 \text{ sum} + 2}{7}$

Vides & hic, ex tertio loco, producta quarti loci inter se esse æquata, beneficio mutuatæ denominatiõis uulgaris. Itaq; prædicto modo inuenies 1 sum. florenorum, pro tunica illa positã, facere $9\frac{1}{7}$ flo.

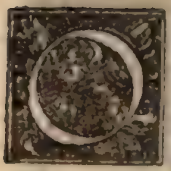
Sufficiant ista pro indicio Algebræ Germanicæ, ad obsequium illis præstitum, qui putant Algebram non posse consequi absq; cognitione Linguæ latinæ, putantq; eam esse difficiliorem quàm sit regula Falsi &c.

Deinde ex huiusmodi operationibus optime ostendi potest, qua ratione tot calculãdi regulæ ad nos deuolutæ sint. Scilicet fuerunt illusores ingeniorum, qui delectati opinione hominum existimãtium, ipsos esse singulari industria inueniendi regulas præditos, & hi occultata earum fonte, tales riuulos ad nos deduxerunt. Mire eñ quosdam (ijs similes) uri & indignari sensi, quòd Christophorus prodiderit Algebram tanta fide.

De

De exemplis pertinentibus ad caput tertium.

Caput IX.



OMNIA exempla secundæ, tertiæ, & quartæ, regularum Christophori, & infinitarum talium, pertinent ad caput hoc peculiariter, ut nõ minor copia eorum haberi possit, quàm ea sit quam Christophorus p prima sua regula eximia fide exhibuit. Obruor aũt in tanta copia, adeó, ut cum pauca rescribere cogar (quòd instanter exemplar à me exigatur, ut illud reddam ocyus Typographo deferendum) etiam tempus eligendi exactius optima, me deficiat. Pareat igitur Lector mihi, si uideat me nõ ubiq; protulisse optima exempla, aut prolata, optimo ordine collocasse.

Exemplum primum capitis huius.

Et est Christophori 220.

SVnt duo numeri sub proportione dupla, qui additi ad se, tantum faciunt, quantũ multiplicatio eorum inter se facit.

Facit 1 ☉ & 2 ☉. Hi additi ad se, faciunt 3 ☉. Multiplicati autem inter se, faciunt 2 ☽. Sunt igitur 3 ☉ æquatæ 2 ☽. Facit 1 ☽. 1 ½ ☉.

Itaq;, iuxta regulam Algebræ, quærenda est radix zensica seu quadrata, ex 1 ½ ☉. Quod qua ratione fiat, ostendendũ est. Nam eo consilio uolui primo exempla ponere, qualia Christophorus ponit pro sua regula prima. Quanquã autem modus iste, positus sit superius capite tertio, tamen repeto eum hic, ut ostendam etiam hoc loco, quàm sine ulla exceptione generalis sit mea regula Algebræ.

Modus autẽ huiusmodi extractionis, alius non est, quàm reductio signorum. Scz radix quadrata ex 1 ½ ☉ æquata 1 ☽, facit 1 ½. Deleto enim signo cossico minore, de numero denominato

minato ab ipso, subtrahendum etiam est illud idem de maiore signo. Atq; ita fit, ut sicut 1 ⅜ æquatur 1 ½ 2ę, ita 1 2ę æquetur 1 ½. Sed uidea mus tamen 1 ½ esse radicem quadratã ex 1 ½ 2ę, essęq; 1 ½ 2ę zensum seu quadratum minutiæ huius 1 ½. Scilicet hoc exemplum præsupponit hanc progressionem geometricam:

1. 1 ½. 2 ¼. 3 ⅜. 5 1/16. &c.

Iam uide an 1 ½ 2ę æquetur 2 ¼. scilicet,

2ę		2ę	
1	1 ½	1 ½	facit 2 ¼.

Et sic de alijs similibus.

Vt si 2 cę æquati sint 8 ⅜, ueniet radix cubica quærenda ex 4 ⅜. faciet illa 4. Item si 1 cę æquetur 4 2ę, erit æquatio inter 1 ⅜ & 4. faciet igitur radix cubica ex 4 2ę idem quod radix quadrata ex 4, id est 2. &c.

Secundum exemplum capitis huius.

EST quadrata superficies partes habens suæ diuisionis 784. Quæritur quantum faciat latus eius unum.

Facit 1 2ę. Cuius quadratum est 1 ⅜. Æquatur ergo 1 ⅜ cũm 784, facit 1 2ę. 28.

Talia exẽpla minutiora à principio posita, optime informãt. Vides certe, ut nihil sit tã exile in Arithmeticis, quod Algebræ regula non complectatur, nihilq; tam altum quod non apprehendat. Quia uero capite septimo (id est, in capite exemplo primo) ponebantur exempla partium essentialium regulæ Algebræ. Deinde sequenti capite ponebantur exempla quæ ultra partes essentiales admittunt partem regulæ accidẽtalem, priorem. Restat ut hoc capite exempla ponanẽ, quæ admittant partem accidentalem posteriorem ipsius regulæ Algebræ: id est, extractiones radicum, & prius quidem tales, quales primo libro docui, &c.

Tertium exemplum capitis huius.

EST superficies quadrãgula rectangula altera parte longior, cuius longitudo tripla sit ad latitudinẽ eius, Area uero eius faciat

faciat partes diuisionis æquales 768. Quæstio est de quanti tate utriusq; laterum.

Facit latus unum 1 ♎. Et alterum latus 3 ♎.

Latera igitur inter se multiplicata, faciunt 3 ♋ æquatos 768. Facit 1 ♋, 256. Vnde 1 ♎ facit 16. Itaq; breuius latus figuræ illius faciet 16, & longius faciet 48. Vnde alterum multiplicatū per alterum, faciet 768.

Exemplum quartum capitis huius.

EST numerus aliquis diuidens 36. Et ille diuisor multiplicatus per 54, tantum facit quantum quotiens prædictæ diuisionis multiplicatus per 24.

Quæstio est quantus sit ille diuisor.

Facit 1 ♎. Quotiens ergo diuisionis prædictæ facit $\frac{36}{1\text{♎}}$. Et diuisor ille multiplicatus per 54, facit 54 ♎. Multiplicatus uero quotiēs diuisionis prædictæ per 24, facit $\frac{864}{1\text{♎}}$. Aequatur igitur $\frac{864}{1\text{♎}}$ cum 54 ♎. Et per reductionem ad integra, 54 ♋ æquantur 864. Facit 1 ♋. 16. Vnde 1 ♎ facit 4. Itaq; 4 est ille diuisor qui diuidit 36, &c.

Exemplum capitis huius quintum.

EST triangulus orthogonius, cuius cathetus, ad basim, facit proportionem duplam superbipartientem quintas, hypotenusa uero eius facit 52.

Quæstio est de quātitate utriusq; lateris. i. basis atq; cateti.

Basis facit 5 ♎. Et cathetus facit 12 ♎.

Nam 12 ♎ habent proportionem duplam superbipartientem quintas ad 5 ♎.

Aequatio aūt recipitur iuxta penultimam primi Euclidis. Scilicet, 12 ♎ in se, faciunt 144 ♋. Sic 5 ♎ in se multiplicatæ, faciunt 25 ♋. Itaq; 144 ♋ & 25 ♋, faciunt 169 ♋ æquatos quadrato de 52. Igitur $\sqrt{\text{♋}}$ 169 ♋. id est, 13 ♎. æquabuntur 52. Facit 1 ♎, 4. Vnde basis orthogonij propositi faciet 20, & cathetus eius faciet 48. Quod poteris facilitèr probare.

VIdes autẽ, ut data opera talia ponam exempla, quæ operationes singulas capitis tertij (id est, Algorithmi numerorum cossicorum) contineant. Rerum autem uulgarium exempla nemo hoc loco â me exigat: puto enim me illis satisfeciſſe, pro instituta mea numerorum tractatione. Nosti etiam ex superioribus, ut quorum quadrata sunt æquata, eorum quoq; radices inter se sint æquales. Sed hoc paucis etiam hoc loco delectat me ostendere, ut uidelicet res Geometricæ respondeant operationibus Algorithmi numerorũ cossicorum. Scilicet, nouimus ex Algorithmo, 5 ☉ in se multiplicatas, facere 25 ☐. Faciat iam radix aliqua 4 (ut in exemplo præsenti) hoc est, ponatur linea diuisa in 4 partes æquales, & quintupletur in longum, tunc habes radices quinq; ad se additas geometricè, quæ faciunt lineã 20 partium prioris diuisionis. Hæc igitur linea ducta in se, facit 400. Sic 5 ☉ multiplicatæ in se, faciunt 25 ☐. Depicta itaq; figura quadrata, cuius costa habeat 20 partes diuisionis suæ æquales, experire, an in eo inueniãtur uigintiquinq; quadrata, quorum unumquodq; costam habeat, continentem partes quatuor diuisionis prædictæ, &c.

Exemplum sextum capitis huius.

Et est Christo. 8. pro sua regula secunda positum.

ESt progressio Geometrica trium terminorum, sub dupla proportione progredientium, quorum quadrata ad se addita faciunt 189.

Facit 1 ☉. 2 ☉. 4 ☉.

Progressio quadratorum, 1 ☐. 4 ☐. 16 ☐. Faciunt autem additi, 21 ☐ æquatos 189. Facit 1 ☐. 9. Vnde 1 ☉ facit 3. Sunt igitur termini progressionis illius, 3. 6. 12.

Exemplum septimum capitis huius.

Et est Christ. 3. pro sua regula tertia positum.

ESt progressio geometrica trium terminorum, sub proportione sesquialtera progredientium, cuius progressionis terminus maximus, multiplicatione partis suæ dimidiæ, in par-

tem

tem unam tertiam medij termini, producat numerũ, qui multiplicatus per quartam partem termini minimi, faciat 72.

Facit 4 2ę, 6 2ę, 9 2ę.

Itaq; $\frac{9}{2}$ 2ę multiplicatæ per 2 2ę, faciunt 9 ☐ę: qui multiplicati per 1 2ę, faciunt 9 ☐ę æquatos 72. Facit igitur 1 ☐ę, 8. Vnde radix eius cubica facit 2. Sunt igitur numeri inuẽti pro progressione illa proposita, 8. 12. 18.

Exemplum octauum capitis huius.

Et est Christo. 10. pro sua tertia regula positum.

EST columna quædam, orthogonaliter surgens à basi quadrangula rectangula, cuius basis latera sunt sub proportione sesquitertia: altitudo uero columnæ proportionem habet, ad latus maius basis, duplam superbipartientem tertias, & facit ipsa soliditas 933 12.

Quæstio est de dimensionibus singulis quantæ sint.

Facit latus minus ipsius basis, 3 2ę.

Et latus basis maius facit 4 2ę.

Et altitudo columnæ $10\frac{3}{7}$ 2ę.

Hæ dimensiones inter se multiplicatæ, faciunt 128 ☐ę, æquatos 933 12. Facit 1 ☐ę, 729. Et 1 2ę facit 9.

Vnde latus basis minus facit 27. Et latus maius facit 36. Altitudo uero columnæ facit 96.

Exemplum nonum capitis huius.

SVnt duæ columnæ, surgentes orthogonaliter à basibus quadratis. Et cum basium proportio ad inuicem sit superseptipartiens nonas, est proportio earum altitudinum, ad inuicem, sesquitertia. Et ea etiam est proportio breuioris columnæ ad altiorem. Soliditas autem ambarum columnarum simul sumpta, facit 672. Nunc quæstio est, quantæ sint singulæ dimensiones in utraq;.

Sic stat exemplum hoc figuratum.

Sunt autem numeri cuborum simul sumpti, uidelicet 84 ☍ æquati 672. Facit 1 ☍, 8. Vnde 1 ☍, facit 2.

Costa igitur basis, columnæ minoris, facit 6.
Et costa basis, maioris columnæ, facit 8.
Et basis ipsa minoris columnæ, facit 36.
Et basis maioris columnæ, facit 64.
Et altitudo minoris columnæ, facit 8.
Et altitudo maioris columnæ, facit 6.
Et soliditas minoris columnæ, facit 288.
Et soliditas maioris columnæ, facit 384.

Vide iam an ea quæ in pronunciatione dicuntur, isti calculationi respondeant.

Quando autem dicitur, proportionem basium esse superseptipartientem nonas, & proportionem altitudinū esse sesquitertiam, sequitur mox eam esse proportionē altitudinis unius ad altitudinem alterius columnæ, quæ est costæ unius basis, ad costam basis alterius. Est enim proportio superseptipartiens nonas, duplicata proportio, proportionis sesquitertiæ. Et cum nihilominus eadem proportio sit inter soliditates columnarū, id est, proportio sesquitertia, sequitur minorem columnam necessario esse altiorem maiore, &c.

Exemplum decimum capitis huius.

Et est Christo. 18. pro sua tertia regula positum.

NVmeri cuiusdam pars tertia & quarta multiplicantur inter se, & productum diuiditur per 27: & sic proueniunt duæ tertiæ radicis quadratæ numeri illius inueniendi.

Quæstio est, quantus sit numerus ille.

Facit 1 ☌. Multiplico igitur $\frac{1}{3}$☌ & $\frac{1}{4}$☌ inter se, faciunt $\frac{1}{12}$▭. productum illud diuisum per 27, facit $\frac{1}{12}\frac{2}{4}$ æquatum duabus tertijs ex $\sqrt{8}$ 1☌, quæ prueniunt ex multiplicatiõe $\sqrt{8}\frac{4}{9}$ in $\sqrt{8}$ 1☌. Scilicet $\sqrt{8}\frac{4}{9}$☌ æquatur cum $\frac{1}{3}\frac{2}{24}$. Et per reductionem eorū ad quadrata, $\frac{4}{9}$☌ æquantē $\frac{1}{10}\frac{2}{4}\frac{8}{9}\frac{8}{76}$. Et per reductionem ad integra, 9 $\frac{8}{8}$ æquantur 4199042☌. Et per reductionem signorum, 9 ☍ æquan

æquantur 419904. Facit 1 ☉, 46656. Et 1 ♃, facit 36.

Iam tu uide, an calculatio ista respondeat pronunciationi. Scilicet, 12 & 9 inter se multiplicata, faciunt 108. Quæ diuisa per 27, faciunt 4. Sunt autem 4, duæ tertiæ de 6, id est, de radice quadrata ex 36.

Exemplum undecimum capitis huius.

Et est Christophori, uariata tamen est pronunciatio parumper. Est autem 19. positum pro sua tertia regula.

EST numerus, cuius pars tertia multiplicata in se, & productum multiplicatum per partem quartã numeri eiusdem, producit numerum, cuius radix quadrata sit numerus ille de quo loquor.

Quæstio est, quis sit numerus iste.

Facit 1 ♃. Multiplico igitur $\frac{1}{9}$ ♄ per $\frac{1}{4}$ ♃, id est, quadratum tertiæ partis numeri illius, multiplico per quartã partem eiusdem numeri, producitur{que} ea multiplicatione quadratum numeri inueniendi. Itaq; $\frac{1}{36}$ ☉ æquatur 1 ♄. Et per reductionem ad integra, 1 ☉ æquatur 36 ♄. Facit igitur 1 ☉, 36 ♄. cuius radix cubica facit 36.

Patet per reductionem signorum, ut superius docui circa exemplum primum capitis huius. Recidit enim exemplum Christo. 19. pro sua regula tertia positum, modica mutatione mea hac, sub regula eius prima, id quod ipsa mutatione mea indicare uolui. Meæ uero regulæ unicæ nihil potest excidere, sed omnia sub una regula cadunt.

Exemplum duodecimum capitis huius.
Et est Christophori primũ, pro sua
secunda regula positum.

EST numerus, cuius dimidia pars multiplicata per tertiam partem eiusdem numeri, producit 54.

Facit 1 ♃. Vnde $\frac{1}{6}$ ♄ æquatur 54. Facit 1 ♄, 324. Et 1 ♃ facit 18. & est numerus inuentus quem quærebam.

Vides

VIdes certe uel hoc exemplo, quàm infinitis modis, tu ipse facili opera possis formare exempla: & deinde ex quolibet exemplo formare regulam, quales illusores illi inuenerunt, de quibus superius dixi.

Scilicet, ex isto exemplo regulam formo hanc:

Recipe (inquam) denominatores partium quæ nominãtur, & eos inter se multiplica, productumq; multiplica in numerũ datum, tunc radix quadrata illius producti, dabit tibi numerũ quæsitum. Exemplum.

Propono tibi numerum inueniendum, cuius partes tertia & quarta producant sua multiplicatione inter se, 768. Recipio 3 & 4, qui multiplicati inter se faciunt 12. Multiplico ergo 12 in 768, fiunt 9216. Cuius radix quadrata facit 96, numerus uidelicet quem quærebam. Et sic de alijs.

Rationem autem regulæ satis uides ex operatione exempli prius data. Nam nullam numeralem multiplicationem uides ibi, nisi quòd 2 in 3 sunt multiplicata: deinde productum (.i. 6) fuit multiplicatum in numerum expresse positum, i. in 54. & sic fiebat quadratum numeri inueniendi.

Sic etiam simili ratione formare poteris regulam de tribus partibus numeri aliquotis. Vt (exempli gratia) sit inueniendus numerus, cuius partes, dimidia, tertia, & quarta, inter se multiplicatæ, producant 72. Recipe uerba regulæ proximo loco positæ, & pro radice quadrata quærenda, iube quærere radicem cubicam. Sic de partibus quatuor aliquotis, numeri alicuius inueniendi constituentibus multiplicatione sua inter se, numerum aliquem datum, pone in regula extractionem radicis zensi zensicæ. Et de quinq; partibus positurus regulam, doce extrahendam esse radicem surdesolidam. Et sic de alijs.

Habes huiusmodi regularum formandarum aliquot exempla in libro Arithmeticæ huius primo, capite septimo.

De

De exemplis regulæ Algebræ pertinentibus ad quartum caput. Caput x.

MODO hoc, quo omnia Christophori exempla, secundæ, tertiæ, & quartæ regularum, atq; infinitarum similium, pertinent ad caput præcedens, eo (inquam) modo pertinent ad caput hoc decimum, omnia Christo. exempla, quintæ, sextæ, septimæ, & octauæ regularum, ut satis discere potuisti ex ijs quæ docui capite quarto libri huius tertij, atq; ex exemplis sequentibus plenius forte disces.

Primum exemplum capitis huius.

Et est Christ. primũ, pro sua regula quinta positum.

QVæro numerum mediantem inter numerum senario maiorem, & alium numerum binario minorem, ita ut extremi illi numeri inter se multiplicati faciant 84.

Numerus ille quem quæro, facit 1 ☉. Faciunt igitur extremi eius, per pronunciationem descripti, 1 ☉ + 6, & 1 ☉ — 2. Hi inter se multiplicati, faciunt hoc productum 1 ☐ + 4 ☉ — 12, & huic producto æquantur 84, ut habet pronunciatio. Reducta igitur æquatione ad simplicia, quantum fieri potest, æquatio ueniet inter 1 ☐ & 96 — 4 ☉. Facit igitur 1 ☐, 96 — 4 ☉. Vnde ulterius inquirẽdum est, quantum faciat 1 ☉. hoc est, radix ☉ ficta seu quadrata extrahenda ex 96 — 4 ☉, sicut docui cap. 4. libri huius. Facit autem √☐. 96 — 4 ☉ (hoc est, radix quadrata ex hoc cossico numero 96 — 4 ☉) 8. Vnde extremi illi numeri, inter quos mediat 8, iuxta pronunciationem exempli, sunt 14 & 6. Hi enim inter se multiplicati, faciunt 84.

Poterant extremi etiam sub hac pnunciatione inueniri.

¶ Numerus quidam, multiplicatus in numerum octonario ſ: maiorem, facit 84.

Numerus ille facit 1 2ę, & ille alius in quem multiplicari debet, facit 1 2ę + 8. Facit autem multiplicatio illa 1 ⅔ + 8 2ę, & illud productum æquatur 84. Transpositis autem particulis transponēdis ut oportet, inuenies 1 ⅔ æquari huic numero cossico 84 — 8 2ę. Itaq; cum 1 ⅔ æquetur 84 — 8 2ę, æquabitur 1 2ę huic √⅔.84 — 8 2ę. Itaq; extrahenda est radix ex 84 — 8 2ę, scz √⅔.84 — 8 2ę, facit 6.

Item extremi illi inueniri poterant per hanc pronunciationem.

Numerus quidam multiplicatus in numerū se minorem octonario, facit 84.

Numerus ille facit 1 2ę, & alter facit 1 2ę — 8. Facit autem multiplicatio eorū inter se 1 ⅔ — 8 2ę, & illud productum æquatur 84. Transpositione uero facta, uidebis 1 ⅔ æquari 8 2ę + 84. Et faciet 1 2ę, 14.

Exemplum secundum capitis huius.

Et est Christophori primum pro sua regula septima positum, numeris tamen mutatis.

QVæro numerum mediantem inter numerū binario maiorem, & senario minorē, ita ut extremi illi numeri inter se multiplicati faciant 48.

Numerus ille quem quæro facit 1 2ę. Faciunt igitur extremi eius 1 2ę + 2 & 1 2ę — 6, qui inter se multiplicati, faciunt 1 ⅔ — 4 2ę — 12; æquatur autem istud, huic 48. Transpositis autem particulis, æquabitur 1 ⅔. 4 2ę + 60. Facit 1 2ę. 10. Sunt igitur extremi eius 12 & 4, facientes sua multiplicatione 48.

Poterant tamen extremi sic inueniri.

Numerus quidam multiplicatus in numerum octonario se maiorem, producit 48.

Numerus ille facit 1 2ę. Facit ergo alter 1 2ę + 8, &c. ut suprā.

Exemplum tertium capitis huius.

Et est Christophori primum, pro regula sua sexta positum.

QVæro numerū, quo duo numeri sint minores, unus octonario

nario, & alter senario, ita ut illi numeri duo minores inter se multiplicati, faciant numerum quaternario maiorem eo, quem quæro. Quantus nunc est numerus quem quæro?

Facit numerus quem quæro 1 ☉. Sunt igitur numeri inter se multiplicandi 1 ☉ — 8, & 1 ☉ — 6. Faciunt uero multiplicatione, 1 ▢ + 48 — 14 ☉. Et æquatur istud productum huic numero cossico 1 ☉ + 4. Reductione uero facta, æquabitur 1 ▢, huic numero cossico, 15 ☉ — 44. Cuius radix quadrata maior. facit 11. & illa est radix exempli. Vnde numeri alij duo exẽpli, illo minores, sunt 5 & 3, quorũ multiplicatio facit 15. i. 11 + 4.

Nosti autem ex ijs quæ dicta sunt cap. 4. ut huiusmodi numeri cossici habeant duas radices, maiorem uidelicet & minorem. Est autem radix minor de 15 ☉ — 44, quaternarius, sed illa radix respondet exemplo posito solummodo per numeros absurdos: scilicet positis 4 pro radice exempli, erunt duo reliqui numeri exempli — 4, & — 2, quorum minor. i. — 4. est minor quaternario per 8. & maior eorum, id est, — 2, est minor quaternario per 6. Multiplicati uero numeri illi absurdi inter se, faciunt 8: qui numerus (iuxta pronunciationem exempli) quaternario maior est radice illa exẽpli minore. Vides itaq; ut per numeros absurdos pulcherrimæ exemplorũ probationes fiant, ut non frustrà signantur.

Exemplum quartum huius capitis.

Et est Christ. 1. pro sua regula octaua positum.

QVæro numerum cuius quadratum mediet inter numerũ quinario maiorem, & numerũ alium binario minorem, ita ut extremi illi numeri inter se multiplicati producãt 2538.

Quantus est numerus iste?

Facit 1 ☉. Vnde extremi numeri illi, inter quos mediat quadratum numeri quem quæro, faciũt 1 ▢ + 5. & 1 ▢ — 5, qui multiplicati inter se, faciunt hoc productum 1 ▢▢ + 3 ▢ — 10. Et æquatur hoc productum huic numero 2538. Reductione autem facta, inuenies 1 ▢▢ æquatũ huic numero cossico 2548 — 3 ▢.

Ex eo igit extrahenda est radix zensizensica: scilicet 1 2ę æquatur √88.2548 — 33. ea radix facit 7. Sic igitur stat quadratum medians inter sua extrema, 47. 49, 54. Vide iam, an 54 multiplicata per 47, faciant 2538.

Exemplum capitis huius quintum.

QVæro numerum, à cuius zensizenso, subtracti quatuor zensi, relinquant 2205.

Numerus quem quæro facit 1 2ę. Eius autem zensizensus est 1 88. Ab eo subtracti 4 3, relinquunt 1 33 — 4 3. Cui relicto æquantur 2205. Reducta igit æquatione, seu transposita, æquabitur 1 33 huic numero cossico 4 3 + 2205. Facit igitur 1 33 eundem numerũ cossicum. Et radix quadrata ex eo (id est, 1 3) faciet 49. Vnde 1 2ę faciet 7.

Exemplum capitis huius sextum.

SVnt duo numeri, qui inter se multiplicati, faciunt 78: quadrata uero eorum addita seorsum, faciunt 205.

Quanti sunt duo numeri illi?

Obserua hic, quòd exemplum istud receperim iuxta figurã exempli propositionis quartæ, secundi libri Euclidis, quatenus solutionem facile inuenire possis, & exempla tu formare possis huiusmodi, quotquot libuerit, atq; ut plenius uideas naturam huiusmodi æquationum.

Satis autẽ nosti, ut huiusmodi figuræ sint quadratæ, continentq; intra se duo alia quadrata inæqualia sibiipsis, & duo quadrangula inter se æqualia, quorum utrunq; contineatur sub costis ambabus quadratorum partialium, ut necesse sit, quadrangulum tale altera parte longius esse, essecq; medium proportionale inter duo quadrata illa partialia inter se inæqualia (nam si fuerint æqualia, tũc necesse est duas reliquas portiones superficiei illius etiam esse quadratas, prioribusq; æquales) ut satis iam ex pronunciatione exempli possis accommodare rebus illis, numeros hos 78. 205. Nam si pro numero minore posueris 1 2ę, tunc scies pro quadrata eius ponendum esse 1 3. Et sic pro

secundo

secundo quadrato, seu pro quadrato secundi numeri exempli, pones 205 — 1 ⅛. At inter quadrata illa erit 78 mediũ proportionale, tanquam quadrangulum unum, altera parte longius, quod contineatur sub radicibus amborum quadratorum. Itaq; iam satis constat, ut 205 — 1 ⅛ multiplicatione per 1 ⅛ constituat numerũ æqualem huic numero, 6084. cuius radix est 78. Vnde 205 ⅛ — 1 ⅛⅛ æquantur 6084. Et per reductionem seu transpositionem, æquabitur 1 ⅛⅛. huic numero cossico 205 ⅛ — 6084. Vides aũt ut exemplum habeat duas radices. Primo uides hoc ex dispositione ipsa numerorum, uidelicet q̃ absolutus numerus stet à parte signi subtractorum. Secũdo uides hoc ex re ipsa numerorum, id est, ex superficie, cui accommodantur numeri illi. Potes enim intelligere 1 ⅛ esse attributum minori quadrato partiali, & 205 — 1 ⅛ attributa maiori quadrato partiali: uel intelligere 1 ⅛ esse attributũ maiori quadrato, & 205 — 1 ⅛ esse attributa minori. Sic enim scies uel maiorem radicẽ recipiendam esse, uel minorem. Minor radix facit 6. Vnde & minor zensus facit 36. Et maior radix facit 13. Vnde & maior zensus facit 169. Sic 6 multiplicata in 13, faciunt 78: & 36 addita ad 169, faciunt 205.

Alia eiusdem exempli operatio.

DVo quadrata partialia faciunt 205. Et duo quadrangula integrantia (cum quadratis partialibus) quadratũ totale faciunt ambo 156, id est, bis 78. Itaq; quadratũ totale facit 361. cuius radix quadrata facit 19.

Et sic exemplum uertitur in hanc pronunciationem.

Sunt duo numeri, qui additione sui ad se faciunt 19; multiplicatione aũt sua inter se faciunt 78.

Vel in hanc pronunciationem.

Sunt duo numeri, qui additione sui ad se faciunt 19; additione uero suorum quadratorũ faciunt 205.

De priore prius.

Facit numerus unus 1 2ẽ, & alius facit 19 — 1 2ẽ. Et sic mox

scio, ex ipsa re, q̃ exemplum habiturum sit duplicem radicem, eò quòd sub 1 2ę posita, possit intelligi duplex numerus, uidelicet uel maior numerus exẽpli, uel minor. Atq; ita etiam mox scio, qualem faciem habitura sit æquatio exempli reducta: scz 1 ½ æquabitur tali numero cossico, qui partem absolutã ponat à parte signi subtractorum. Sed uideamus operationem. Multiplicatio unius in alterum, facit 19 2ę — 1 ½. & huic producto æquantur 78. Vnde sic stat æquatio reducta, seu debite transposita, 1 ½ æquatus 19 2ę — 78. Facit radix maior 13, & radix minor facit 6.

De posteriore pronunciatione.

Vno numero faciẽte 1 2ę, faciet alter 19 — 1 2ę. Faciet igitur quadratũ unius numeri 1 ½, & quadratũ alterius numeri facit 361 + 1 ½ — 38 2ę. Et illa duo quadrata faciunt 205, ut habet pronunciatio. Itaq; 361 + 2 ½ — 38 2ę, æquantur 205. Et per reductionem æquabunt 2 ½, huic numero cossico 38 2ę — 156. Facta igitur diuisione per 2, uidebis 1 ½ æquari cum 19 2ę — 78. Facit radix maior 13, & radix minor 6.

Pulchre ista omnia ostenduntur figuris Geometricis. Sed poterit diligens Lector istas ostensiones seu demonstrationes, facile formare ex ijs quæ posui in parte præceptorum huius Algebræ.

Sequitur alia eiusdem exempli pronunciatio.

EST superficies quædam quadrangula altera parte longior, cuius ambo latera longitudine sua faciant 19, area autem superficiei illius facit 78.

Facit latus unum 1 2ę.

Et alterum latus facit 19 — 1 2ę.

Notum est autem, ut area diuisa per latus unum, producat latus alterum. Hinc fit, ut $19 \frac{78}{-1 2ę}$ æquent 1 2ę. Item $\frac{78}{19 - 1 2ę}$ æquentur 19 — 1 2ę. Quamcunq; aũt harum æquationum recipias, inuenies 1 ½ æquari huic numero cossico 19 2ę — 78. Faciet radix maior (ut prius) 13, & minor radix faciet 6.

Alia

Alia eiusdem exempli pronunciatio & operatio.

Diuide 283 in tres terminos continue proportionales, quorum medius faciat 78.

Primus terminus 1 ☉.
Secundus terminus 78.
Tertius 283 — 1 ☉ — 78.

Notum est aũt, ut ex multiplicatione extremorum inter se, proueniat productum æquale ei quod prouenit ex multiplicatione medij in se. Vnde 205 ☉ — 1 ♋, æquantur 6084. Et reducta æquatione siue debita particularũ transpositione, æquabit 1 ♋ huic numero cossico, 205 ☉ — 6084. Facit radix maior 169. & radix minor facit 36. Et sunt duo quadrati numeri, inter quos 78 mediat proportionaliter.

Sed hoc etiam uide. Numerus iste cossicus, 205 ☉ — 6084, quem uidisti uni zenso æquatum, duas radices quadratas habet, uidelicet 169 maiorẽ, & 36 minorem. Videamus, inquam, utrum hoc uere sit in numero hoc, an ita esse fingatur: quemadmodum in Arithmeticis aliqua fingi, non uno solo loco in superioribus ostendi. Recipiamus ergo primum radicem eius maiorem, i. 169. resoluamusq; ipsum numerũ cossicum in numerũ absolutum. Scilicet 1 ☉ faciente 169, facient 205 ☉ hunc numerum absolutum, 34645. Subtraho nunc 6084 de 34645, remanent 28561. Vide igitur utrum huius relicti radix quadrata faciat 169. Sic si 1 ☉ faciat 36, facient 205 ☉ hunc numerũ absolutum 7380: subtraho aũt ab eo priorem hunc numerũ 6084, (eò q; cossicus numerus sic steterit, 205 ☉ — 6084) remanetq; 1296. cuius radix quadrata est 36. Et in tota numerorum uniuersitate non inuenies alium numerum, cui ita respondeat cossicus numerus iste, 205 ☉ — 6084. &c.

¶ Ex istis poterit diligens Lector, non solum aliorum (ut Christo. &c.) exempla lecta intelligere, & quæstiones eorum soluere, sed etiam sibi propria quotq; libuerit formare. Nihilominus tamen plura posuissem, nisi ad statutũ tempus, quod instabat dum ista scriberem, reddendum mihi fuisset exemplar.

De exemplis regulæ Algebræ pertinentibus ad caput quintum libri huius tertij. Caput XI.

NOLVI hucusq; ullum ponere exemplum, quòd haberet numeros irrationales Cossicos, aut irrationales absolutos. Nunc uero locum nactus congruum, id est, respicientem caput præceptorum quintum, quod totum est de huiusmodi numeris, replebo totum caput præsens talibus exemplis, quæ usum habeant irrationalium numerorū cossicorum, & irrationalium absolutorum. Pertinere uero mihi uidentur huiusmodi exempla peculiariter ad Geometriam, ideo omnia huius capitis exempla erunt geometrica. Volo autem incipere ab exemplo ultimo superioris capitis.

Primum exemplum capitis huius.

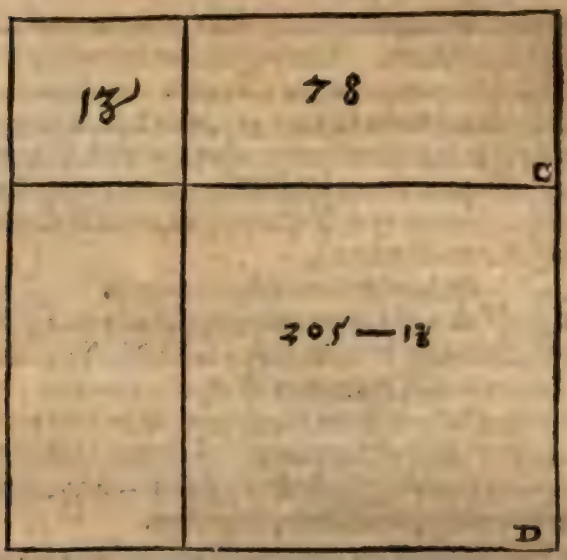
SVnt duo numeri, qui additione suorum quadratorū faciunt 105: ipsi uero inter se multiplicati faciunt 78.

Ex capite aūt quinto satis uidere potes, quos numeros appellem Cossicos irrationales. Scilicet cossicorum numerorum irrationaliū, quidam resoluunt̄ in absolutos rationales, ut sunt illi quibus utar in præsenti exemplo. Et quidam resoluuntur in absolutos numeros irrationales, ut sunt illi quibus utar in exemplo secundo.

Sic Cossicorum numerorum rationalium, quidam resoluuntur in absolutos numeros rationales: ut sunt illi quibus usus sum in exemplis superiorꝫ capitum libri huius. Et quidam resoluuntur in absolutos numeros irrationales; ut sunt illi, quibus utar in exemplo tertio.

Sequitur pictura exempli.

Satis



Satis clare uides ex hac figura, ut exemplum contraxerim. Volo autem inuenire quanta sit linea A B, & quanta sit C D. Cum autem quadratũ lineæ A B signatum sit hoc numero cossico 1 ☉, oportebit me 1 ♎ ponere pro linea A B. Et pro linea C D ponenda uenit √☉. 205 — 1 ☉. Ambæ igitur lineæ una summa faciunt hunc numerũ compositũ, 1 ♎ + √☉. 205 — 1 ☉. Iste numerus in se quadrate multiplicatus, faciet aream totius quadrati illius, quod duo partialia quadrata continet. Et cum ex ipsa figura uideas areã eius facere 361. scies isti numero æquandum esse productum multiplicationis quadratæ prædicti numeri compositi in se.

Sic aũt stat numerus ille ad multiplicationem quadratam.

1 ♎ + √☉. 205 — 1 ☉.
1 ♎ + √☉. 205 — 1 ☉.

Primo multiplico 1 ♎ in se, facit 1 ☉. Secundo multiplico √☉. 205 — 1 ☉. in se facit 205 — 1 ☉. Tollitur autẽ — 1 ☉ per + 1 ☉.

qui factus est ex multiplicatione. Nosti enim ut diuersa signa in additione subtrahant. Remanet igitur ex multiplicatione hactenus facta, numerus iste 205. Et quia tota summa multiplicationis æquatur numero huic 361, ideo aufero utrinq; 205. tunc ex parte summæ illius quæ producitur multiplicando, nihil remanet, nisi quod fiet ex multiplicatiõe in cruce. Ex altera autem parte remanent 156. & illa æquata erunt huic toti quod fit ex multiplicatione in cruce.

Sic autem multiplico in cruce.

1 2ę seu √⅓ 1⅓ (ut nosti) multiplico in √⅓. 205 — 1⅓. & fit √⅓. 205⅓ — 1⅓⅓. Secundo iterum uenit 1 2ę. id est, √⅓ 1⅓, multiplicanda in √⅓. 205 — 1⅓. & iterum fit √⅓. 205⅓ — 1⅓⅓.

Addo igitur duo producta illa, sicut nosti ex lege multiplicationis, seu (quod idem est) unum ex eis duplo. Multiplico igit̃ √⅓. 205⅓ — 1⅓⅓, per √⅓ 4. Et sic fit √⅓. 820⅓ — 4⅓⅓. Et hæc est reliqua summa multiplicationis propositæ.

Et hæc summa æquatur numero illi quem superius ostendi, uidelicet 156. Vides aũt ut æquatio reducenda sit ad quadrata: scilicet 820⅓ — 4⅓⅓ æquantur 24336. Et per transpositionem debitam particularum, 4⅓⅓ æquantur 820⅓ — 24336. Diuide ergo, tunc inuenies 1⅓⅓ æquari 205⅓ — 6084. Facit 1⅓. 36. Ideo 1 2ę facit 6. Et tanta est linea A B. Et sic linea C D facit 13.

Quamuis autem 205⅓ — 6084 duas radices habeat, tamen cõtractus ad figuram exempli, maiorem radicem, sub tali sua signatione, amittit. Potuissem autem maius quadratum partiale signare hoc numero cossico 1⅓: & minus quadratum signare potuissem hoc numero 205 — 1⅓. Et tunc certe maior radix recipienda esset, & nequaquam minor. Sic res ipsa indicat, quæ radix sit recipienda.

Alia eiusdem exempli operatio.

VEl sic poteris operari, cum uideas superficiem quadrangulam altera parte longiorem, signatam numero 78, continen-

neri sub lineis quæ sint æquales illis A B & C D. Multiplica 1 ☍, id est √☌ 1 ☌, in √☌. 205 — 1 ☌, tunc productum illud æquabitur 78. Scilicet √☌. 205 ☌ — 1 ☍☌, æquatur 78. Et reducta æquatione ad quadrata, æquabuntur 205 ☌ — 1 ☍☌ cum 6084, &c.

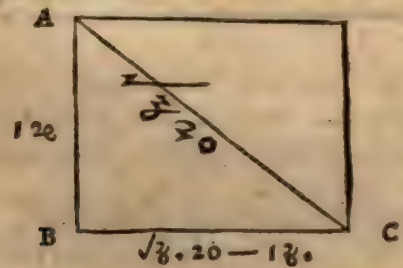
Vel cum A B faciat 1 ☍, & area totius quadrati continentis quadrata partialia, faciat 361, cuius radix est 19. Faciet C D, 19 — 1 ☍, cuius quadratū facit 361 + 1 ☌ — 38 ☍, quod æquatur 205 — 1 ☌. &c. Sed operatio hæc non pertinet ad caput hoc.

Vel multiplicatio A B, id est, 1 ☍, in C D. id est, in 19 — 1 ☍. faciens 19 ☍ — 1 ☌, æquabit 78, &c. Pertinet etiam ista operatio ad caput superius, cum non habeat numeros cossicos irrationales.

Exemplum secundum capitis huius.

EST superficies quadrangula rectangula, altera parte longior, cuius diameter sua longitudine facit √☌ 20, & area eius facit √☌ 96.

Quæstio est, quantum sit utrunq; latus.



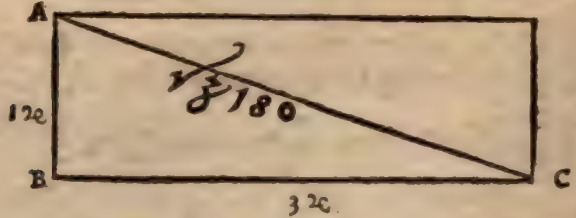
Quando pro A B línea minore pono 1 ☍, tunc pro B C pono √☌. 20 — 1 ☌. eò q̃ quadratū diagonalis A C, constitutum sit ad æqualitatem quadrati A B & quadrati B C, ut habet penultima

primi Euclidis. Cum igitur quadratū diagonalis lineæ faciat 20, & quadratum A B faciat 1 ⅞, sequitur quadratum B C facere 20 — 1 ⅞. & sic radix eius, id est, linea B C, faciet √⅞. 20 — 1⅞. ut dixi. Multiplico igitur A B in B C, ut proueniat area: scilicet 12 seu √⅞ 1⅞ in √⅞. 20 — 1 ⅞. facit √⅞. 20⅞ — 1⅞⅞. Itaq; producto illi æquatur √⅞96. Et per reductionem ad quadrata, æquantur 96 huic numero cossico 20⅞ — 1⅞⅞. Et per debitam particularum æquationem, æquatur 1⅞⅞ huic numero cossico 20⅞ — 96. Facit 1⅞, 8. Et 1 2 facit √⅞ 8. Ergo A B facit √⅞ 8, & B C facit √⅞ 12. Sic enim A C facit √⅞ 20, & area quadranguli √⅞96, ut satis patet.

Tertium exemplum capitis huius.

EST superficies quadrangula rectangula altera parte longior, cuius diagonalis facit √⅞180 sua longitudine, & est maius latus ad minus triplum.

Quantum facit area illius trianguli?



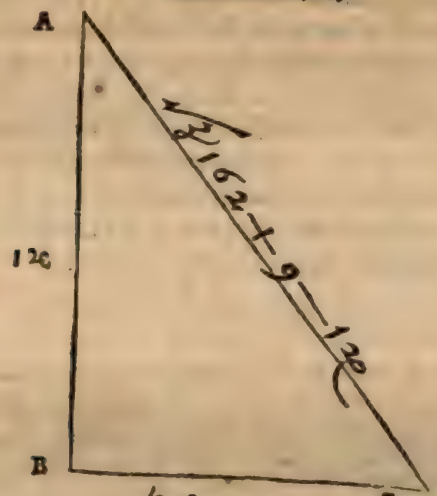
Satis notum est, uel ex superiori exemplo 10⅞ æquari quadrato lineæ diagonalis. Itaq; 1⅞ facit 18: & 1 2 facit √⅞18. Facit igitur B C sua longitudine √⅞162. Vnde sequitur aream facere 54.

Exemplum quartum capitis huius.
Et est Christo. 46. pro regula sua prima positum.

EST triangulus orthogonius, cuius basis facit sua longitudine √⅞18 + 3. & duo reliqua latera simul sumpta, faciūt sua longitudine √⅞162 + 9.

Quæstio.

Quæstio est, quantum reliquorum laterum unumquodq; seorsum faciat.



√☌18 + 3. Aequantur aũt, quadratum lineæ A B, & quadratũ lineæ B C, quadrato lineæ A C, ut notissimũ est, et sæpissime à me repetitũ. Itaq; 1☌ + 27 + √☌648 æquantur 1☌ + 243 + √☌52488 — 18☉ — √☌648☌. Et per reductionem, √☌648 æquat̃ 216 + √☌52488 — 18☉ — √☌648☌. Subtrahe deinde √☌648 de √☌52488 (cum sint commensurabiles) relinquitur √☌41472. Et est subtractio illa nihil aliud quàm reductio. Itaq; totum reliquum æquatur nihilo, id est,

216 + √☌41472 — 18☉ — √☌648☌ æquantur 0.

Itaq; 18☉ + √☌648☌ æquatur 216 + √☌41472. Diuide ergo per numerum maioris signi coßici, reliquum æquationis, tunc habebis quantum faciat cathetus.

Obseruabis autem hic, quod in ista particula √☌648☌, hoc signum ☌, quod positũ uides à parte dextra, reputatur pro signo isto ☉, propter signum hoc √☌, quod stat à parte sinistra. Nam si (exempli gratia) 6 sint multiplicanda per 1 ☉, tunc fiunt 6☉. Si aũt √☌6 sit multiplicandum per 1 ☉, tunc fit √☌6☌: & non fit

$\sqrt{\text{ж}}$ 6 2ę, ut Christophorus uoluit. Quando enim $\sqrt{\text{ж}}$ 6 multiplicatur per 1 2ę, tunc recipitur $\sqrt{\text{ж}}$ 1 ж pro 1 2ę. Ista moneo propter numeros, quos Lector meus in Christophoro fortassis uidebit, circa operationem huius exempli eius 46. ut sciat meos numeros correctius esse positos. Itaq; $\sqrt{\text{ж}}$ 648 ж + 18 2ę haberi debet pro uno numero radicum: non propter signum additorum, id quod Christophorus uidetur existimasse, sed ꝙ utraq; pars sit numerus radicum. Diuiditur autem 216 + $\sqrt{\text{ж}}$ 41472, per $\sqrt{\text{ж}}$ 648 + 18. facit diuisio $\sqrt{\text{ж}}$ 32 + 4. Et tantum facit linea A B. Itaq; latus A C facit $\sqrt{\text{ж}}$ 50 + 5.

Volo autem Lectorem hic iuuare in diuisione hac laboriosa. Primo multiplico diuisorem $\sqrt{\text{ж}}$ 648 + 18 per $\sqrt{\text{ж}}$ 648 — 18, facit 324 diuisorem nouum. Deinde multiplico etiam diuidendum 216 + $\sqrt{\text{ж}}$ 41472, per $\sqrt{\text{ж}}$ 648 — 18. facit nouum diuidendum hunc $\sqrt{\text{ж}}$ 3359232 + 1296. Diuide igitur priorem partem per $\sqrt{\text{ж}}$ 104976 (est enim 104976 quadratũ diuisoris noui) & partem posteriorem, uidelicet 1296, diuide per 324.

Exemplum quintum capitis huius.

EST quadrata superficies, faciens area sua numerum hunc, 675 + $\sqrt{\text{ж}}$ 405000.

Quæstio est, quantum faciat radix eius quadrata.

Hoc exemplum pono, ut discas, qua ratione inuenerim modum extrahendi radices quadratas de huiusmodi numeris. Nemo autem mihi succenseat, quasi me redarguat culpa, quam paulo superius reprehenderim. Aliud siquidem est necessitatis, aut commoditatis gratia aliquid struere, aliudq; aliquid ambitionis causa ostentare: cuius fontem, data opera, occultes.

Sic autem stat exemplum figuratum, ut sequitur.

Vides

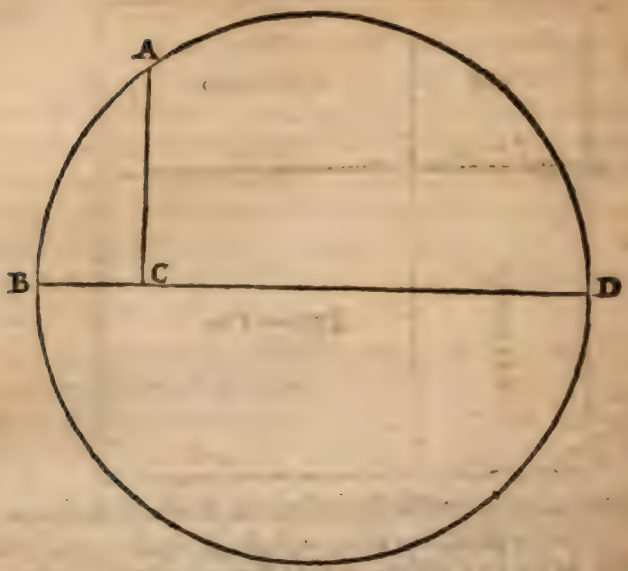
Vides ut posterior particula solūmodo diuisa sit in duo æqualia: scz √☼405000 diuiditur in √☼101260, & √☼101240. Deinde satis uides, ut ex 675 debeant fieri duo quadrata, inter quæ √☼101250 mediet proportionaliter. hoc est, numerus iste 675 diuidi debet in duas partes, quæ inter se multiplicatæ faciant 101250. Pono igitur pro minore parte 1 ☉, tunc maior pars faciet 675 — 1 ☉. Itaq; 675 ☉ — 1 ☼ (quod est productum ex 1 ☉ in 675 — 1 ☉) æquabit̄ 101250. Facit 1 ☉ (quæ est radix æquationis minor) 225. Itaq; maius quadratum faciet 450. Faciet igit̄ radix quadrata superficiei ppositæ, id est AC, 15 + √☼450. Proba multiplicatione radicis huius inuentæ in se, quæ facit 675 + √☼405000.

Exemplum sextum capitis huius.

EST circulus, cuius diameter facit 120, & orthogonalis quædam linea erecta à diametro ad circumferentiam, facit √☼. 2925 — √☼405000.

Quæstio est, de quantitate patium diametri sic diuisæ.

Sit



Sit igitur orthogonalis illa A C, tunc pro B C pono 1 2ℨ, & pro C D ponendus erit numerus cossicus iste 120 — 1 2ℨ. Cum aũt A C sit medium proportionale inter B C & C D, erit æquatio inter 120 2ℨ — 1ℨ & 2925 — √ℨ405000. Facit 1 2ℨ. 45 — √ℨ450. Et tantum facit B C. Ergo C D facit 75 + √ℨ450.

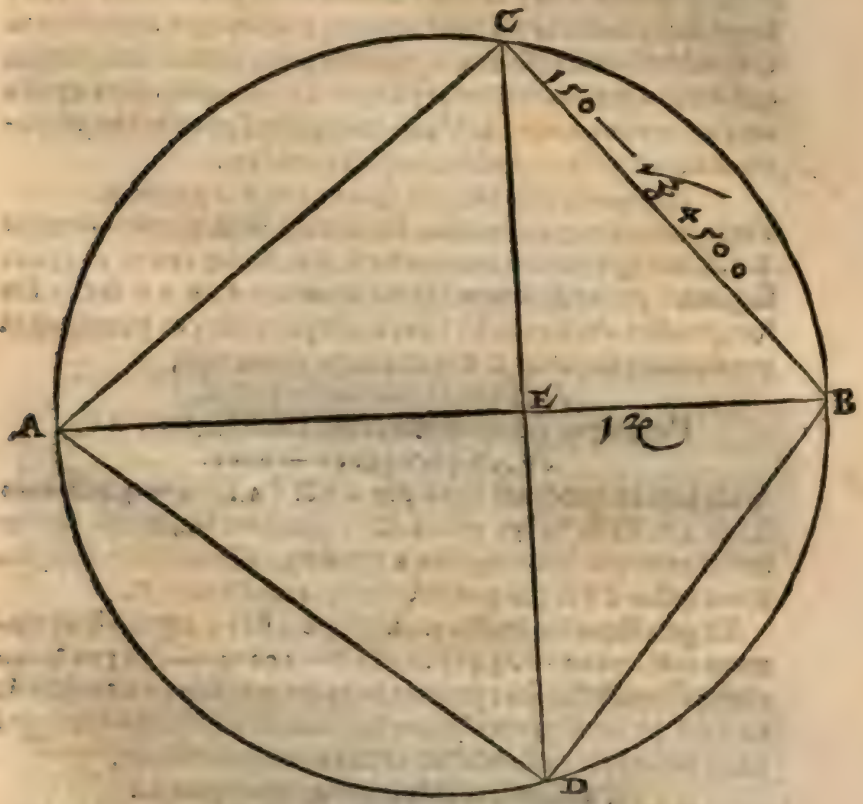
Deinde si trahantur A D & A B, scies per penultimam primi Euclidis, quantum illæ chordæ arcuum circuli faciant. Scilicet minor A B faciet hũc numerũ irrõnalem, √ℨ. 5400 — √ℨ6480000. Et chorda A D, √ℨ. 9000 + √ℨ6480000.

Exemplum septimum capitis huius.

EST circulus, cuius diameter diuiditur secundum proportionem habentem medium & duo extrema, eamq; diametrũ alia linea diuidit orthogonaliter, in pũcto diuisionis prædictæ, & arcus unus ex minoribus, interceptus à lineis illis, habet chordam, facientem longitudine sua hunc numerum irrationalem, 150 — √ℨ4500.

Quæstio

Quæstio est, quanta sit diameter circuli illius, & reliquæ lineæ figuræ illius quantæ sint.



Pono pro E B, 12: & quia A B est diuisa secundum proportionem habentē medium & duo extrema, necesse est C B eandem esse æqualem portioni maiori, prædictæ diuisionis. Itaq; A E etiam facit longitudine sua 150 — √84500. Et cum C E sit medium proportionale inter A E & E B, sequitur quòd C E faciat radicem quadratā producti, quod fit ex E B in A E. Scilicet C E

facit √ȝ. 150 ☍ — √ȝ 4500 ȝ. Item ex penultima primi Euclidis, facit √ȝ. 27000 — √ȝ 405000000 — 1 ȝ (Quadratum enim lineæ C B facit hanc aream, 27000 — √ȝ 405000000, &c.) Ergo duo producta illa sunt æquata, cum cadant super unam & eandem lineam illam C E, quadratumq; unius est æquatum quadrato alterius. Scilicet, 150 ☍ — √ȝ 4500 ȝ æquatur 27000 — √ȝ 405000000 — 1 ȝ. Vnde transpositis partibus æquationis debito modo, æquabitur 1 ȝ his partibus:

27000 — √ȝ 405000000 — 150 ☍ + √ȝ 4500 ȝ.

Facit 1 ☍. √ȝ 40500 — 150. Et tantum facit portio diametri E B. Cum igit portio eius maior. i. A E, faciat 150 — √ȝ 4500, sequitur (per additionem) quòd diameter tota A B faciat sua longitudine √ȝ 18000. Et (per multiplicationem portionis in portionem) sequitur C E facere hunc numerum,

√ȝ. √ȝ 1620000000 — 36000.

Postea per penultimam primi Euclidis, facit A C,

√ȝ. √ȝ 405000000 — 9000.

Vide iam an quadrata linearum C B & C A, faciant quadratum lineæ A B. Et sic habes quantitates omnium linearum, figuræ huius exempli. Est enim linea E D æqualis lineæ C E, ut duplatione ipsius C E facile ponas quantitatem lineæ C D.

Et quia superius in isto exemplo, uidisti 1 ȝ æquari huic numero toti, 27000 — √ȝ 405000000 — 150 ☍ + √ȝ 4500 ȝ, facile ex supradictis scire poteris, ut radix quadrata ex eo debeat extrahi. Et ne te particularum huiusmodi multitudo & magnitudo absterreat, uolo tibi hic radicem eius extrahere.

Sic autem stat ille numerus quadratus ad extractionis modum positus.

27000 — √ȝ 405000000 | — 75 + √ȝ 1125.

Et (ut rem breuissimis dicã) sicut operareris, si radix extrahenda occurreret tibi ex isto numero cossico, 27000 — 150 ☍, sic operare etiam hic. Nam sicut primo poneres loco — 150 ☍ hoc dimidium eius 75, reiecto uidelicet signo cossico, ut exemplum

plum sic staret 27000–75. Sic loco huius — 150 2ℰ + √ 4500 ℰ pone hoc — 75 + √ 1125: est enim dimidium numeri radicū. Et superius circa exemplum quartū capitis huius, satis ostendi ut huiusmodi numeri, √ 4500 ℰ, sint numeri radicum, & nequaquam sint numeri censorum. Scilicet (ut repetam) √ 4500 ℰ, est radix quadrata ex 4500 censis &c.

Secundo, sicut (posito hoc exemplo, 27000 — 75, ut dixi) multiplicares dimidium numeri radicum 3 in se, productumq; adderes priori parti (ut in superioribus sufficientissime docui) scilicet — 75 in se, facit 5625, quod ad 27000 additum, facit 32625: sic etiam multiplico — 75 + √ 1125 in se, facitq; 6750 — √ 25312500, quod addo ad 27000 — √ 405000000, & fit 33750 — √ 63281250 0.

Tertio sequitur, ut extraham radicem quadratam ex aggregato facto (huiusmodi extractionem docui lib. 2. suo loco). Facit autem radix quadrata √ 28125 — 75. Et ab hac radice subtraho (propter signum subtractorum, quod ponebatur à parte dimidij numeri radicum) 75 + √ 1125, id est, dimidium numeri radicum, tunc remanet √ 40500 — 150. Et tantum facit 1 2ℰ posita pro linea figuræ dati exempli E B.

Alia operatio exempli.

QVia maior portio diuisæ diametri facit 150 — √ 4500, pono (ut prius) 1 2ℰ pro minore portione, tunc tota linea A B faciet 150 — √ 4500 + 1 2ℰ. Et sic quadrato maioris extremi, uidelicet 27000 — √ 405000000, æquatur quod fit ex multiplicatione 1 2ℰ, in totam lineam. Fit autem,

150 2ℰ — √ 4500 ℰ + 1 ℰ.

Et sic iterum æquatur 1 ℰ, toti huic cossico numero,

27000 — √ 405000000 — 150 2ℰ + √ 4500 ℰ.

Alia operatio.

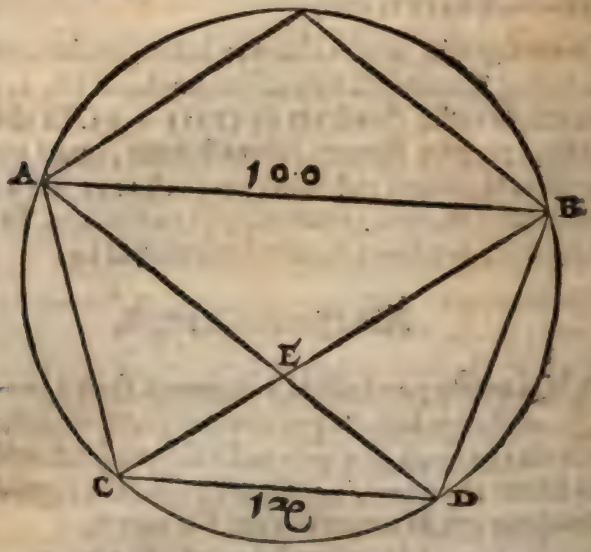
PRo tota linea A B pone 1 ☍, tunc pro portione minore, id est, pro E B, ponesi 1 ☍ — 150 + √ 4500. Atq; ita multiplicatio 1 ☍ in 1 ☍ — 150 + √ 4500 (quæ est multiplicatio extremorum) producit æquale medio proportionali in se multiplicato, videlicet 27000 — √ 405 000000. Et sic iterū æquabitur 1 ▢ huic connexo,

27000 — √ 405000000 — 150 ☍ + √ 4500 ▢.

Exemplum capitis huius octauum.

EST pentagonus æquilaterus, cuius linea subtensa uni angulorum eius, facit 100.

Quantum est latus pentagoni?



Notum est ex primo Almage. Ptolem. cap. 9. ut A D ducta in B C, faciat quantum facit A B in C D, cum eo quod fit ex A C in B D. Simile est in quolibet quadrilatero inscripto circulo. Pono igitur pro latere pentagoni uno, 1 ☍, tunc A C in B D facit

1 ▢

1ȝ, & CD in AB facit 100 2ę. Et AD in CB facit 10000, sunt enim AB & AD & BC inter se æquales. Itaq; 1ȝ + 100 2ę æquantur 10000. Facit 12ę. √ȝ12500 — 50. Et tantum facit latus unum pentagoni.

Proba per conuersionem.

Si latus pentagoni æquilateri faciat √ȝ12500 — 50. Quantum faciet linea subtendens angulum pentagoni illius unum?

Facit AB, 1 2ę. Et sic AD in BC faciet 1ȝ: & huic æquabitur quod fit ex CD in AB. i. √ȝ12500ȝ — 50 2ę. cum quadrato unius laterum, id est, AC in BD, quod facit 15000 — √ȝ125000000. Quærenda est igitur ragix quadrata ex

√ȝ12500ȝ — 50 2ę. + . 15000 — √ȝ125000000.

Volo etiam hoc loco Lectori meo seruire, & hanc radicem quadratam extrahere. Sic autem stat exemplum.

√ȝ3125 — 25. + . 15000 — √ȝ125000000.

Multiplico igitur √ȝ3125 — 25 in se (ut satis docui) facit multiplicatio hæc hunc sequentẽ numerũ, 3750 — √ȝ78125 00. Et huic addo 15000 — √ȝ125000000, fiunt 18750 — √ȝ1953125 00. Ex hoc aggregato extraho radicẽ quadratã, facit 125 — √ȝ3125. Et huic iam addo dimidium numerum radicum, uidelicet √ȝ3125 — 25. fiunt 100. Et tantũ facit AB, id est, linea subtendens angulum in pentagono proposito.

Alia eiusdem exempli octaui operatio.

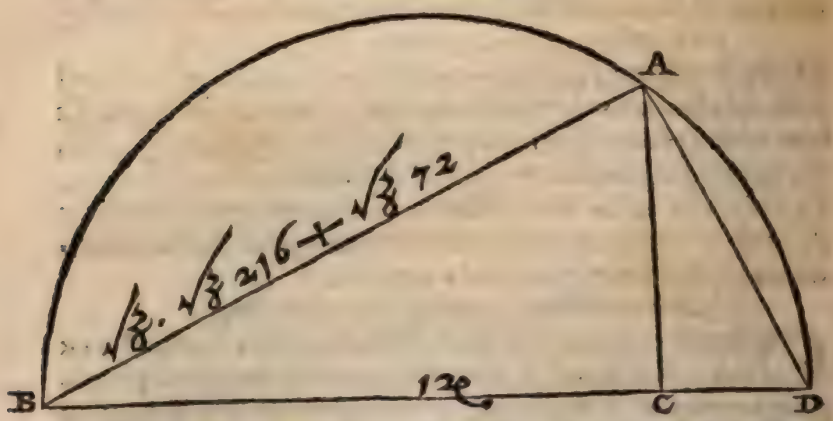
OStendi capite ultimo secundi libri, ut linea composita ex latere pentagoni & linea subtendente angulum pentagoni æquilateri, sit diuisa secundum proportionem habentem medium & duo extrema, in puncto cõpositionis earum. Hinc fit, ut 100 sit medium proportionale inter 1 2ę (quam pono pro latere pentagoni) & 100 + 1 2ę (quem numerum pono pro linea composita ex latere pentagoni, & linea subtendente angulum pentagoni) fitq; per multiplicationem 1 2ę in 100 + 12ę. ut 100 2ę + 1ȝ æquentẽ 10000 (. i. quadrato medij, pportionalis) & per reductionem 1ȝ æquẽt 10000 — 100 2ę. Et sic 12ę facit √ȝ12500 — 50.

Vel pone 1 2ℓ pro tota linea composita ex latere pentagoni & linea subtendente unum angulorum pentagoni, tunc pro latere pentagoni pones 1 2ℓ —— 100, atque ita 1 ℨ æquabitur 100 2ℓ + 10000. Facit, 1 2ℓ. √ℨ 12500 + 50. &c.

Exemplum capitis huius nonum.

EST triangulus orthogonius, cuius duo latera angulum rectum facientia sumpta sunt de pentagono, factumq; ex latere pentagoni, latus trianguli minimũ, & de linea angulum pentagoni subtẽdente, latus orthogonij illius medium, & illud facit √ℨ. √ℨ 216 + √ℨ 72. erigitur autem linea orthogonalis â latere maximo eiusdem orthogonij ad angulum eius rectum.

Quæstio est de quantitate aliarum linearum huiusmodi figuræ.



Habes libro secundo, capite ultimo, de propositione Euclidis, asserentis latus pentagoni esse lineam, quæ dicitur minor: ubi linea subtendens angulum pentagoni illius fuerit linea dicta maior. Quod cum ita sit, necesse est ut linea A D faciat sua longitudine √ℨ. √ℨ 216 — √ℨ 72. cum A B fecerit √ℨ. √ℨ 216 + √ℨ 72. Et sic faciet linea B D, √ℨℨ 864. Et quæstio manet, quantũ faciat B C & C D & A C.

Pono

Pono igitur pro linea B C, 1 2ę, tunc ponetur pro C D, $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 864 — 1 2ę. Multiplico igitur 1 2ę in $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 864 — 1 2ę, facit $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 864 ȝȝ — 1 ȝ. quæ est quantitas quadrati A C medij proportionalis inter B C & C D. Quadratum autem lineæ A B (id est, $\sqrt{\text{ȝ}}$ 216 + $\sqrt{\text{ȝ}}$ 72) minus quadrato lineæ B C (quod facit 1 ȝ) facit quadratum lineæ A C, per penultimam primi Euclidis. Ergo æquatio erit inter $\sqrt{\text{ȝ}}$ 216 + $\sqrt{\text{ȝ}}$ 72 — 1 ȝ, & hunc numerum cossicum $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 864 ȝȝ — 1 ȝ. Tollit autem 1 ȝ alterum 1 ȝ. Et sic manet æquatio inter $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 864 ȝȝ, & hūc numerū $\sqrt{\text{ȝ}}$ 216 + $\sqrt{\text{ȝ}}$ 72: quem, iuxta regulam, diuido per numerum radicum (neq; enim $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 864 ȝȝ aliud est quàm numerus radicum, ut scire potes ex ijs quæ dixi circa exemplum quartum capitis huius) & dum diuido $\sqrt{\text{ȝ}}$ 216 per $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 864, tunc prius reduco $\sqrt{\text{ȝ}}$ 216 (ut nosti ex Algorithmo) ut etiam stet sub hoc signo, $\sqrt{\text{ȝȝ}}$. Scilicet $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 46656 + $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 5184 diuido per $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 864, tunc resoluitur 1 2ę, quæ facit $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 54 + $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 6. Ergo linea C D, facit $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 54 — $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 6. Multiplicata autem B C in C D, producitur quadratum lineæ A C. Vnde linea A C faciet $\sqrt{\text{ȝȝ}}$ 24.

Exemplum capitis huius decimum.

SIgnato pentagono (ut in exēplo capitis huius octauo signatus est) quæritur quantum faciat lineola E D.

Vides autem in figura suprapositā folio 286, ut C D (cui æqualis est A E) signata sit 1 2ę: & A B (cui æqualis est A D) signata fit numero hoc 100. Est autem A D diuisa in puncto E, secundum proportionem habentem medium & duo extrema. Igitur A E (faciens 1 2ę) est medium proportionale inter A D, (facientem 100) & E D, facientem 100 — 1 2ę. Aequabitur ergo 1 ȝ huic numero cossico, 10000 — 100 2ę. Facit 1 2ę, ut superius, id est, $\sqrt{\text{ȝ}}$ 12500 — 50. quam uidisti superius facere C D seu A E.

Eam igitur subtrahe de A B seu de A D, tunc remanet

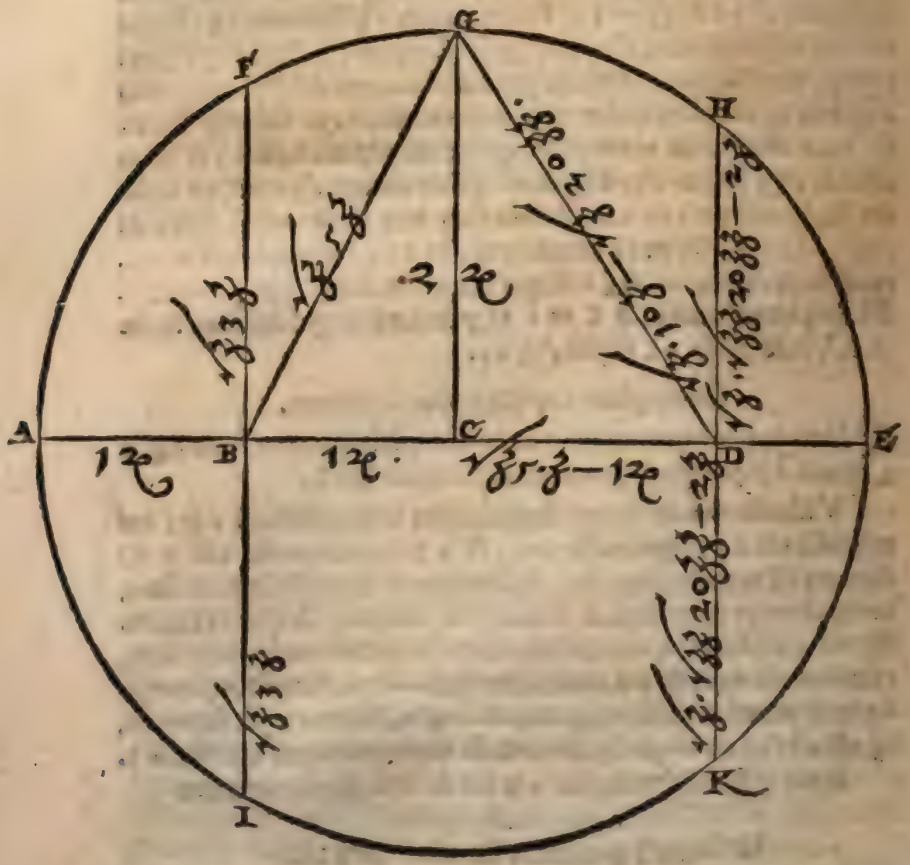
150 — $\sqrt{\text{ȝ}}$ 12500.

Et hæc est quantitas lineæ E D, seu E C.

Sequitur

Sequitur pulchra industria inueniendi quantitates linearum.

VOLO autem tibi, mi Lector, ut nihil (sciens) abscondam, exempla instrumentalia ostendere, quibus uti possis pro inuentione linearum quantum placuerit, atq; ad exemplar eorum formare infinita alia.



Videamus

Videamus primo de formatione exemplorum huiusmodi, antequam usum eorum ostendam.

Sic autem facio.

Primo recipio diametrum circuli pro fundamento huius structuræ, & diuido eam in quatuor partes inter se æquales, & cuilibet parti assigno (uel assignatã subintelligo) 1 2ę. ut uides A B signatam, item B C. Et sic tota diameter facit mihi 4 2ę. Sic C G facit 2 2ę, cum sit semidiameter circuli. Sic facile ex B C & G C signabis lineam B G. Nam cum quadratum G C faciat 4 ⅔, & quadratum B C faciat 1 ⅔, satis nosti ut quadratum B G illis æquetur, faciatq; 5 ⅔, ut linea ipsa B G recte sic signetur √⅔ 5 ⅔. Sic B F recipit √⅔ 3 ⅔. cum C F trahẽda sit semidiameter circuli, cuius quadratum, minus quadrato B C, faciat 3 ⅔: atque ita, ea subtractione facta, æquetur relictum tale, quadrato lineæ B F. Sic ex 9 capite primi Almagesti facile colligitur, ut linea B C subtracta à linea B G, relinquat latus decagoni eidem circulo inscribendi, quod est C D. Ideo recte sic signatur √⅔ 5 ⅔ — 1 2ę. Et quia quadratum D G componitur ex quadrato C G & C D (facit autem quadratum C G, 4 ⅔: & quadratum C D, facit 6 ⅔ — √⅔ 20 ⅔) ideo linea D G recte sic signabit, √⅔. 10 ⅔ — √⅔ 20 ⅔. Et cum trahenda C H sit semidiameter, cuius quadratum facit 4 ⅔, à quo subtractum quadratum C D (id est, 6 ⅔ + √⅔ 20 ⅔) relinquit quadratũ D H. recte signatur D H sic √⅔. √⅔ 20 ⅔ — 2 ⅔. Et quia A E diametet sua longitudine facit 4 2ę, A B autẽ facit 1 2ę, sequitur B E facere 3 2ę, cum A B linea sit subtracta. Deinde si de B E subtrahas B D, facientem sua longitudine √⅔ 5 ⅔, sitq; æqualis lineæ B G, satis clare uides D E signandam sic 3 2ę — √⅔ 5 ⅔. Et sic facili & iucundissima ratiocinatione poteris tibi formare talium exemplorum instrumentaliũ copiosum thesaurum &c.

Videamus nunc usum eorũ: neq; enim talia frustrà nomino exempla instrumentalia.

Si (exempli gratia) profitereris publice Euclidis tertiumdecimum aut quartumdecimum, ubi fere ubiq; incidit usus

tetragonorum, pentagonorū, decagonorum &c. iſopleurorū, & uelles uaria (ut decet) exempla proponere in rebus talibus, alioqui non faciliter inuentendis, tunc poſſes tibi huiuſmodi exempla pro neceſſitate tali conſtruere, atque uti eis. Scilicet, dandi ſint tibi tres circuli cum inſcriptione ſuorum pentagonorum, atq; decagonorum: quorum circulorum primus ſua diametro faciat 120, ſecundi diameter faciat 36, tertij faciat 48, uelisq; ſingulorum circulorum pentagonos faciliter & repente reperire per exemplū inſtrumentale, quod dedi. Recipe primo (ſi placet) maximum illorum. Et quia 12ℓ (tanquam pars diametri quarta) facit 30. pentagoni autem latus ſic ſignatum habes, √ʒ. 10ʒ — √ʒ 20ʒʒ (hæc eſt linea D G figuræ poſitæ) & cum 12ℓ faciat 30, facit 1ʒ. 900, & 1ce. 27000, & 1ʒʒ. 810000. Recipio igitur 10ʒ, id eſt 9000. Deinde recipio 20ʒʒ. i. 16200000, quibus præpono (ſicut mihi pictura lineæ omnia ad manus tradit) √ʒ. facit √ʒ 16200000. cui præpono 9000, interpoſito ſigno ſubtractoꝛ. Vnde ſic ſtabit hoc ꝺd inueni, 9000 — √ʒ 16200000. Et huic præpono (ut pictura lineæ etiã indicat) hoc ſignū √ʒ. interpoſito puncto. Sic igitur facili negocio inueni latus pentagoni, circulo inſcribendi (cuius diameter faciat 120) facere √ʒ. 9000 — √ʒ 16200000.

Sequitur circulus, cuius diameter facit 36.

Præſcribo mihi igitur hanc progreſſionem, cum 12ℓ faciat 9. tanquam pars quarta circuli.

0.	2ℓ.	ʒ.	ce.	ʒʒ.
1	9.	81.	729.	6561.

Vnde iterum inſpicio picturam lineæ D G. √ʒ. 10ʒ — √ʒ 20ʒʒ. Et recipio primo 10ʒ, id eſt 810. Deinde recipio 20ʒʒ, id eſt, 131220. cui p̄pono ſignū √ʒ, ut docet me pictura, fit √ʒ 131220. cui præpono 10 zenſos priores, i. 810. interpoſito ſigno —, ut ſic ſtet 810 — √ʒ 131220. Et ſic præpono huic toti, ſignum √ʒ. interpoſito puncto, tunc inueni latus pentagoni circulo inſcribendi, cuius diameter facit 36, facere hunc numerum,

√ʒ. 810 — √ʒ 131220. Sequit:

Sequitur tertius circulus, cuius diameter facit 48.

Cum igitur pars quarta diametri, tanquam 12, faciat 12, sic stabit inuentionis huius progressio.

0. 2ᵖ. 2ᵖ2. 2ᵖ3. 2ᵖ4.
1. 12. 144. 1728. 20736.

Præscribo igitur mihi (uolenti habere latus pentagoni inscribendi circulo, cuius diameter faciat 48) lineam D G, id est, √2.10 2 — √2 20 2ᵖ4. Vnde primo recipio 10 2. i. 1440. Deinde 20 2ᵖ4. hoc est, 414720. Et sic mox habeo latus pentagoni hoc,

√2. 1440 — √2 414720.

Et sic hæc eadem pictura, √2.10 2 — √2 20 2ᵖ4, æquatur infinitis pentagonorum æquilaterorum lateribus.

Sed & alium usum uide.

Proponitur mihi iste numerus, √2.90 — √2 1620, & petitur à me, ut ostendam numerum diametri circuli circumscribendi pentagono, cuius latus pentagonicum habeat numerum prædictum. Hic ego mox præsentem habeo æquationē ex figura mea instrumentali, & absq; hæsitatione aliqua dico,

√2.10 2 — √2 20 2ᵖ4, æquari √2.90 — √2 1620.

Item quadratum noui quadrato æquari, ut

10 2 — √2 20 2ᵖ4, huic 90 — √2 1620.

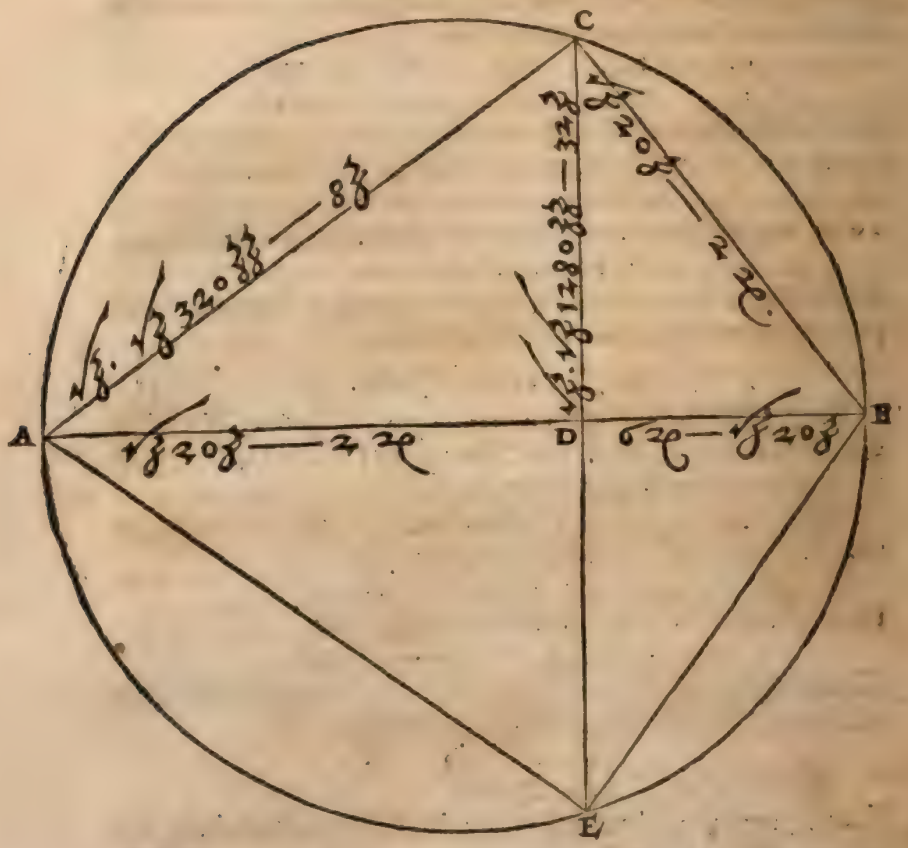
Diuido igitur 90 — √2 1620, per 10 — √2 20 (qui est numerus zensorum) & facilis est diuisio: sic enim stat.

90 — √2 1800 (9.
10 — √2 0

Facit igitur 1 2. 9. Vnde 1 2ᵖ facit 3. & est quarta pars diametri. Vnde quater 3 faciunt 12, inuentam diametrum.

Longum nimis esset, iam eodem modo dicere de alijs lineis, quo de linea figuræ positæ instrumentali, D L, dixi. Tu autem reliquas, tua diligentia exequere, &c.

Secunda figura instrumentalis.



Hæc est figura septimi exempli, repræsentans quamlibet lineam diuidendam secundum proportionē habentem medium & duo extrema. Quamcunq; enim lineam rectam proponas diuidendam, modo prædicto, tunc æquabuntur ei figurationes lineæ A B, & operor quemadmodum circa figuram superiorem copiose:

copiosè de hac re docui. Vt sit linea, faciens 100, diuidenda secundum proportionem habentem medium & duo extrema, tunc recipio hanc progressionem sequentem, eò quòd 25 sit quarta pars de 100.

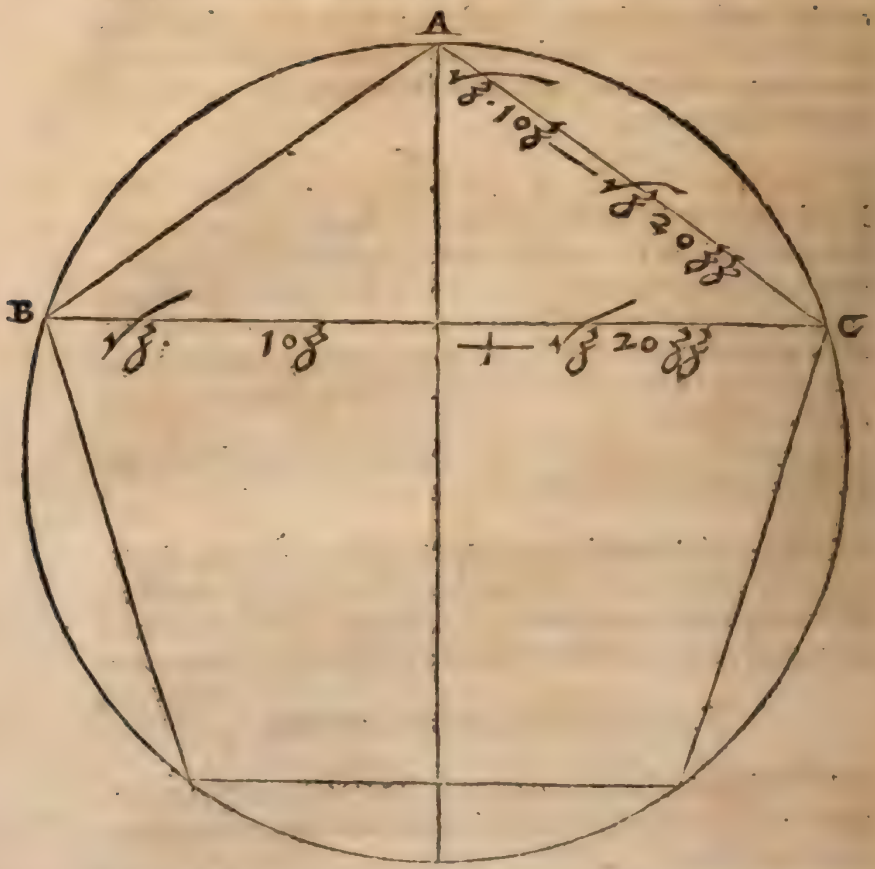
0. 2ℚ. ☇. cℚ. ☇☇.
1. 25. 625. 15625. 390625.

Præscríboq; mihi numerum lineæ A D hunc, $\sqrt{☇}$ 20☇ — 2 2ℚ. Itaq; recipio 20☇ 12500, cui præpono signũ $\sqrt{☇}$. facit $\sqrt{☇}$ 12500. duæ autem radices faciunt 50. Sic igitur inueni portionem maiorẽ diuisionis meæ esse $\sqrt{☇}$ 12500 — 50. Deinde præscríbo mihi alteram partem diuisionis huius, iuxta numerum lineæ D B, hunc uidelicet, 6 2ℚ — $\sqrt{☇}$ 20☇. Faciunt autem 6 2ℚ. 150. à quibus subtraho $\sqrt{☇}$ 20☇. 20☇ faciunt 12500.
Itaq; 150 — $\sqrt{☇}$ 12500, erit portio diuisionis minor. Hæ autem portiones duæ additæ ad se, faciunt 100.

Hoc exemplum instrumentale ideo posui, quòd uix sit aliqua propositio in toto tertiodecimo Euclidis & quartodecimo etiam, quæ expressis uerbis, non requirat diuisionem lineæ secundum proportionem habentem medium & duo extrema.

Sequitur tertia figura instrumentalis.

EST & huius lineæ B C (quæ in sequenti figura patet) frequens mentio in libris Euclidis memoratis: ideo eam hoc loco ponere uolui.



Sed sufficiunt ista quæ superius dixi, ut alia similia diligens Lector ex ijs possit inuenire.

De

De exemplis regulæ Algebræ pertinentibus ad caput sextum præceptorum.

Caput XII.

INcredibile est, quàm late uagetur secundarum radicum usus, quarum exempla, ordo & ratio dicendorum, nunc requirit. Sunt autem exempla huiusmodi, ordine præceptorum, ultima. Ea uero quæ circa illa exẽpla sunt dicenda, optime doceri possunt sub ipsa exemplorum tractatione.

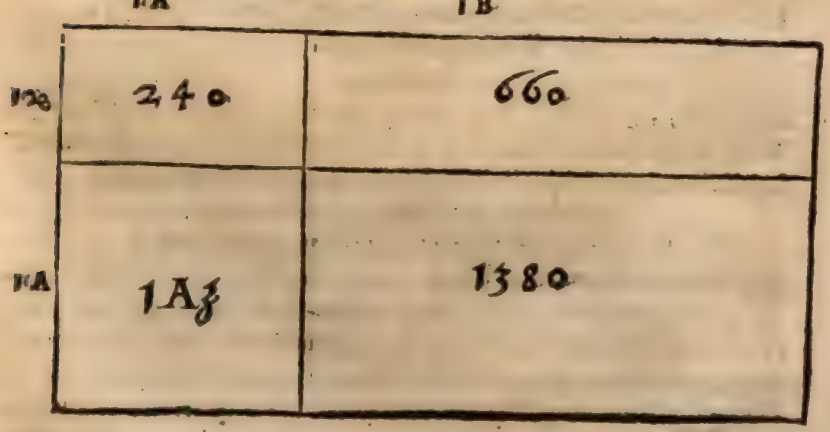
Primum exemplum capitis huius.

SVnt tres lineæ: quarum prima & secunda continent superficiem quadrangulam rectangulam, area sua 240 facientẽ. Et eadem prima, & tertia, continent quadrangulum rectangulum area sua 660 faciens. Secunda uero & tertia continẽt quadrangulum rectangulum, faciens area sua 1380.

Quantum facit harum linearum unaquæq;

Prima facit 12. Secunda facit 1A. Tertia facit 1B.

Figura exempli huius.



Notum

Notum est autem, ut superficie quadrangula rectangula, diuisa, per duas lineas, sese intersecantes ad angulos rectos, faciat quatuor partes illius diuisionis, q̃ ad inuicē sint ꝓportionales. Facit autem superficies quadrata (quam uides contineri sub secunda) 1 A ☵. Dic ergo nunc, 240 dant 660, quantum dat 1 A ☵. Facit 1380. Multiplico igitur 240 in 1380. Et 660 multiplico in 1 A ☵, facit productum illud 660 A ☵. Et sic æquantur 660 A ☵ cum 331200. Facit igitur 1 A ☵. 501 $\frac{9}{11}$. Cuius radix quadrata facit $\sqrt{☵}$ 501 $\frac{9}{11}$. Et tantum facit 1 A, id est, linea secunda.

Multiplico iam (pro inuentione primæ lineæ facientis 1 2ę) secundam lineam, quæ iam inuenta est, per primam. i. $\sqrt{☵}$ 501 $\frac{9}{11}$ multiplico per 1 2ę, seu per $\sqrt{☵}$ 1 ☵, facit $\sqrt{☵}$ 501 $\frac{9}{11}$ ☵. & æquantur ei 240 (uides enim satis ex figura, ut 1 2ę in 1 A, faciat 240). Diuide igitur 240, per $\sqrt{☵}$ 501 $\frac{9}{11}$, tunc inuenies 1 2ę facere $\sqrt{☵}$ 114 $\frac{18}{23}$. & hæc est quantitas primæ lineæ.

Deinde uides superficiem 660, contineri sub prima & tertia (sicut superficiem 1380 sub secunda & tertia contineri uides). Multiplico igitur eas lineas inter se, id est, $\sqrt{☵}$ 114 $\frac{18}{23}$ multiplico in 1 B; facit $\sqrt{☵}$ 114 $\frac{18}{23}$ B ☵ æquatam 660. Diuido igitur 660 (.i. $\sqrt{☵}$ 435600) per $\sqrt{☵}$ 114 $\frac{18}{23}$ (tanquam per numerum radicum) tunc inuenio 1 B (id est, lineam tertiam) facere $\sqrt{☵}$ 3795.

Probatio exempli

prima,	secunda,	tertia.
$\sqrt{☵}$ $^{2}\frac{640}{23}$	$\sqrt{☵}$ $^{5}\frac{520}{11}$	$\sqrt{☵}$ $^{3795}\frac{}{1}$

Vide an prima in secundam faciat 240, seu $\sqrt{☵}$ 57600. Et prima in tertiam faciat 660. Et secunda in tertiam faciat 1380.

Exemplum secundum capitis huius.

Et est Christophori, sub mutata tamen pronunciatione.

EST chorda extenta supra monochordum, inæqualiter diuisa per ponticulum, ita ut partes chordæ illius sic diuisæ, reddant ad inuicem musicum quoddam interuallū. Moueatur autem postea ponticulus (diuidens chordam illam) uersus portionem minorem: eaq; motione abscindat partem quartam minoris

minoris portionis, atq; maior portio sic adaucta, reddat diapason cum diapente, ad portionem minorem. Moueatur uero ponticulus iterum, uersus portionẽ maiorem, ita ut abscindat partem tertiam de audaucta portione priori, & tũc reddat altera portionum ad alteram unisonum.

Quæstio est, quod fuerit iuuellum illud musicum, quod portiones ad inuicem reddebant antequàm primo ponticulus moueretur.

Hoc exemplum est Christophori 37, pro prima sua regula positum. Quod ideo repeto, ut ex collatione meæ pronunciationis, cum ea pronũciatione quam Christophorus ponit, discas huius formæ exempla ponere quantum libuerit.

Facit portio maior chordæ 1 2ℓ.
Facit portio minor chordæ 1 A.

Quia uero ex prima motione ponticuli abscinditur pars quarta de minore portione, quæ accedit ad maiorem portionem, ideo transfero $\frac{1}{4}$ A de 1 A ad 1 2ℓ, & sic faciet portio maior $\frac{4\,2ℓ+1\,A}{4}$. Portio uero minor retinet solũmodo $\frac{3}{4}$ A. Et sic maior portio ad minorẽ, resonat diapason cum diapente. i. facit proportionem triplam. Triplabis igitur $\frac{3}{4}$ A, tunc habebis æquationem, qua uel radices primas possis resoluere in secundas, uel secundas in primas. Solemus autem nos resoluere secundas in primas, nisi commoditas aliud iudicet. Cum igitur sit æquatio inter $\frac{4\,2ℓ+1\,A}{4}$ & $\frac{2}{4}$ A, & denominatores sint æquales inter se, ideo erunt etiam numeratores inter se æquati. Ideoq; reijcio denominatores, & reseruo æquationem inter nominatores. Qua reducta ad simplicia, habebis æquationẽ inter 4 2ℓ & 8 A. Vnde 1 A facit $\frac{1}{2}$ 2ℓ. Ergo 1 2ℓ facit 2 A. Et sic est proportio dupla 1 2ℓ ad 1 A, & est inuentum, q̃ portio maior diapason resonauerit supra minorem portionem, antequam ponticulus moueretur primo. Sed probemus.

Ponamus portionem maiorem facere 24, & minorem 12, & sic fit diapason. Dum autem transfero partem quartam duo-

denarij ad 24, tunc maior portio faciet 27, & ex altera parte remanent 9. Erit igitur tunc inter portiones, diapason cum diapente: cum ꝓportio iam sit tripla inter portiones, sub qua proportione consistit diapason cum diapente. Postea transfero (iuxta exempli pronunciationem) partem tertiam de maiore portione ad minorem, id est, transfero 9 de 27 ad 9. tunc utrobiq; fiunt 18. Est ergo unisonus factus per secundam ponticuli motionem.

Exemplum tertium capitis huius, sumptum iuxta cap. 12 primi libri Almag. Ptolemæi.

SInt duæ lineæ descendentes ab angulo aliquo, quarum longior faciat 3900. & minor earū faciat 3380. Reflectaturq; altera in alteram, faciatq; reflexa maioris 3360, & reflexa minoris faciat 2912. Diuidatq; reflexa maioris, descendentem minorē sic, ut superior portio descēdentis minoris faciat 1980, & inferior portio faciat 1400. Et reflexa minoris descendentiū diuidat descendentem maiorem sic, ut superior portio illius descendentis faciat 1716, & inferior portio faciat 2184.

Quæstio est de partibus reflexarum, quæ fiunt ex intersectione earum, quanta unaquæq; earum sit.

Propositionem operationis huius (quæ perspicue patet in sequenti figura) ponit Ioannes de monte regio ex Ptolemæo: quam ego mihi sic formaui.

℣ Si proportio quam facit una descendentium, sua portione inferiore, ad suam portionem superiorem, subtrahatur à proportione, quam eiusdem descēdentis reflexa facit, sua parte inferiore, ad partem suam superiorem, relinquit proportionem, quam facit reliqua descendens integra, ad portionem suam inferiorem.

Iuxta hanc propositonem sic stabit æquatio una.

$$\frac{3380.}{1400.} \qquad \frac{5765760 - 1716 \text{ q}}{2184 \text{ q}}$$

In

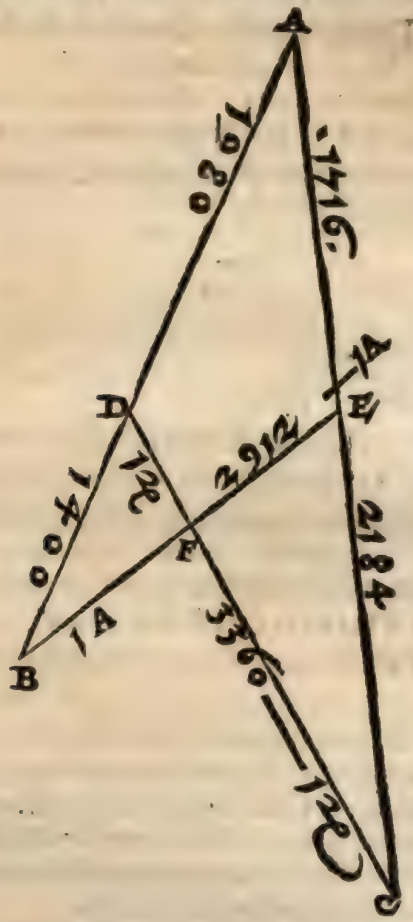


Figura exempli huius tertij.

In minoribus uero terminis sic stat æquatio.

$$\frac{169.}{70.} \qquad \frac{36960 - 112\ell}{142\ell}$$

Ea uero reducta ad æquationem integrorum sic stabit.

Vt 23662ℓ sint æquatæ $2587200 - 7702\ell$.

Deinde reducta ad simplicia sic stabit:

Vt 3136 ℞ sint æquatæ 2587200.

Facit igitur 1 ℞, 825. Et sic inuentæ sunt lineæ DC portiones. Nam D F facit 825. Et FC facit 2535.

Restat iam inuentio portionum reflexæ minoris, cuius inuentionis æquatio sic stat.

1980 A.	3900.
4076800 — 1400 A.	2184.

Ea in minoribus sic stat.

99 A.	25.
203840 — 70 A.	14.

Ad integra uero reducta sic stat.

1386 A æquata 5096000 — 1750 A.

Reducta uero æquatione ad simplicia, æquabuntur 3136 A cum 5096000. Facit 1 A. 1625.

Et sic etiam sunt inuentæ portiones lineæ reflexæ B E. Facit enim B F. 1625. Et F E facit 1287.

Proba hoc per inuersionem hoc modo.

SInt duæ lineæ descendentes ab angulo aliquo, quarum longior faciat 3900, & minor earum faciat 3380, reflectaturq; altera in alteram, faciatq; reflexa maioris 3360, & reflexa minoris faciat 2912. Diuidantq; reflexæ se mutuo in puncto intersectionis, ita ut portio inferior reflexæ maioris, faciat 2535, & superior 825: & portio inferior reflexæ minoris, faciat 1625, superior uero portio eius faciat 1287.

Quæstio iam est, de partibus descendentium, quanta uidelicet unaquæq; earum sit.

Sic autem habet huius operationis propositio.

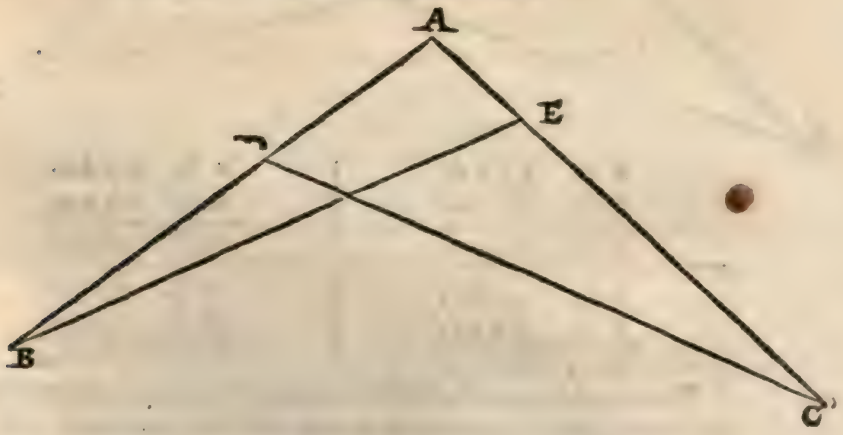
Si proportio quam facit una descendentium integra ad partem suam superiorẽ, subtrahatur à proportione quam eiusdem descendentis reflexa tota facit ad portionem suam superiorem

orem, tunc relinquitur proportio alterius reflexæ, quam ipsa tota facit ad partem suam inferiorem.

Obseruabis autē, quòd dum proportio dicitur proportioni esse æquata, ut hoc non aliter intelligas, quàm si minutia diceretur æquata minutiæ: id quod significatum esse uolui in operationibus superioribus exēpli huius, ubi proportiones æquatas ad inuicem, signaui uirgula, ac si essent minutiæ. Non autē opus est, ut operationes hoc loco repetam. Nam propositio indicat tibi proportionem subtrahendam, atq; etiam eam à qua debet fieri subtractio. Et facta subtractione, ostendit tibi etiam proportionem illam, cui tua relicta proportio æquetur. Quid uis amplius?

Sed quia descēdentes prioris exempli faciunt angulum acutum, uolo tibi superaddere duo exempla alia rationalium numerorum: quorum unum faciat angulum obtusum per descendentes, & alterum faciat angulum rectum.

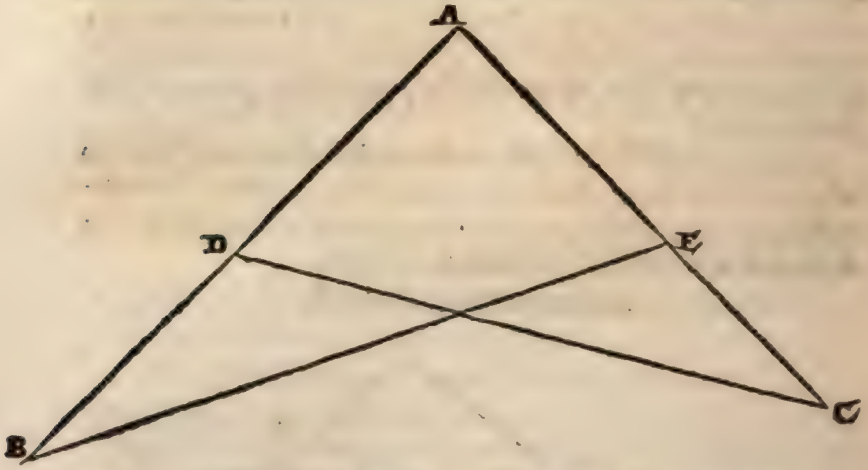
Exemplum anguli obtusi.



Sunt autem descendentes lineæ in hoc exemplo inter se æquales, sed reflexæ earum sunt inæquales, ut

AD. 1628.	AE. 444.
DB. 2072.	EC. 3256.
AB. 3700.	AC. 3700.
DF. 315.	EF. 1573.
FC. 4125.	FB. 2275.
DC. 4440.	EB. 3848.

Sequentis exempli descendentes lineæ, descendunt ab angulo recto.



AD. 9450.	AE. 9900.
DB. 7350.	EC. 2700.
AB. 16800.	AC. 12600.
BF. 15288.	DF. 9702.
FE. 4212.	FC. 6048.
BE. 19500.	DC. 15750.

Ex calculatione aũt facile scies angulum exempli huius esse rectum. Scilicet quadratum DC æquale est quadratis AC, & AD. Si autem esset minus, tunc angulus esset acutus. Et si esset maius, tunc angulus esset obtusus.

Exemplum

Exemplum quartum capitis huius, & est Adami.

TRes sunt socij, quorum primus dicit ad secundum, Si mihi dares dimidiū summæ tuæ, tunc haberem 100 ℔. Et secundus dicit ad tertium: Si mihi dares summæ tuæ partē tertiam, tunc haberem 100 flo. Et tertius ad primum dicit: Si tu mihi dares summæ tuæ partem quartam, tunc haberem 100 ℔.

Quæstio est, quantum quisq; eorum habeat.

Primus habet 1 ☉ florenorum.
Secundus habet 1 A florenorum.
Tertius habet 1 B florenorum.

Quòd autem primus petit à secundo dimidium summæ, quam ipse secundus habet, ut ipse primus habeat 100 ℔, satis mihi indicat, æquationem esse inter 1 ☉ + ½ A, & 100 florenos. Sic aũt soleo ponere fracta huiusmodi, $^{2}\frac{2\text{☉}}{2} + {}^{1}\text{A}$ æquatæ 100 ℔. Ergo 2 ☉ + 1 A æquantur 200 ℔. Et 1 A æquat̃ 200 ℔ — 2 ☉. Facit ergo 1 A, 200 ℔ — 2 ☉. id quod mihi reseruo loco unius A.

Habuit igitur primus 1 ☉ florenorum.
Et secundus 200 ℔ — 2 ☉.
Et tertius 1 B flor.

Petit autem secundus tertiam partem summæ tertij socij, ut sic ipse secũdus habeat 100 ℔. Itaq; iam 200 ℔ — 2 ☉ ℔ + ⅓ B, æquantur 100 florenis. Sic ego soleo ponere huiusmodi fracti ones, ut denominator respiciat totum numeratorem. ut $^{600} - \frac{6}{3}\,^{2\text{☉}} + {}^{1\text{B}}$ æquata 100. Aequantur itaq; 600 — 6 ☉ + 1 B cum 300. Atq; hac æquatione uides satis, ut 1 B resoluatur in 6 ☉ — 300. Et sic primus habuit 1 ☉ florenorum.

Secundus 200 ℔ — 2 ☉.
Tertius 6 ☉ — 300 ℔.

Petit autem tertius partem quartam summæ, quam habet primus, ut sic ipse tertius etiam habeat centum florenos. Itaq; 6 ¼ ☉ — 300 æquant̃ 100. Item $^{25}\frac{2\text{☉}}{4}\,^{1200}$ æquant̃ 100 ℔. Et sic 25 ☉ — 1200 æquantur 400. Item 25 ☉ æquãtur 1600 ℔. Facit 1 ☉. 64 ℔.

Habuit

Habuit igitur primus 1 ☉, id est, 64 ℔. Secundus habuit, 200 — 2 ☉. i. 72 ℔. Et tertius habuit 6 ☉ — 300. hoc est, 84 ℔. Quod facile poteris probare.

Ponit Adamus & alia pulchra exempla pro regula Falsi, quæ cum similes habeant operationes huic operationi propositæ iam ostensæ, ideo ea prætermitto. Habet etiã Christophorus egregiam copiam huiusmodi exemplorum, quæ cogor obmittere penuria temporis: deinde decet, ut rem hanc contrahã, ita ut caput hoc superiora non excedat, nimia prolixitate. Vice tamen omniũ talium exemplorũ, adhuc unũ superaddam.

Exemplum quintum capitis huius, in quo formando imitatus sum Christophorum, talia exempla ponentem multa.

TRes socij sunt, quorum primus dicit ad reliquos: Si uos adhuc haberetis 100 ℔, tunc summa florenorum uestrorũ esset ad summam meam dupla. Secundus dicit ad reliquos: Si uos haberetis adhuc 100 ℔, tunc summa uestra esset ad meam tripla. Tertius dicit ad reliquos: Si adhuc haberetis 100 ℔, tunc summa uestra quadrupla esset ad summam meam.

Quæstio est, quantum quisq; eorum habeat.

Primus habet 1 ☉ florenorum.

Et reliqui habent 1 A florenorum simul.

Dicit autem primus, quòd summa reliquorum dupla esset ad summam suam, si adhuc haberent 100 ℔. Ergo 1 A + 100 ℔ æquantur 2 ☉ florenorum. Sequitur ulterius, quòd 1 A faciat 2 ☉ — 100. Ita q; secundus & tertius simul, habent 2 ☉ — 100. Quibus florenis addita summa primi, facit 3 ☉ — 100 ℔. & est summa omnium, quod obseruabis.

Secũdus dicit, summã primi & tertij (adauctã 100 florenis) futuram esse triplam ad suam. Pono igitur secundo socio 1 B, tunc reliqui duo habent summam omnium, minus ea, quam secundus habet. hoc est, reliqui habẽt hanc summã, 3 ☉ — 100 — 1 B. Cum autem secundus dicat de summa hac reliquorum, q; esset tripla

tripla ad ſummam ſuam, ſi ipſi adhuc haberent 100 ℔. Sequitur ergo, quòd 3 B æquentur 3 2ę — 1 B. Et per reductionem, 3 2ę æquantur 4 B. Facit igitur 1 B, $\frac{3}{4}$ 2ę. Cum igitur primus habeat 1 2ę, habet ſecundus $\frac{3}{4}$ 2ę.

Tertius dicit ad reliquos duos, Si haberetis 100 ℔, tunc ſumma ueſtra ad meam eſſet quadrupla. Pono igit̃ pro tertij ſum̃a 1 C, tunc reliqui habent 3 2ę — 100 ℔ — 1 C. Aequantur igitur 3 2ę — 1 C cum 4 C. Et facit 1 C (ut uides) $\frac{3}{5}$ 2ę.

Atq; ita Primus habet 1 2ę.
Secundus habet $\frac{3}{4}$ 2ę.
Tertius uero habet $\frac{3}{5}$ 2ę.

Et hæ tres ſummæ ſimul ſumptæ, faciunt 1 $\frac{37}{20}$ 2ę, ſeu $\frac{47}{20}$ 2ę. Et cum ſit ſumma omniũ, ſitq; etiam 3 2ę — 100 ſum̃a omnium, ſatis conſtat eas inter ſe æquari. Itaq; per reductiones, 13 2ę æquantur 2000. Facit 1 2ę. 153 $\frac{11}{13}$.

Vnde primus habet 153 $\frac{11}{13}$.
Secundus habet 115 $\frac{5}{13}$.
Tertius habet 92 $\frac{4}{13}$.

Ex iſta operatione facile formabis reliqua exempla ſimilia, quorum tibi uariationem breuiter oſtendam.

TRes ſocij ſunt. Quorum primus dicit ad reliquos: Si ego adhuc haberem 100 ℔, tunc ſumma mea eſſet æqualis ſummæ ueſtræ. Secundus dicit ad reliquos: Si ego adhuc haberem 100 ℔, tunc eſſet mea ſumma, ad ueſtram, dupla. Tertius dicit ad reliquos: Et ego ſi haberem 100 ℔, haberem ſummam quæ ad ueſtram comparata, eſſet tripla.

Summa primi 9 $\frac{1}{11}$ ℔.
Summa ſecundi 45 $\frac{5}{11}$ ℔.
Summa tertij 63 $\frac{7}{11}$ ℔.

Aliud.

Sunt tres ſocij, quorum primus dicit ad reliquos: Si uos de ſumma ueſtra remoueritis 100 ℔, tunc ſumma mea eſſet

ſummæ ueſtræ æqualis. Secundus dicit ad reliquos: Si uos de ſumma ueſtra remouueretis 100 fl, tunc ſuña mea eſſet ad ſummam ueſtram dupla. Tertius dicit ad reliquos, Si uos de ſuña florenorũ quam habetis, remouerítis 100 fl, tunc ſumma mea eſſet ad ſummam ueſtram tripla.

Quæſtio eſt, quantum quiſq; eorum habeat.

Primus habet $54\frac{6}{11}$ fl.
Secundus uero habet $72\frac{8}{11}$ fl.
Tertius autem $81\frac{9}{11}$ fl.

Aliud.

Tres ſocij ſunt, quorum primus dicit ad reliquos: Si ego de ſumma mea remouerem 100 fl, tunc ſumma ueſtra eſſet ad ſummam meam quadrupla. Secundus dicit ad reliquos: Si ego de ſumma mea remouerẽ 100 fl, tunc ſumma ueſtra ad meam eſſet tripla. Tertius dicit ad reliquos: Et ſi ego de ſumma mea remouerem 100 fl, tunc ſumma ueſtra eſſet ad meam dupla.

Primus habet $284\frac{8}{13}$ fl.
Secundus uero habet $330\frac{10}{13}$ fl.
Tertius habet $407\frac{9}{13}$ fl.

Aliud.

Tres ſocij ſunt, quorũ primus dicit ad reliquos, Si darem uobis 100 fl, tunc ſumma ueſtra ad meam fieret quintupla. Secundus dicit ad reliquos, Si ego uobis darẽ 100 fl, tunc ſuña ueſtra ad meam eſſet ſextupla. Tertius dicit ad reliquos, Et ego ſi uobis darem 100 fl, tunc ſumma ueſtra ad ſummam meam fieret ſeptupla. Primus habet $188\frac{8}{19}$ fl.

Secundus $175\frac{15}{19}$ fl.
Tertius habet $166\frac{6}{19}$ fl.

Aliud.

Tres ſocij ſunt, quorum primus dicit ad reliquos, Si dare tis mihi 100 fl, tunc ſumma mea eſſet ſummæ ueſtræ æqualis. Secundus dicit ad reliquos, Si daretis mihi 100 fl, tunc ſumma mea eſſet ad ſummã ueſtram dupla. Tertius dicit ad reliquos:

Si

Si daretis mihi 100 ℔, tunc summa mea esset ad summam uestram tripla. Primus habet $63\frac{7}{11}$ ℔.
Secundus $118\frac{2}{11}$ flore.
Tertius uero habet $145\frac{5}{11}$ ℔.

Aliud.

¶ Tres socij sunt, quorum primus dicit ad reliquos, Si daretis mihi dimidium summæ uestræ, tunc haberem 100 florenos. Secundus dicit ad reliquos, Si daretis mihi tertiam partem pecuniæ uestræ, tunc haberem 100 ℔. Tertius dicit ad reliquos, Si daretis mihi sum̃æ uestræ partem quartã, tunc haberẽ 100 ℔.

Summa primi $29\frac{7}{17}$ ℔.
Summa secundi $64\frac{12}{17}$ ℔.
Summa tertij $76\frac{8}{17}$ ℔.

Aliud.

¶ Sunt tres socij, quorum primus dicit ad reliquos, Si uobis darem summæ meæ dimidium, tũc uos haberetis 100 florenos. Secundus dicit ad reliquos: Si uobis darem partẽ tertiam summæ meæ, tunc haberetis 100 ℔. Tertius dicit ad reliquos: Si darẽ uobis partẽ quartã sum̃æ meæ, tunc uos haberetis 100 ℔.

Primus habet $52\frac{4}{21}$ ℔.
Secundus $39\frac{3}{21}$ ℔.
Tertius uero habet $34\frac{18}{21}$ ℔.

Et sic de similibus exemplis alijs produces debitas summas.

Exemplum capitis huius sextum.

Et est Christo. 179.

TRes mercatores societatẽ faciũt. Primus imponit 100 ℔. Secundus imponit 200 ℔. Et tertius imponit 300 flore. & manent in societate illa per 12 mens. Sed post menses duos, imponit primus aliquot libras de pipere, cuius 3 ℔ ualent 1 ℔. Et post menses quatuor imponit secundus massam argenti, cuius 1 marca ualet 7 flo. Peractis aũt duodecim mensibus præ dictis, recipit primus 50 ℔ de lucro; secundus recipit 110 flor. tertius recipit 90 florenos.

Quæstio est de primo, uidelicet quot ipse libras de pipere imposuerit, Et de secundo, quot ille marcas argēti imposuerit.

Facit primo 1 2ę librarum.

Et secundo 1 A marcarum

Cum autē tres libræ faciant 1 ℔, faciet 1 2ę librarum $\frac{1}{3}$ 2ę florenorum. Et stetit cum $\frac{1}{3}$ 2ę ℔ in societate 10 mens. (post duos enim menses imposuit piper &c) Facit $\frac{10}{3}$ 2ę seu $3\frac{1}{3}$ 2ę ℔. Et cum 100 ℔ stetit 12 mens. facit 1200.

Facit ergo primo 1200 + $3\frac{1}{3}$ 2ę ℔.

Sic (ut de secundo dicam) cum 1 marca faciat 7 ℔, faciet 1 A marcarum 7 A florenorum. Cum quibus stetit in societate illa per 8 menses (quia post quatuor menses imposuit argentum) facit 56 A ℔. Et cum 200 ℔, stetit per 12 menses. facit 2400 ℔. Sum̃a ergo sum̃arę secūdi facit in societate illa 2400 + 56 A ℔.

Tertius uero stetit in societate illa cum 300 ℔, per 12 mens. facit 360 ℔ in societate illa.

Vnde sic stat exemplum.

	1200 + $3\frac{1}{3}$ 2ę		50
7200 + $3\frac{1}{3}$ 2ę + 56 A	2400 + 56 A	250	110
	3600		90

Satis uides, ut diuisor (.i. 7200 + $3\frac{1}{3}$ 2ę + 56 A.) factus sit ex aggregatione secundorum terminorum regulæ DeTri. Et tertius terminus, id est 250. factus sit ex aggregatione quartorum terminorum, qui lucrum definiunt.

Fit autem resolutio numerorum Cossicorum, in numeros absolutos, ex infimo ordine. Vt 7200 + $3\frac{1}{3}$ 2ę + 56 A dant mihi 3600 ℔, quantum dant mihi 250, facit 90 ℔. Multiplico igitur extremos terminos inter se, facit hunc numerū cossicum 648000 + 300 2ę + 5040 A. Et multiplico etiam medios inter se, facit multiplicatio 900000. Et sic habes æquationem qua possis resoluere 1 A in numerę radicum. Vnde facta reductione inuenies 1 A facere $50 - \frac{5}{84}$ 2ę. Quare 56 A faciēt $2800 - 3\frac{1}{3}$ 2ę. Et sic ex diuisore fiunt 10009.

Iam

Iam igitur resolue 1 ☉ in numerum absolutum, ex supremo ordine, sic uidelicet:

10000 dant mihi 1200 + 3 1/3 ☉. ergo 250 dant mihi 50. Fac ut prius, id est, multiplica extremos inter se. Deinde multiplica medios inter se. Et sic inuenies æquationem inter 500000 & 300000 + 833 1/3 ☉. Et per reductionem 200000 æquantur 833 1/3 ☉. Facit 1 ☉. 240. Et cum 1 A faciat (ut superius uidimus) 50 — 5/8 ☉: sequitur quòd 1 A faciat 35 5/7.

Primus igitur post duos menses imposuit 240 lib. piperis. Secundus uero post 4 menses imposuit 35 5/7 marc. argenti.

Exemplum capitis huius septimum.

Et est Christophori 182.

TRes mercatores societatem faciunt. Primus imponit 35 ft ultra summam quam secundus imponit. Summa autem florenorum impositorum à secundo & tertio, facit 84. Recipit autem tertius pro parte lucri sui 21 ft. Lucrum uero totale facit 66 florenos. Quæstio est, quantum quilibet singulariter imposuerit, & quantum primus receperit de lucro, quantumcq; secundus receperit.

Exemplum sic stat.

	1 ☉ + 35		1 A
119 + 1 ☉	1 ☉	66	1 B
	84 — 1 ☉		21

Ex infimo ordine resoluitur 1 ☉. Scilicet 119 + 1 ☉ multiplicantur per 21, tunc hoc quod fit, æquatur illi producto, quod ex 84 — 1 ☉ per 66 multiplicatis fit. Vt 2499 + 21 ☉ æquantur 5544 — 66 ☉. Facit 1 ☉, 35.

Vnde sic stabit figura exempli amodo.

	70		1 A
154	35	66	1 B
	49		21

Facit igitur 1 A, 30. Et 1 B facit 15.

Exemplum octauum capitis huius.

Et est Christophori 181.

TRes mercatores imponunt 385 flor. lucranturq; 154 fl. Lucrum autem sic diuidunt, ut pars tertia lucri, quod recipit primus, sit æqualis parti quartæ lucri, quod recipit secūdus. Quoties autem primus recipit $2\frac{1}{2}$ fl, toties tertius recipit 7 flo.

Quæstio est, quantum quilibet receperit, & quantum quilibet imposuerit.

Sic autem stat exemplum.

	1 2ꝙ		1 C
385	1 A	154	1 D
	1 B		1 E

Resoluitur autem 1 D in $1\frac{1}{3}$ C (eò quòd pars tertia de 1 C sit æqualis parti quartæ de 1 D). Sic 1 E resoluitur in $2\frac{4}{7}$ C. Cum enim primus recipiat $2\frac{1}{2}$, dum tertius recipit 7, necesse est ut ex multiplicatione tali hac in cruce fiat æquatio productorum.

$2\frac{1}{2}$ — 1 C

7 — 1 E

Vnde sic amodo stabit exemplum figuratum.

	1 2ꝙ		1 C
385	1 A	154	$1\frac{1}{3}$ C
	1 B		$2\frac{4}{7}$ C

Vnde $5\frac{5}{7}$ C æquantur 154: eò quòd numerus ille 154 colligat (ut fit in societatibus) ex terminis quartis. Facit ergo 1 C, 30.

Vnde amodo sic stat figura exempli.

	1 2ꝙ		30
385	1 A	154	40
	1 B		84

Videbis igitur 1 2ꝙ facere 75.

Et 1 A facere 100.

Et 1 B facere uidebis 210.

Exemplum

Exemplum nonum capitis huius.

Et est imitatio exempli Christophori 112.

TRes sunt socij, quorum quilibet suam summam florenorum habet. Et primus de summa sua duplat summas duorum reliquorum. Idem postea facit secundus. Facit & tertius postea idem. Quo facto, habet quilibet eorum 248 ff. Quæstio est quot flo. quilibet eorum primum habuerit.

Summa omnium 1 C.

Primus habuit 1 ☉.

Secundus habuit 1 A.

Tertius habuit 1 B.

Facit autem 1 B. 1 C — 1 ☉ — 1 A.

Post primi socij dona, adquirit

Secundus 2 A.

Tertius 2 C — 2 ☉ — 2 A.

Primus reseruat 2 ☉ — 1 C.

Post secundi socij donationem, adquirit

Primus 4 ☉ — 2 C.

Tertius 4 C — 4 ☉ — 4 A.

Secundus reseruat 4 A — 1 C.

Post tertij socij donationem, acquirit

Primus 8 ☉ — 4 C.

Secundus 8 A — 2 C.

Tertius reseruat 7 C — 8 ☉ — 8 A.

Et illæ tres postremæ sum̃æ, inter se sunt æquatæ. Nam iuxta pronunciationem exempli, facit quælibet earum 248 ff. Et sic summa omnium facit 744 ff. Et tantum facit 1 C. Itaq;

Primus habet 8 ☉ — 2976.

Secundus habet 8 A — 1488.

Cum igitur duæ summæ hæ sint inter se æquatæ, inuenies 1 A facere 1 ☉ — 186.

Tertius habet 6696 — 16 ☉.

Et quia hæc utriq; superiorum duorum est æqualis, uidelicet illi 8 ☉ — 2976, inuenies 1 ☉ facere 403. Itaq;

Itaq; Primus habuit 403 fl.
Secundus habuit 217 fl.
Tertius habuit 124 fl.

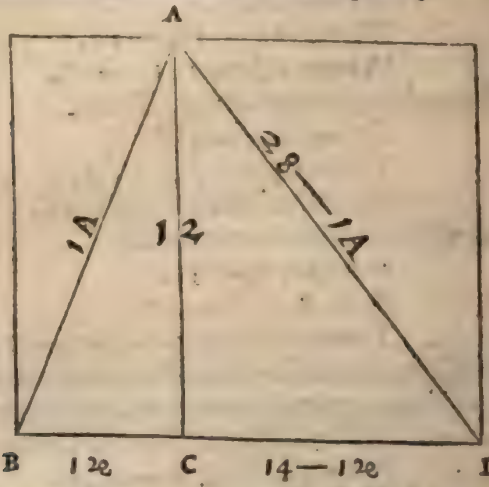
Quod probare poteris iuxta pronunciationem &c.

Exemplum capitis huius decimum.

EST quadrangulum rectangulum contentum sub lateribus, quorum unum facit 14 sua longitudine, & alterũ facit 12. Trahitur autem à latere maiore orthogonalis, in oppositum latus, ita ut quadrangulum illud diuidatur in duo quadrangula, quorum diametri ambæ simul sumptæ, sint ad latus maius, integri quadranguli, duplæ.

Quæstio est de lateribus quadrangulorum partialium, quantum sit unumquodq;.

Exempli pictura.



Quia quadratum lineæ A B æquale est duobus quadratis B C & A C, ideo facit 1 ☉ + 144, & huic æquatur 1 A ☉. ut satis ex figura uides. Simili ratione 340 — 28 ☉ + 1 ☉ æquantur 784 — 56 A + 1 A ☉, cum utercq; numerorũ cossicorum referat quadratum lineæ A D. Reduc igitur æquationem illam, ut 1 A ☉ maneat

maneat æquatum reliquis particulis æquationis huius. Scilicet 1 A ♃ æquatur 56 A + 1 ♃ — 28 2ℓ — 444. Et quia superius 1 A ♃ æquabatur cum 1 ♃ + 144, ideo relinquitur 1 ♃ + 144 æquari 56 A + 1 ♃ — 28 2ℓ — 444. Et hac æquatione reducta, inuenies 56 A æquari 28 2ℓ + 588. Quare 1 A facit $1^{2\ell} + 21$.

Vel ita operare pro resolutione 1 A, ut uidelicet æquatio cadat super lineam A C, quasi A C nõ esset nota. Scilicet 1 A ♃ — 1 ♃ æquaſ huic cossico numero 588 — 56 A + 1 A ♃ + 28 2ℓ — 1 ♃. Facit 1 A (ut prius) $1^{2\ell} + 21$.

Sic ergo stabit amodo figura exempli, ut pro 1 A, ponatur ad lineam A B numerus radicum, in quem resoluitur 1 A. Et sic linea A D recipit hunc numerum $35 + 1^{2\ell}$ &c.

Vel sic operare.

Cum quadratum A B faciat 1 ♃ + 144, sequitur quòd 1 A facit √♃. 1 ♃ + 144. Sic cũ quadratũ lineæ A D faciat 340 − 28 2ℓ + 1 ♃, sequitur lineam ipsam A D facere √♃. 340 — 28 2ℓ + 1 ♃. Itaq; √♃. 340 — 28 2ℓ + 1 ♃. + √♃. 1 ♃ + 144, æquatur 28: ut habet pnunciatio. Quare p reductionẽ æq̃tionis 28 — √♃. 1 ♃ + 144 (id est, linea A D) æquabitur √♃. 340 — 28 2ℓ + 1 ♃. id est, idem æquatur sibijpsi, quare quadratũ æquabitur quadrato. Scilicet 340 — 28 2ℓ + 1 ♃ æquaſ 928 + 1 ♃ — √♃ 3136 ♃ + 451584.

Reduc æquationem, tunc 588 + 28 2ℓ uidebis æquari √♃. 3136 ♃ + 451584. Et quadratũ unius æquabitur quadrato alterius: scz 3136 ♃ + 451584 æquantur 345744 + 329284 ℓ + 784 ♃ (tantũ enim facit 588 + 28 2ℓ in se). Vnde æquatione hac reducta, inuenies tandem 1 ♃ æquari 142ℓ — 45. Et faciet radix æquationis huius minor 5.

¶ Studiose uero uolui exempli huius operationes difficiliores ponere, ut uarijs exemplis uarietatem miram operationum ineſſe, paucis (ut licebat) significarem, atq; ijs omnibus subindicarem immensam radicum secundarũ usum: ex quibus spero diligentem Lectorem sibi alia atq; alia posse inuenire atque formare, ut nihil opus fuerit me pluribus rem hanc agere.

Lectori autem meo, mea hac opera, sic seruire uolui, ut diligentia mea, me ei insinuarem atq; fideli, potius quàm erudita, tractatione seu ostensione eorum quæ doceo, hoc ab eo impetrarem, ut memor mei esset aliquãdo in orationibus suis ad Christum. Cui gloria sit, per Euangelium suum, etiam in istis donis & creaturis suis temporalibus, Amen.

Caput XIII. quod Epilogi uice repetit mentionem perfectionis regulæ Algebræ, cum exemplis quibusdam Hieronymi Cardani ad hanc rem pertinentibus.

ADDENDVM est nunc, Epilogi uice, Caput ultimum libri huius, quod contineat exempla talia, qualibus lector exactius de perfectione Algebræ & disputare & iudicare possit. Ea igitur quæ hoc Capite dicenda sunt, dicam ut inciderint per occasionem exemplorũ, quemadmodum in superioribus sex exemplorum Capitibus non absq; fructu rerum Arithmeticarum (ut puto) feci. Accedamus igitur ad exempla qualia Caput hoc ultimum requirit.

Primum exemplum Capitis huius. Et est Hieronymi Cardani 83. Capitis 66. Arith. suæ.

Fiat progressio Geometrica trium terminorum ab unitate incipiens, cuius aggregatum ex primo & secundo terminis, diuisum per tertium, item aggregatum ex secundo & tertio terminis, diuisum per primum terminũ, item aggregatum ex primo & tertio terminis, diuisum per secundum, faciat 13. Quæstio est, quæ aut quãta sit ista progressio. Facit. 1. 12. 13. Diuisiones sunt.

$$\frac{1 + 12.}{13.} \qquad \frac{12. + 13.}{1} \qquad \frac{1 + 13.}{12.}$$

Summa

Summa omnium quotientum.

$$\frac{1\frac{1}{8}\,\text{☉☉} + 2\,\text{☉☉} + 2\,\text{☉} + 1}{1\frac{1}{8}}$$

Istam igitur summam, æquat pronunciatio exempli, cum 13. Vnde, per reductionem ad integra, $13\frac{1}{8}$ æquantur $1\frac{1}{8}\,\text{☉☉} + 2\,\text{☉☉} + 2\,\text{☉} + 1$. Et per debitam particularum transpositionem, de qua in superioribus Capitibus dixi, $1\frac{1}{8}\,\text{☉☉}$ æquatur huic numero cossico sequēti. $13\frac{1}{8} - 2\,\text{☉☉} - 2\,\text{☉} - 1$. Ex hoc igitur numero, iam (iuxta regulam Algebræ meam) extrahenda esset radix Zensizensica, quæ procul dubio proderet numerum illum latentem sub $1\,\text{☉}$ posita, quem quærimus. Sed ego fateor meas uires huic operationi, atq; similibus esse impares. Illis autē amicis meis hoc negocium committo, qui aliquando, me præsente gloriati sunt, se omnia ista, quæ inuenerim potuisse inuenire, si ocium eis id faciendi haberent. Cum autem uideam eos sibi ocium inuenire, quantum sufficit, pro acquirēdis pecuniis, idq; in quolibet anno non semel, mihi uero inuideant, si uel triennij spacio semel, gratus aliquis auditor me accedat, qui potiora Arithmeticæ præcepta discere cupiat, licere mihi puto, ut iuxta gloriationem eorum hanc (ut cætera transeam) ab eis idoneris exigam, quatenus me iam fatigatum iuuent. cum istud facile possint, stante eorum felici & forti confidentia inueniendi noua & intelligendi aliorum inuenta obscure tradita. Ego tamen, ut serio loquar, existimo illud sancti Ioannis Baptistæ, Nemo potest accipere aliquid, nisi ei datu fuerit desuper, etiam intelligendum esse de spinis istis, et scientiarum et diuitiarum. Sed ad exemplum redeamus. Cardanus ingeniosissime tradidit nobis huius exempli solutionem. Aequat autem ille $13\frac{1}{8}$ reliquis particulis æquationis positæ & inuentæ, & sic alia uia, pulchre inuenit solutionem, Scilicet, Ex utraq; parte æquationis, extrahendas radices uidit quadratas, pauculo auxilio adhibito. Sciens enim, quòd æqualitas maneat, si æqualibus æqua-

lia addantur, cum ex una parte æquationis, haberet 1 3☉, ex alia autem parte haberet 1☉☉ + 2☉☾ + 0☉ + 2☾ + 1. Vidit ex utraq; parte addendos esse 3☉. Sic enim ex una parte fiebant 16☉, id est, numerus cossicus, radicem quadratam habens, & ex altera parte fiebat iste numerus cossicus quadratus 1☉☉ + 2☉☾ + 3☉ + 2☾ + 1. Sic enim scimus etiam numeros hos necessario esse quadratos. 121. 12321. 1234321. 123454321. Et sic deinceps 1☉ + 2☾ + 1. Facit radix quadrata 1☾ + 1. Item 1☉☉ + 2☉☾ + 3☉ + 2☾ + 1. facit radix quadrata 1☉ + 1☾ + 1. Item 1☉☾ + 2☉ + 3☉☉ + 4☉☾ + 3☉ + 2☾ + 1, facit radix quadrata. 1☉☾ + 1☉ + 1☾ + 1. Et sic deinceps in infinitum. Nec huic rei officit, si pro signis additorũ ponantur signa subtractorum. Sic autem stat exemplum ad extractionem radicis.

```
                    ☌ ☉
⊙        ⊙        ⊙
1☉☉ + 2☉☾ + 3☉ + 2☾ + 1
1☉.      2☉ + 1☾
                          ( 1☉ + 1☾ + 1.
```

Sed primo extraho radicem ex 1☉☉. facit 1☉. quem pono in locum Quotientis. Eum deinde duplatum, pono sub numero cuborum. & dico quoties inuenio 2☉ in 2☉☾ facit 1☾ (quam pono ad locum Quotientis) multiplico igitur 1☾ in 2☉ fiunt 2☉☾ quos subtraho à 2☉☾, remanet nihil. Deinde multiplico 1☾ inuentam in se, facit 1☉, qui subtractus à 3☉, relinquit 2☉. Postea hoc quod est in quotiẽte totũ, duplo, duplatumq; pono sub resi duo relicto, atq; diuido, Dico eñ 2☉ in 2☉ suprapositis, inuenio semel. Vnde pono in Quotiente, et multiplico, atq; subtraho. Deinde multiplico 1 in se, et subtraho etc. Hæc forte uerbosius dixi q̃ fuerit necessariũ, sed oportuit me etiã tardioribꝫ seruire.

Vides itaq; ut radix quadrata ex una parte æquationis, faciat hunc numerum cossicum. 1☉ + 1☾ + 1. & radix quadrata ex altera parte æquationis faciat 4☾. Cum autem quadrata fuerint æqualia, necesse est ut etiam eorum radices sint ad inuicem

uicem æquales. Itaq; 4☉ æquantur 1☽ + 12☉ + 1. Æquatur igitur 1☽ (ut ex reductione uides) 32☉ — 1. facit radix maior $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (nam radix minor facit $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$)

Et sic stat progressio

1. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

Quotiens ergo primæ diuisionis facit $5-\sqrt{20}$
Quotiens autem secundæ diuisionis facit $5+\sqrt{20}$
Quotiens tertiæ diuisionis facit 3. &c.

Exemplum secundum capitis huius

Et est Hieronymi 48. Capitis sui 66.

Est progressio Geometrica incipiens ab unitate, terminos habens quinq;, & dum quilibet terminorum diuidit summam aliorum, fiunt ex aggregatione quinq; terminorum illorum 3 5 6.

Progressio est.

1. 12☉. 1☽. 1☉². 1☽☽.

Quotiens primus.

$$\frac{1+12\odot+1\bigcirc+1\odot^2}{1\bigcirc\bigcirc}$$

Quotiens secundus

$$\frac{12\odot+1\bigcirc+1\odot^2+1\bigcirc\bigcirc}{1}$$

Tertius Quotiens.

$$\frac{1+1\bigcirc+1\odot^2+1\bigcirc\bigcirc}{12\odot}$$

Quartus Quotiens.

$$\frac{1+12\odot+1\odot^2+1\bigcirc\bigcirc}{1\bigcirc}$$

Quintus Quotiens.

$$\frac{1+12\odot+1\bigcirc+1\bigcirc\bigcirc}{1\odot^2}$$

Quotientes igitur isti simul additi faciunt Minutiam, cuius numerator sic stat.

$\frac{3}{8}$cc. bβ. $\frac{3}{8}\frac{3}{8}$. cc. cβ. $\frac{3}{8}$cc. dβ. $\frac{3}{8}$bβ.
1. 2. 3. 4. 4. 3. 2. 1

Diuisor autem huius numeratoris facit $1\frac{3}{8}$β.

Reductis uero signis cossicis sic stabit numerator.

0. 2c. $\frac{3}{8}$. cc. β. $\frac{3}{8}$cc. bβ. $\frac{3}{8}\frac{3}{8}$.
1. 2. 3. 4. 4. 3. 2. 1.

Denominator uero seu diuisor numeratoris huius est, $1\frac{3}{8}\frac{3}{8}$.

Et ista minutia æquatur numero huic. 356.

Sed 356 $\frac{3}{8}\frac{3}{8}$ æquantur numeratori minutiæ præcedentis. Et sic $1\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{3}{8}$ æquatur

$356\frac{3}{8}\frac{3}{8}$ — 2bβ — $3\frac{3}{8}$cc — 4β — 4cc
— $3\frac{3}{8}$ — 22c — 1.

Et ex summa hac, posterioris partis, de æquatione proposita, iam quærenda esset $\sqrt{\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{3}{8}}$. id est, radix Zenzensizensica. Quod cum sit difficile, alia uia reperit Hieronymus Cardanus resolutionem unius radicis, positæ pro secundo termino progressionis inueniendæ.

Sed æquatis 356 $\frac{3}{8}\frac{3}{8}$ reliquis particulis æquationis omnibus (ut superius uidimus) addit utriq; parti æquationis $5\frac{3}{8}\frac{3}{8}$. Et sic 36 $1\frac{3}{8}\frac{3}{8}$ æquantur

$1\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{3}{8}$ + 2bβ + $3\frac{3}{8}$cc + 4β + $5\frac{3}{8}\frac{3}{8}$.
+ 4cc + $3\frac{3}{8}$ + 22c + 1.

Quære utrobiq; radicem quadratam, tunc inuenies $19\frac{3}{8}$ æquari eum. $1\frac{3}{8}\frac{3}{8}$ + 1cc + $1\frac{3}{8}$ + 12c + 1.

Iterum adde utriq; partium æquationis. $1\frac{1}{4}\frac{3}{8}$. tunc $20\frac{1}{4}\frac{3}{8}$ æquabuntur $1\frac{3}{8}\frac{3}{8}$ + 1cc + $2\frac{1}{4}\frac{3}{8}$ + 12c + 1. Iterum quære radicem quadratam ex utraq; parte æquationis, tunc inuenies $4\frac{1}{2}$2c, æquari. $1\frac{3}{8}$ + $\frac{1}{2}$2c + 1. Hac æquatione reducta, inuenies $1\frac{3}{8}$ æquari 4 2c — 1.

facit Radix maior $2 + \sqrt{\frac{3}{8}3}$

Radix uero minor facit $2 - \sqrt{\frac{3}{8}3}$. & utraq; respondet exemplo

Vnde progressio maioris radicis sic stat.

1. 2 + $\sqrt{\frac{3}{8}3}$. 7 + $\sqrt{\frac{3}{8}48}$. 26 + $\sqrt{\frac{3}{8}675}$

97 + ℛ 9408.

Quotientes huius progressionis.

Primus. 132 — ℛ 17328.
Secundus. 132 + ℛ 17328.
Tertius. 37 + ℛ 1083.
Quartus Quotiens facit 18.
Quintus. 37 — ℛ 1083.

Progressio minoris radicis.

1.2 — ℛ 3. 7 — ℛ 48. 26 — ℛ 675.
97 — ℛ 9408.

Quotientes huius progressionis iuxta exempli pronunciationem sunt.

Primus. 132 + ℛ 17328.
Secundus. 132 — ℛ 17328.
Tertius. 37 — ℛ 1083.
Quartus facit 18.
Quintus. 37 + ℛ 1083.

Exemplum Capitis huius Tertium.

Et est Hieron. Card. 28. Capitis 66.

Sunt tres numeri continue proportionales, cum quorū quolibet diuido 25. & inuenio quotientes trium harum diuisionum simul sumptos, facere eam summam, quam facit multiplicatio eorum diuisorum, inter se, quamq; additio eorundem diuisorum ad se facit.

Quæstio est qui sint numeri illi. Non autem hic poteris recipere.

12 ⊙. 1 ℛ. 1 ⊙.

Nam tunc necessario fieri significaretur, secundum numerum esse quadratum primi, Id quod fieri necesse est solummodo, dum progressio incipit ab unitate, &c.

Recipe ergo, 12 ⊙. 1 A. 1 B. tunc Quotientes sic stant:

$$\frac{25.}{12\odot.} \quad \frac{25.}{1A.} \quad \frac{25.}{1B.}$$

Hic

Hic obserua, quòd medius minutiæ denominator æquatur ipsi minutiæ mediæ, eo quòd denominatores sint adinuicem proportionales, sub æqualibus numeratoribus. Itaq; 1 A. æquatur $\frac{25}{1A}$. facit igitur 1 A ☍. 25. Et ideo 1 A. facit 5. Vnde sic stant numeri exempli amodo.

1 ☉. 5. 1 B.

Et cum numeri ad inuicem sint proportionales, sequitur multiplicationem extremorum inter se, æquari producto multiplicationis medij in se, Scilicet 1 ☉ B æquatur 25.

Quia uero in pronunciatione exempli habes, quòd multiplicatio eorum numerorum inter se, debeat facere summam æqualem ei quæ fit ex additione numerorum illorum inter se, ex 1 ☉ uero in 1 B fiant 25. multiplicanda per medium, id est per 5. sequitur summam aggregationis facere. 125.

Itaq; pronunciatio exempli præsentis iam uersa est in pronunciationem hanc.

Diuiditur numerus 125. in tres partes adinuicem proportionales, quorum medius est 5. Quæritur ergo quanti sunt extremi.

Sic stant numeri iuxta pronunciationem hanc

1 ☉. 5. 120 — 1 ☉

Nam 125 — 1 ☉ — 5. facit 1 B. Erit ergo æquatio inter 25. & 120 ☉ — 1 ☍. Cum sint numeri proportionales. Itaq; 1 ☍. æquatur 120 ☉ — 25. facit 1 ☉. 60 — $\sqrt{☍3575}$. et est radix æquationis minor. Nam maior radix facit 60 + $\sqrt{☍3575}$.

Sic ergo stat inuenta progressio, 60 — $\sqrt{☍3575}$. 5. 60 + $\sqrt{☍3575}$.

Nisi autem utereris hac industria reducendi pronunciationem priorum ad posteriorum pronunciationem, negocium tibi nasceretur cum 1 ☉ A B æquata 25 A B + $\frac{21 ☉B + 25 ☉A}{1 ☉AB}$

Exemplum Capitis huius Quartum.

Et est Hiero. Car. 85. Capitis 66 numeris tamen uariatis.

Diuiditur numerus 12 in duas partes, quarum partiũ quadrat

drata, multiplicata in summam cubicorū earum faciūt 68040.

Quæstio est quantæ sint partes illæ.

Si hic receperis pro partibus illis 12ℰ & 1 A. siue 12ℰ & 12 — 12ℰ. Tunc ambo quadrata (id est 144 + 2 ♃ — 24ℰ) in ambos cubos (id est, 1728 + 36 ♃ — 432ℰ) facient hunc numerū cossicū sua multiplicatione 248832 + 19008 ♃ — 103680 ℰ — 1728ℭℰ + 72 ♃♃. Qui æquatur cum 68040. Et sic 1728ℭℰ — 19008 ♃ + 103680ℰ — 180792. æquantur 72 ♃♃. Facit 1 ♃♃ 24ℭℰ — 264 ♃ + 1440ℰ — 2511. Ex illo igitur numero cossico iam extrahenda esset radix Zensizensica. Quod cum non possimus præstare, alia uia incedendū erit, qua solutio inuenia tur. Eam Cardanus pulcherrime monstrauit. Docuit enim numeros inueniendos ita repræsentare.

6 + 12ℰ. 6 — 12ℰ.

Est autem 6 dimidium numeri diuidendi, &c.

Quadrata partium.

36 + 12 ℰℰ + 1 ♃

36 — 12ℰℰ + 1 ♃

facit aggregatum ex eis.

72 + 2 ♃

Cubi partium sunt.

216 + 1082ℰ + 18 ♃ + 1ℭℰ

216 — 1082ℰ + 18 ♃ — 1ℭℰ

Aggregatum ex ijs cubis facit

432 + 36 ♃

Itaq; multiplicatio amborum quadratorū in ambos cubos (id est, 72 + 2 ♃ in 432 + 36 ♃) facit hunc numerum. 31104 + 3456 ♃ + 72 ♃♃.

Cui numero cossico æquantur. 68040. Et per reductionem 72 ♃♃ æquantur 36936 — 3456 ♃.

Facit 1 ♃♃. 513 — 48 ♃.

Facit igitur 1 ♃. 9.

Et 1 ℰ facit 3.

Vnde partes illæ sunt. 3. & 9.
Quod poteris probare.
Et sic de alijs infinitis exemplis, in quibus regulæ Algebræ nihil deest, (quæ omnia exempla artis calculatoriæ comprehendit absq; ulla aliqua exceptione) licet nobis in multis desit tam uariarum radicum extractio, quales ipsa in uarijs exemplis requirendas exigit.

Vides certe ex omnibus quæ hic, atq; in superioribus, dixi, quòd si quis haberet absolutam artem extrahendi radices omnes, ille per regulam meam datam, immediate, & absq; ulla alia alia requirendi industria, absolueret omnia exempla quæ uel formata sunt, uel formari possent unquàm. Existimo ergo me per ista omnia satis demōstrasse, quàm solida sit ratio mea, qua pro octo regulis Algebræ (quales Christophorus ponit) unam posuerim simplicem atq; facilem.

Tu autem domine Iesu Christe, fili Dei uiui, Deus noster, mortuorum resuscitator, & iudex futuri sæculi, largire nobis supplicibus tuis, ut hæ spinæ, non suffocent in nobis scientiam tui, sed te toto affectu diligamus, quòd dolores nostros tuleris, & languores nostros portaueris, propter iniquitates nostras uulneratus sis, & attritus sis propter scelera nostra. Nunc disciplina pacis nostræ super te, quod liuore tuo sanati sumus. Sit igitur utilis omnis scientia, huic diuinæ scientiæ tuæ comparata, & fauor hominum nauseat sit, ad diuinam beneficentiam tuam comparatus.

Amen.

APPENDIX, AD MECOENATEM SVVM DOMINVM ADOLPHVM GLAVBVRCK Francofordiensem patricium, de Arithmetica Hieronymi Cardani.

ARITHMETICA Hieronymi Cardani talis est, Mi domine Adolphe, ut sese tibi satis abunde sit commendatura, dum eam legeris. Habet enim multa rara, quæ alibi nusquam legimus. Delectant autem me quædam exempla eius adeò, ut quiescere non potuerim, donec ea tibi peculiariter rescripta mitterem. Oro te nihilominus, amore artium, quas tantopere colis, quatenus eam Arithmeticam totam legas à principio diligentissime, & assuescas, signa eius, quibus ipse utitur, transfigurare ad signa nostra. Quamuis enim signa quibus ipse utitur, uetustiora sint nostris, tamen nostra signa (meo quidē iudicio) illis sunt commodiora. Quid autem ex eo libro didicerim, ego (præter exempla quæ Capite ultimo, ultimi libri posui, atq; ea quæ iam ponam) indicaui in mea Algebra.

Hæc sunt autem exempla Cardani, quorum operationes me mire delectant.

Exemplum Hiero. Car. quod Cap. 66. est quartumdecimum.

SVpponamus ambitum terræ continere milliaria. 44310. & saues duas ex eodem loco uolare supra circulum ambitus, una earum uolante uersus orientem, altera uersus occidentem, donec sic uolantes per ambitum terræ, tandem conueniant. Faciat autem una earum progressionē Arithmeticam, Ita ut primo die conficiat milliarium unum, secundo die conficiat 2 milliaria. Tertio die 3. Et sic deinceps. Secunda uero auis faciat suo uolatu progressionem naturalem numerorum cubicorum. Ita uidelicet ut primo die conficiat miliariū unum

Secundo die conficiat milliaria 8. Tertio die cõficiat milliaria 27. Et sic deinceps. Quoto die conuenient aues illæ?

Respondetur in una radice dierum. Peracta igitur 12ę dierum cõuenient. Videamus autem quantum faciat 12ę dierum Scȝ terminus ultimus progressionis Arithmeticæ incipientis ab unitate, progredientisq; ordine naturali numerorum, semper coincidit cum numero terminorum eiusdem progressionis. Igitur ultimus terminus progressionis quam facit una auium illarum, facit 12ę miliariorum, cui additus terminus primus, facite 12ę + 1. Hoc aggregatum, si multiplicetur per dimidium numeri locorum seu terminorum progressionis illius id est, per ½12ę. tunc producitur hæc summa milliariorum, quam fecerat una auis, uidelicet 1ȝ/₂ + 12ę

Producta hoc modo summa miliariorum primæ auis, quærenda est summa miliariorũ secundæ auis. Sic multiplica summam milliariorum primæ auis in se, tunc mox habebis summam milliariorum auis secundæ.

Secunda iditur auis uolauerat milliaria 1ȝ/₈ + 1⅝ę + 1ȝ/₈ dum conuenissent. Hoc autem est quadratum numeri, seu summæ prioris uolatus. Sic enim res habet, Progressione posita cuborum, ab unitate naturaliter progredientium, qui signati sint suis radicib. cubicis (id est, numeris ab unitate naturaliter progredientibus) Summa omnium cuborum simul collecta, facit numerum quadratum, cuius radix quadrata, sit summa omnium radicum, eorundem cuborum. Vt

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.

9.	10.	11.	12.	13.	14.
729.	1000.	1331.	1728.	2197.	2744.

15	16	17	18	19	20
3375.	4096.	4913.	5832.	6859.	8000.

Sicut 1.2.3. addita, faciunt 6. ita etiam 1.8.27. addita, faciunt

36. cuius radix est 6. itaq; $1\frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4}$ cum $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$ Hoc est quadratū, cū radice sua, simul sumpta, id est, $1\frac{1}{4}\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}$ æquantur 44310. hoc loco. Vnde per reductionem ad integra 177240 æquantur $1\frac{1}{4}\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}$, Adde iam unitatem utriq; partium æquationis, tunc utrobiq; habebis quadratum radicis rationalis, manente (ut scis) æquatione. Itaq; radix quadrata de 177241. facit 421. Et radix quadrata de $1\frac{1}{4}\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 1$. facit $1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} + 1$. Necesse est autem ut quorum quadrata æquantur, eorum etiam radices æquentur. Cum igitur, $1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2} + 1$. æquentur. 421. Restat ut $1\frac{1}{4}$. æquetur $420 - 1\frac{1}{2}$. Itaq; $1\frac{1}{2}$. facit 20.

Prima igitur auis uolauerat 210 Mil.

Secunda uolauerat 44100 Millia.

Scilicet progressio numerorum naturalis ad unitate usq; ad 20 facit 210 unitates.

Et progressio naturalis cuborum ab unitate usq; ad 8000. (qui est uigesimus) facit 44100 unitates. faciunt autem 210. & 44100. simul addita 44310.

Potuit nihilominus exemplum præsens præter operationem hanc iucundam, aliam habere operationem, uidelicet cum summa cuborum faciat quadratum summæ radicum (ut dictū est) sic potest formari pronunciatio.

Quæratur numerus, ad quem additum suum quadratum, faciat. 44310.

Numerus est $1\frac{1}{2}$. eius quadratum est $1\frac{1}{4}$. Itaq; $1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}$ æquantur 44310. Vnde $1\frac{1}{4}$ facit $44310 - 1\frac{1}{2}$ facit $1\frac{1}{2}$. 210. Ergo $1\frac{1}{4}$ facit 44100.

Inuentis itaq; milliarijs, restat ut dies etiam inuenias. Resolue 210. in progressionem numerorum naturalem, id est,

Quæratur progressio numerorum naturalis, cuius termini additi faciant 210.

Cuilibet summæ progressionis numerorum naturalis, potest æquari fractio hæc $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}$. Si igitur ea æquetur 210. fa-

ciet tibi 12ℓ. 20. Et tot habebit progressio illa terminos. Item Maximus terminus faciet etiam 20 unitates.

Sic $1\frac{1}{8}\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\text{ℓ}^{\text{ℓ}} + 1\frac{1}{8}$ potest æquari cuilibet summæ cuborũ progredientium naturaliter ab unitate. Si igitur æquetur 44100. inuenies iterum 12ℓ facere 20. sicut prius, &c.

Exemplum aliud Hiero. Car. quod ponit Capite 51. numeris tamen surdis mutatis in rationales.

QVidam lusit tribus diebus. Primo die lucratus est quantum prius habuit. Secundo die lucratus est radicem quadratam totius pecuniæ prioris plus 2 florenis. Tertio die lucratus est quantum facit quadratum summæ superioris totius. Et tunc inuenit summam totam omnium supradictorum facere 5550.

Quæstio. Quantum habuit à principio? Habuit primo $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$. Et primo die lucratus est $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$. Habuit ergo iam $1\frac{1}{8}$. Secundo itaq; die lucratus est $1\text{ℓ} + 2$. Vides iam quo consilio receptus sit $\frac{1}{2}\frac{1}{8}$. à principio operationis, uidelicet, ut iam posset 1ℓ educi. Die igitur secundo, post peractũ ludum, habuit. $1\frac{1}{8} + 1\text{ℓ} + 2$. Tertio die lucratus est summã quadratam de $1\frac{1}{8} + 1\text{ℓ} + 2$. Hoc est. $1\frac{1}{8}\frac{1}{8} + 2\text{ℓ}^{\text{ℓ}} + 5\frac{1}{8} + 4\text{ℓ} + 4$. Et sic illo die, post ludum habuit summam hanc. $1\frac{1}{8}\frac{1}{8} + 2\text{ℓ}^{\text{ℓ}} + 6\frac{1}{8} + 5\text{ℓ} + 6$. Et hæc summa æquatur (iuxta pronunciationem exempli) huic numero. 5550. Quod cum ita sit, & uideas summam prædictam esse aggregatam, ex quadrato quodam, atq; ex radice eius, Necesse est ut etiam 5550. sit numerus aggregatus ex quadrato quodam, sumpto cum sua radice. Vnde hoc exemplum secundatium sequitur.

Quæritur numerus ad quem additum suum quadratum faciat 5550.

Pone igitur quod quadratum illud faciat $1\text{A}\frac{1}{8}$. tunc radix eius quadrata faciet 1A. Et sic $1\text{A}\frac{1}{8} + 1\text{A}$, æquabitur 5550. Itaq; $1\text{A}\frac{1}{8}$. æquabit 5550 — 1A. Facit 1A. 74. Ergo cum. $1\frac{1}{8}\frac{1}{8} + 2\text{ℓ}^{\text{ℓ}} + 6\frac{1}{8} + 5\text{ℓ} + 6$. æquetur. 5550. Sequitur quod. 74.

æquetur

æquetur 1 ☉ + 12 ☽ + 2. Nam ſicut prædicta ſumma (quam dixi æquari huic numero. 5550) eſt aggregata ex 1 ☉ + 12 ☽ + 2 & ex quadrato eius. Sic 5550. eſt aggregatus ex 74. & radice eius, ſcilicet 74. & 5476. faciunt additione ſui 5550. Et cum 74 æquetur huic ſummæ (ut dictum eſt) 1 ☉ + 12 ☽ + 2. Sequitur 1 ☉. facere 72 — 12 ☽. Facit itaq; 12 ☽. 8. Cuius quadratum eſt 64. Itaq; luſor ille primo antequàm primo die luderet, habuit $\frac{1}{64}$ ☉ id eſt, 32 ℔. Et primo die ludēs acquiſiuit ludēdo $\frac{1}{64}$ ☉ id eſt, 32 ℔. Et ſic habuit 64 ℔. Secundo die lucratus fuit radicem quadratam de 64. id eſt 8 ℔. plus 2 ℔. Et ſic ſecundo die poſt ludum habuit 74 ℔. Tertio igitur die lucratus eſt 5476 ℔. Hoc eſt, quadratum de 74. Et ſic tandem habuit 5550 ℔.

Exemplum Hieronymi Cardani quod Capite 66. ponit, loco nonageſimoquinto, mutatum eſt autem ex numeris irrationalibus in numeros rationales.

QVærantur quatuor numeri continue proportionales, quorum ſumma aggregationis faciat 45. Et ſumma aggregationis quadratorum eorum faciat 765.

Si fuerint quatuor numeri continue proportionales, fueritq; aggregatum quadratorum (ut hic eſt 765) diuiſum per aggregatum ex numeris illis continue proportionalibus (ut hic eſt 45) tunc quotiens diuiſionis illius, æquatur Quotienti illi, de quo iam dicam.

Summam aggregationis quadratorum (ut hic eſt 765) ſubtrahe à quadrato aggregationis numerorum (ut hic eſt 2025. cum numeri aggregati faciant 45) & à dimidio relicti illius (quod dimidium hic eſt. 630.) ſubtrahe quadratum aggregationis duorum numerorum mediorum (de quibus paulo infe rius) & hoc relictum diuide per aggregatum ex mediis illis numeris duobus. Tunc quotiens diuiſionis illius æquatur Quotienti illi de quo ſuperius dixi.

Ponē

Pone ergo, quòd duo medij illi numeri (ex quatuor proportionalibus, simul sumpti) faciant 12. tunc quadratū aggregationis eorum facit 18. Et sic $\frac{630}{12} - \frac{18}{2}$ æquabitur 17 (id est, Quotienti prouenienti ex diuisione 765 per 45. Ergo per reductionem fiet ut 18. æquetur $630 - 17\mathfrak{Q}$. Facit $12\mathfrak{Q}.18$. Et tantum faciunt duo numeri medij. Faciunt ergo duo numeri extremi 27. cum summa omnium quatuor faciat 45.

Vides iam ut exemplum illud prædictum, requirat exemplum secundarium, tanquam partem sui alteram. Et hoc sic pronunciatur. Diuide 18. & 27. in quatuor partes continue proportionales, ita ut 18. constituat duas partes medias, & 27 cōstituat duas partes extremas.

Partes illæ sic stant,

$$1\mathfrak{Q}. \quad 1A. \quad 18 - 1A. \quad 27 - 1\mathfrak{Q}.$$

Cum autem fuerint quatuor numeri continue proportionales, tunc si ex aggregato duorum mediorum, feceris cubum, & cubus ille diuidatur per aggregatum collectum ex additione extremorum, et triplo aggregati mediorum, tunc quotiēs proueniens æquatur producto prouenienti ex multiplicatione, uel mediorum in se, uel extremorum inter se. Vt numeris sic stantibus. 8. 12. 18. 27.

8	12	18	27
	12	18	
	12	18	

Addo 12. & 18. fiunt 30. cuius cubus facit 27000. Hunc cubū si diuiseris per aggregatum omnium numerorum figuræ huius id est, per 125. tunc producitur quantum faciunt duo extremi (id est, 8 & 27) inter se multiplicati. Vel quantum faciunt duo medij (id est, 12 & 18) inter se multiplicati.

Sic etiam in exemplo nostro, duo medij faciunt additione sui 18. cuius cubus facit 5832. qui diuisus per aggregatum ex

18 ter

18 ter,& duobus extremis ſemel(id eſt,per 81)facit 72.Et tantum facit etiam 1 A multiplicatū in 18 — 1 A,Itaq; 18 A — 1 A⧸ æquantur 72,facit 1 A.6.

Sic 27 2ę — 1 ⧸ æquantur 72.facit 1 2ę.3.

Sic igitur ſtant numeri quatuor continue proportionales exempli noſtri præſentis.

3. 6. 12. 24.

Si aūt ſic ſteterint quatuor numeri cōtinue proportionales,

1 2ę. 1 A. 15 — 1 2ę. 30 — 1 A.

Tunc huiuſmodi pronunciationē ſubindicat.

Diuidantur 15 & 30 in quatuor partes continue proportionales,ita ut 15 conſtituat primam & tertiam, Et 30 conſtituat ſecundam & quartam.

Quæ autem eſt proportio aggregati ex prima & tertia, ad aggregatū ex ſecunda & quarta, ea eſt proportio primæ partis ad ſecundam. Sic igitur proportio 15 ad 30 ſatis indicat partes ſic repræſentari. 1 2ę. 2 2ę. 4 2ę. 8 2ę.Itaq; 15 2ę æquantur 45(id eſt,15 + 30.)facit 1 2ę.3. Et ſic ſtant numeri,

3. 6. 12 24

Si autem ſic ſteterint numeri quatuor continue proportionales,

1 2ę. 9 — 1 2ę. 1 A. 36 — 1 A.

Tunc talis ſubintelligtur pronunciatio exempli.

Diuidantur 9 & 36 in quatuor partes continue proportionales,ita ut 9 conſtituat primam & ſecundam.& 36 conſtituat tertiam & quartam.

Quæ autem eſt proportio primæ & ſecundæ ſimul ſumptarum,ad tertiam & quartam ſimul ſumptas, ea proportio dimidiata,dabit proportionem primæ ad ſecundam. Iterum igitur inueniuntur partes ſic repræſentari. 1 2ę.2 2ę.4 2ę.8 2ę.Et ſic iterum 15 2ę æquantur 45(id eſt,9 + 36)facit 1 2ę iterum 3.

Sic ſi prima in tertiam multiplicata faciat 36.et ſecunda in quartam multiplicata faciat 144. Cum proportio inter pro

ducta posita sit dupla, necesse est ut proportio inter primam et secundam sit dupla.

Sic si prima in secunda multiplicata faciat 18. Et tertia in quartam faciat 288. Cum sit proportio 288 ad 18. sedecupla, equitur secundam ad primam esse duplam, &c.

Aliud exemplum Hiero. Cardani, quod sumptum est ex Capite 51 Arithmeticæ suæ. Sunt tamen ita numeri exempli mutati, ut pro irrationalibus habeamus rationales.

Diuidatur numerus iste 468. in duas partes, ita ut quadratum partis minoris, multiplicatum in partem maiorem, faciat. 5359375. Et quadratum partis maioris multiplicatum in partem minorem faciat. 14706125.

Hic obseruandum est, quòd radices cubicæ, numerorum illorum duorum qui in hac pronunciatione exprimuntur, mediant proportionaliter inter partes diuisionis. Sic igitur stant duæ partes diuisionis cum suis medijs proportionalibus interpositis. 1ꝙ. 175. 245. 468 — 1ꝙ. Notum est autem ut primus numerus multiplicatus in tertium, faciat quantum secundus in se. Itaq; 245 2ꝙ æquãtur 30625. facit 1ꝙ. 125. Ergo 468 — 1ꝙ. facit 343. Itaq; iam sic stant numeri.

125. 175. 245. 343.

Et 125. cum 343. sunt partes diuisionis prædictæ.

Simile exemplum de Arithmetica progressione quatuor terminorum sic pronunciaretur. Diuidatur numerus iste 23. in duas partes, ita ut duplum partis minoris, additum ad partem maiorem, faciat 30. Et duplum partis maioris, additũ ad partem minorem faciat 39.

Sicut autem circa exemplum superius, dictum fuit, quod radices cubicæ, numerorum in pronunciatione positorum, medient proportionaliter, id est, iuxta progressionem Geometricam, sic nunc dico, quòd partes tertiæ, ex utroq; numero in pronunciatione exempli similis, posito, medient inter partes diuisionis

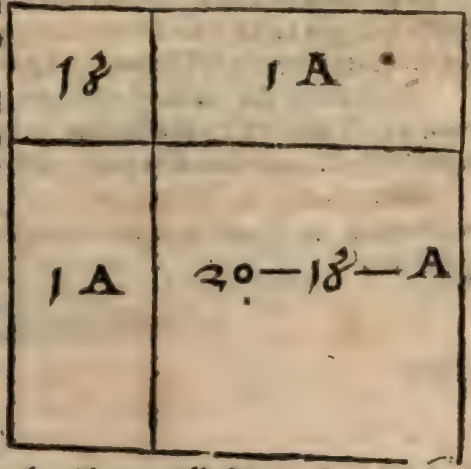
sionis, iuxta progressionem Arithmeticam. Vt sic stet dispositio. 12ę. 10. 13. 23—— 12ę.

Hæc ideo dicuntur, ut uideas rationem eorum quæ dicta sunt circa exemplum Cardani iam positum. Scis enim ex ijs quæ libro primo docui, ut quod in Geometrica progressione est radix cubica numeri, in Arithmetica est tertia pars numeri. Et quod in Geometrica est quadratum, in Arithmetica est duplum, &c.

Aliud Exemplum Hieronymi Cardani, quod est 96 Capite 66.

QVærantur duo numeri, quorũ additio ad se, faciat quantum multiplicatio eorum inter se. Ipsi uero numeri collecti ad summam suorum quadratorum, faciant cum tota aggregatione 20.

Quæstio. Quantum faciunt numeri illi? Minor facit 12ę. Maior facit 1A— 12ę. Ergo summa amborum facit 1A. Et tantum facit etiam multiplicatio eorum inter se. Id quod figura hæc pulchre repræsentat. Deinde quadratum maius partiale, facit 20— 1⅞— 1A. eo quòd iuxta pronunciationem exempli huius nõ faciat 20. nisi ad ipsum accedat alterũ quadratũ partiale, quod faciat 1⅞. & insuper ambæ radices quadratorum illorum partialium facientes 1A. accedant.



Quadratum igitur tale facit 20—+ 1A. Vt facile uides ex collectione, seu additione

particularum, seu partialium superficierum eius. Et radix eius quadrata facit 1A. ut necesse sit eandem superficiem quadratam totalem, etiam facere 1A ⅜. Itaq; 1A ⅜ æquatur 20 + 1A. Facit 1A. 5.

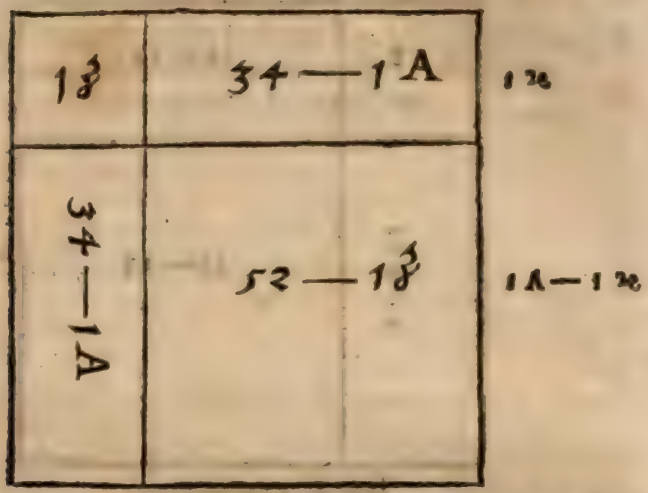
Resoluto iam 1A. resoluenda restat 1 2ę. quæ facile resolutur. Scilicet una ex superficiebus altera parte longioribus, area sua facit 1A, id est, 5. Et eam superficiem continent duæ lineæ quarum una facit 1 2ę & altera facit 5 — 1 2ę. Et sic, 5 2ę — 1 ⅜. æquantur 5. cum utrunq; eorum sit area eiusdem superficiei altera parte longioris. Vnde 1 2ę facit. 2 ½ — √ ⅜ 1 ¼. tanquam numerum minorem. Et sic 1A — 1 2ę. maior numerus facit 2 ½ + √ ⅜ 1 ¼. Quadratum ergo minoris facit 7 ½ — √ ⅜ 33 1 ¼. Et quadratum maioris numeri facit 7 ½ + √ ⅜ 33 1 ¼. Vnde aggregatum quadratorum facit 15. ad quod si addas aggregatum ex ipsis numeris (quod facit 5) colligentur simul 20. Vt habet pronunciatio exẽpli. Item 2 ½ — √ ⅜ 1 ¼. & 2 ½ + √ ⅜ 1 ¼ inter se multiplicata, faciunt 5.

Et ad hunc modum fiunt etiam exempla illa, quæ Cardanus ponit pro regulis suis ambabus, quarum unam uocat De duplici, alteram uocat De medio. Quale est exemplũ sequens.

Quærantur duo numeri, quorum quadrata simul addita faciant 52. & uno ducto in alterum, productum fiat, quod cum numeris ipsis ambobus illis sumptum, faciat 34.

Minor faciat 12ę. Et maior faciat 1A + 1 2ę. tunc ambo simul faciunt 1A. Vnde sic stabit exemplum relatum ad figuram quadrati.

Cum

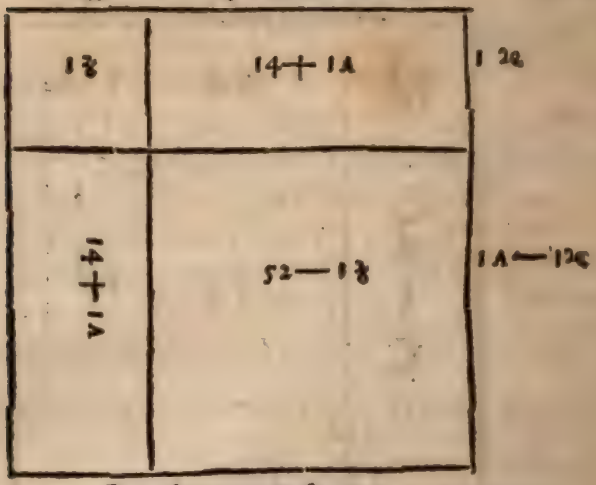


Cum igitur 1 A. sit radix quadrata, huius figurati quadrati totalis, ideo area quadrati facit 1 A ⅁. Et si particulas eius omnes in unam summam collegeris, inuenies 120 — 2 A. Ergo æquatur summæ illi 1 A ⅁. Facit 1 A. 10. Et sic superficies una, altera parte longior, facit 24. quæ cum contineatur sub duabus lineis, quarum una faciat 1 ⅁. & altera faciat 10 — 1 ⅁. Sequitur eandem superficiem etiam facere 10 ⅁ — 1 ⅁. Et sic uenit æquatio inter 10 ⅁ — 1 ⅁ & 24. facit 1 ⅁. 4. &c.

Item hoc exemplum.

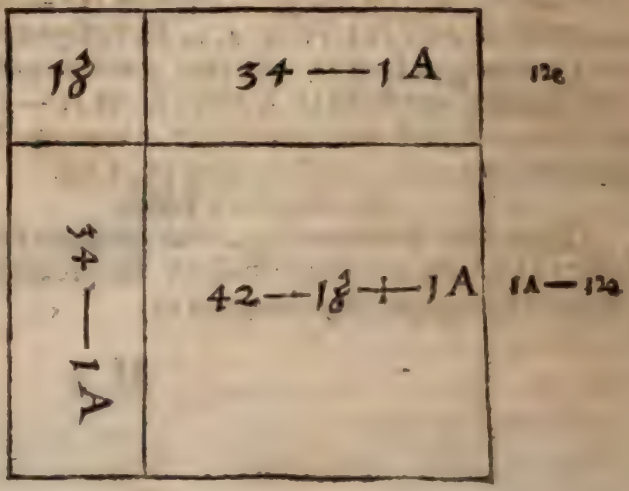
Quærantur duo numeri, quorum quadrata simul addita faciant 52. Ducto autem uno in alterũ, fiat productum, à quo subtracti duo numeri illi, relinquant 14.

Figura exempli huius sic stat.



Item hoc exemplum.

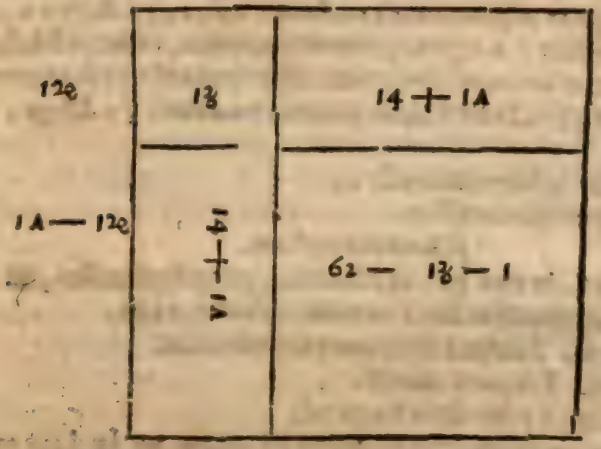
Quærantur duo numeri, quorum multiplicatio inter se, cũ additione eorundem numerorum ad productũ illud, faciat 34. Quadrata uero ſũcta, remotis ipſis radicibus eorũ faciat 42 Sic ſtat exempli huius figura.



Item hoc exemplum, &c.

Quærantur duo numeri, quorum multiplicatio inter se, remotis à producto ipsis numeris, faciat 14. Et quadrata eorum addita ad se, cum radicibus suis superadditis faciant 62.

Figura exempli huius sic stat.



Exemplum aliud Hiero. Car. nisi quod numeri sunt mutati.

QVærantur duo numeri, quorum differentia multiplicata in differentiam quadratorum suorum, faciat 792. aggregatum q; numerorum illorum duorum, multiplicatum in aggregatum quadratorum eorum, faciat. 5720.

Maior numerus. 1A + 12℘

Minor numerus. 1A — 12℘

Differentia eorum est. 2 2℘

Aggregatum eorum est. 2A.

Quadratum maioris. 1A⅋ + 1⅋ + 2 2℘A.

Quadratum minoris. 1A⅋ + 1⅋ — 2 2℘A.

Differentia quadratorum. 4 2℘A.

Aggregatum quadratorum. 2A⅋ + 2⅋.

Itaq;

Itaq; 2 2ę multiplicatæ in 42ę A faciunt 8 ⅔ A, quæ æquantur 792. facit 1 ⅔ A. 99.

Item 2A multiplicata in 2A ⅔ + 2 ⅔ facit 4 Acę + 4 ⅔ A. æquata 5720.

Superius autem uidimus 1 ⅔ A facere 99. Ergo 4 ⅔ A faciunt 396. Et sic 4 Acę æquantur. 5324. facit 1 Acę. 1331. facit 1 A. 11

Resoluto iam 1 A. repete pronunciationem, Scilicet Multiplica differentiam numerorum in differentiam quadratorum id est, 2 2ę in 44 2ę. facit 88 ⅔. æquatos 792. facit 1 ⅔ 9. Ergo 1 2ę facit 3.

Numerus igitur maior est. 14.

Et numerus minor est. 8.

Aliud exemplum.

Diuide 76. in tres partes continue proportionales, ita ut multiplicatio medij in duos extremos, faciat. 1248.

38 + 12ę. Summa duorum extremorum.

38 — 12ę. Est pars media.

Est autem 38 pars dimidia ex 76.

Cum ergo multiplicatio medij, id est, 38 — 12ę. In duos extremos, hoc est, in 38 + 12ę. faciat 1444 — 1 ⅔. Sequitur quòd hoc productum æquetur numero posito in pronunciatione, id est, 1248. facit 1 ⅔. 196. Et sic 12ę facit 14. Vnde 38 — 12ę facit 24. & est pars diuisionis media. Oritur autem iam noua pronunciatiò hæc cum 38 + 12ę faciant 52.

Diuidantur 52. in duas partes, ita ut 24 mediet inter eas proportionaliter.

Sic stant partes diuisionis illius.

1 A. 24. 52 — 1 A.

Itaq; 1 A. in 52 — 1 A. facit 52 A — 1 A ⅔. æquata 576. facit 1 A. 16.

Itaq; 76 diuiditur (iuxta priorem pronunciationem) in 16. 24. 36. &c.

Aliud exemplum.

Quæran-

Quærantur tres numeri continue proportionales, ita ut multiplicatio duorum extremorum, per differentiam, quam habent extremi simul, ultra numerum medium, faciant 4335. Et multiplicatio eiusdem differentiæ, in summam omnium trium faciat 6069.

1 A + 1 2ę. Est summa extremorum.

1 A — 1 2ę. Est summa medij.

2 A. Est summa omnium trium.

2 2ę Est differentia quam habent extremi ultra medium. Itaq; 2 2ę multiplicatæ in summam extremorum, id est, in 1 A + 1 2ę. faciunt, 2 2ę A + 2 $\frac{2}{3}$. æquata. 4335. Deinde 2 2ę multiplicatæ in 2 A seu in summam omnium, faciunt 4 2ę A æquata 6069.

Confer iam duas æquationes illas. Nam ex priore sequitur quòd 1 2ę A faciat $\frac{4335}{2} + 2\frac{2}{3}$ Ex posteriore autẽ sequitur quod 1 2ę A. faciat $\frac{6069}{4}$. Sequitur ergo quod $\frac{4335}{2} + 2\frac{2}{3}$ & $\frac{6069}{4}$ inter se æquentur. Quia quæ uni & eidem sunt æqualia, etiam sibi inuicem sunt æqualia. Ergo (per reductionem) 17340 — 8 $\frac{2}{3}$ æquantur. 12138. facit 1 $\frac{2}{3}$. 650 $\frac{1}{4}$ Et 1 2ę. facit 25 $\frac{1}{2}$.

Restat iam ut 1 A. etiam resoluatur, facit autem (ut paulo superius uidimus) 1 2ę A. $\frac{6069}{4}$. Cum igitur duo illa inter se sint æqualia, Diuide utrunq; per 1 2ę. tunc inuenies 1 A. æquari, seu facere. $\frac{6069}{4 \text{ 2ę}}$. Cum autem 1 2ę faciat 25 $\frac{1}{2}$. facient 4 2ę. 102. Itaq; 6069. diuisa per 102. faciunt 59 $\frac{1}{2}$. Et tantum facit 1 A. Quare 1 A — 1 2ę. id est, medius numerus facit 34. Et 1 A + 1 2ę, id est, summa duorum extremorum facit 85. Iam igitur oritur noua quæstio hæc.

Diuidantur 85 in duas partes, ita ut 34 mediet inter eas proportionaliter.

Sic stant numeri.

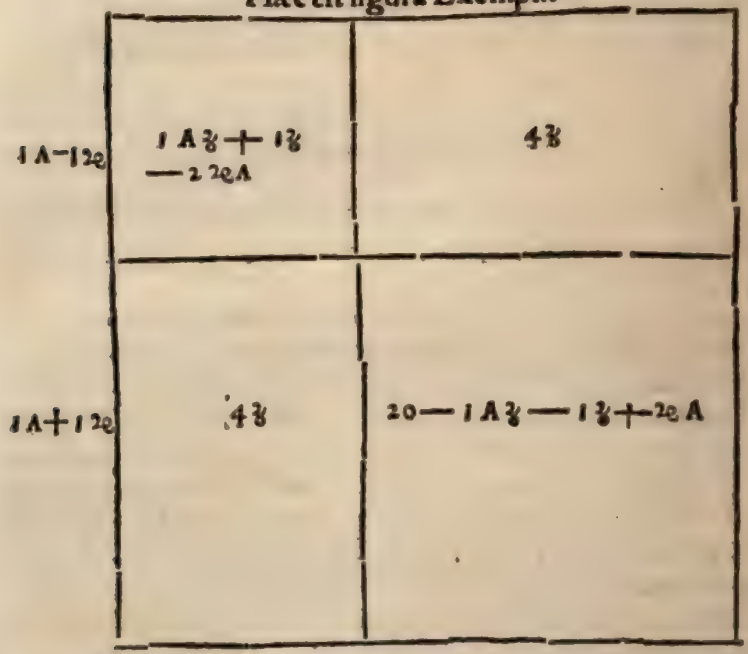
1 B. 34. 85 — 1 B.

Vnde 85 B — 1 B $\frac{2}{3}$ æquatur 1156. facit 1 B 17. Et sic stant numeri exempli. 17. 34. 68.

Exemplum Hieronymi Cardani. 94. Capitis 66.

QVærantur duo numeri, quorum differentia in se ducta, faciat quantum multiplicatio unius in alterum. Et eorū quadrata faciant 20.

Hæc est figura Exempli.



Differentia maioris numeri supra minorem facit 2 2♎. quæ multiplicata in se, faciat 4 ♑. Et huic æquatur productū unius numeri in alterum, id est, 1 A ♑ — 1 ♑ facit 1 A ♑. 5 ♑.

Item radix quadrata totius figuræ, facit 2 A (& est summa amborum numerorum) Vnde 4 A ♑. est area totius superficiei. Item area eiusdem superficiei facit 20 + 8 ♑. ut uides ex colle

collectione particularum eius. Et sic 1A ⅞ facit 5 + 2⅞.

Et quia superius uidisti etiam 1A ⅞ facere 5⅞. ideo sequitur, 3⅞. æquari 5. facit igitur 1⅞ 1⅓. Et 1 ☍ facit √⅞1⅓.

Resoluta 12☍. Restat ut 1A resoluatur. Vidimus autem superius quod 1A ⅞ faciat 5⅞. id est, 8⅓. Ergo 1A facit √⅞8⅓.

Sunt ergo numeri inuenti.

Primus, id est, minor √⅞8⅓ — √⅞1⅓.

Secundus, id est, maior √⅞8⅓ + √⅞1⅓.

Differentia eorum est √⅞6⅔.

Vide ut differentia in se faciat 6⅔. Et tantum facit numerus inuentus minor, in maiorem multiplicatus.

Quadratum maioris. 10 + √⅞55 5/9.

Quadratum minoris. 10 — √⅞55 5/9.

Exemplum Cardani 78 Capitis 66.

DIuidantur. 182. in tres partes continue proportionales, ita quod prima multiplicata per secundam, et secunda per tertiam, & tertia per primam, faciant 7644.

Diuide 7644 per 182. tunc producitur media pars, quæ facit 42. Restat igitur ut duæ reliquæ partes simul faciant 140.

Sic igitur stant partes diuisionis.

1 ☍. 42. 140 — 1 ☍.

Itaq; 140 ☍ — 1⅞. æquantur. 1764. facit 1 ☍. 14. Vnde sic stant partes inuentæ. 14. 42. 126.

Exemplum aliud.

DIuidantur 78 in tres partes continue proportionales, ita ut eodem numero (id est, 78) diuiso per quamlibet partiũ eius, ex additione Quotientum fiant 18 7/9.

Sic stant partes diuisionis.

1 ☍. 1A 1B.

Sic ergo stant Quotientes.

78. 78. 78.

1 ☍. 1A. 1B.

Regula, Quantum fit ex multiplicatione medij in se, tantum fit ex additione Quotientum ad se.

Fit autem ex multiplicatione $\frac{78}{1A}$ in se $\frac{6084}{1A\frac{8}{9}}$. Et ex additione trium Quotientum positorum fiunt $18\frac{7}{9}$. Vt patet ex pronunciatione exempli. Ergo $\frac{6084}{1A\frac{8}{9}}$. æquatur cū, $18\frac{7}{9}$. facit $1A\frac{8}{9}$. 324. facit 1A. 18. Vnde amodo sic stant partes diuisionis.

$$1\text{2}. \qquad 18. \qquad 60 - 1\text{2}.$$

Et sic $60\text{2} - 1\frac{8}{9}$ æquātur 324. facit 1 2. 6. Et sic partes diuisionis prædictæ sunt.

$$6. \qquad 18. \qquad 54.$$

Exemplum Hieronymi Cardani 119

Capitis 66.

QVærantur tres numeri continue proportionales, quorū primus multiplicatus in secundum, faciat 10. & aggregatum quadratorum primi & secundi, æquetur quadrato tertij,

Sic stant numeri tres.

$$\frac{1\text{2}.}{1,} \qquad \frac{10.}{1\text{2}.} \qquad \frac{100.}{1\text{c}.}$$

Sic stant quadrata,

$$\frac{1\frac{8}{9}.}{1,} \qquad \frac{100.}{1\frac{8}{9}.} \qquad \frac{10000.}{1\frac{8}{9}\text{c}}$$

Duo ergo quadrata priora, æquātur tertio. Et sic $1\frac{8}{81} + \frac{100}{1\frac{8}{9}}$ equatur $\frac{10000}{1\frac{8}{9}\text{c}}$. Reduc æquationem ad denominatores æquales, tunc (remotis denominatoribus) uidebis æquari $1\frac{8}{81} + 100\frac{8}{81}$ cum 10000. facit $1\frac{8}{81}$. 10000 — $100\frac{8}{81}$. Et $1\frac{8}{81}$ facit $\sqrt{\frac{8}{81}}12500 - 50$. Et $1\frac{8}{9}$. facit $\sqrt{\frac{8}{9}}.\sqrt{\frac{8}{81}}12500 - 50$. Et 1 2 facit $\sqrt{\frac{8}{81}}.\sqrt{\frac{8}{81}}12500 - 50$. Et est numerus primus qui quærebatur Secundus ergo numerus facit hanc minutiam.

$$\frac{10}{\sqrt{\frac{8}{81}}.\sqrt{\frac{8}{81}}12500 - 50}$$

Hoc est, $\sqrt{\frac{8}{81}}.\sqrt{\frac{8}{81}}12500 + 50$.

Et ter-

Et tertius facit hanc minutiam.

100

$\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 50000000000000 - 2000000.$

Hoc est. $\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 50000 + 200.$

Obserua igitur, quòd diuidere 10 per $\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 12500 - 50$ (quod ad Algorithmum pertinet) est diuidere 10000. per $\sqrt{}\ 12500 - 50$. Sic diuidere 100, per $\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 50000000000000 - 2000000$. est diuidere, 100000000, per $\sqrt{}\ 50000000000000 - 2000000$.

Sic ergo stant tres numeri exempli huius inuenti.

Primus. $\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 12500 - 50.$

Secundus. $\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 12500 + 50$

Tertius. $\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 50000 + 200$

Proba Primo uide an multiplicatio $\sqrt{}\ 12500 - 50$. in $\sqrt{}\ 50000 + 200$. faciat $\sqrt{}\ 12500 + 50$. Sic enim scies radices eorum zensizensicas (id est, numeros ipsos exempli) esse continue proportionales.

Secundo uide an multiplicatio $\sqrt{}\ 12500 - 50$. in $\sqrt{}\ 12500 + 50$. faciat 10000. Sic enim scies, radices eorum Zensizensicas, inter se multiplicatas, facere $\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 10000$. Hoc est 10. ut habet pronunciatio.

Tertio uide, utrũ $\sqrt{}.\sqrt{}\ 12500 - 50$ addita ad $\sqrt{}.\sqrt{}\ 12500 + 50$. faciat $\sqrt{}.\sqrt{}\ 50000 + 200.$

Sic autem stat exemplum ad regulam additionis.

$\sqrt{}.\sqrt{}\ 12500 + 50. + .\sqrt{}.\sqrt{}\ 12500 - 50$

$\sqrt{}.\sqrt{}\ 12500 + 50. + .\sqrt{}.\sqrt{}\ 12500 - 50$

Summa multiplicationis huius facit.

$\sqrt{}\ 50000 + 200$. Ergo additio facit $\sqrt{}.\sqrt{}\ 50000 + 200.$

Sic $\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 12500 - 50$. ad

$\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 12500 + 50$. facit

$\sqrt{\frac{}{}}\sqrt{}\ 50000 + 200.$

Exemplum Hiero. Car. 112. Capitis 66.

Quære numeros quatuor continue proportionales, quorũ multiplicatio inter se faciat 81. Productum uerò primi in secundum faciat 6.

Sic stant numeri.

12.	6.	36.	216
1.	12.	1ce.	1ß.

Notum est autem ut productum duorum mediorum inter se, sit radix quadrata producti quod fit ex quatuor proportionalibus continue, inter se. Itaq; $\frac{216}{1}$ æquatur 9. Et sic 9 ⅋ æquantur cum 216. facit 1 ⅋. 24. Et 1 ⅋ facit $\sqrt{⅋24}$. Et 12 facit $\sqrt{⅋24}$

Vnde sic stabunt numeri resoluti.

$\sqrt{⅋24}$. $\sqrt{⅋54}$. $\sqrt{⅋121\frac{1}{2}}$. $\sqrt{⅋273\frac{3}{8}}$.

Exemplum Hiero. Car. 80. Capitis 66.

Geometrice pronunciatum.

CONstituatur triangulus, habens latera continue proportionalia.

Sit diameter circuli 12 partium sui, quæ diuidatur secundum proportionem habentem medium & duo extrema, & per punctum diuisionis illius, trahatur chorda orthogonaliter, tunc dimidia pars chordæ illius, erit latus medium trianguli constituendi, & portio minor, diuisæ diametri, erit latus minus & sic latus maius seu hypotenusa trianguli, erit chorda arcus intercepti à duobus lateribus prædictis.

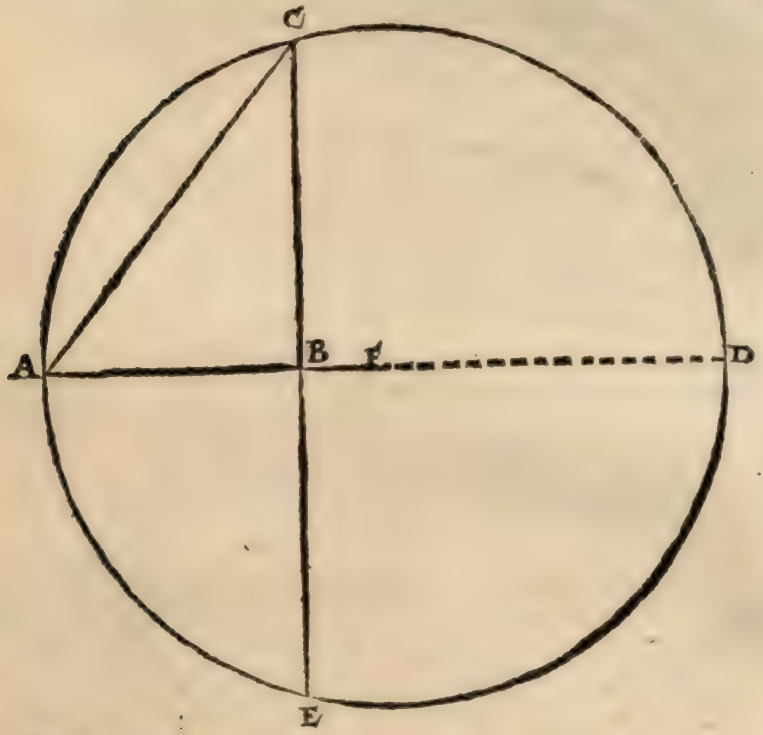
F D est semidiameter circuli. Et B D est portio maior diuisæ diametri. Et A B minor portio est.

Satis autem uides, geometrica ratione, b c esse medium proportionale inter a b & b d. Est autem a c æqualis b d. Vnde cum a d faciat 12. faciet a b. 18 — $\sqrt{⅋180}$.

Faciet q; b c $\sqrt{⅋}$. $\sqrt{⅋103680}$ — 288. Et a c faciet $\sqrt{⅋180}$ — 6. Et sic lineæ sunt cõtinue proportionales uidelicet a b, b c. et c a

Et quadratum lineæ a b, cum quadrato lineæ b c, æquantur quadrato lineæ a c seu b d. Semidiameter est f d.

Quadra



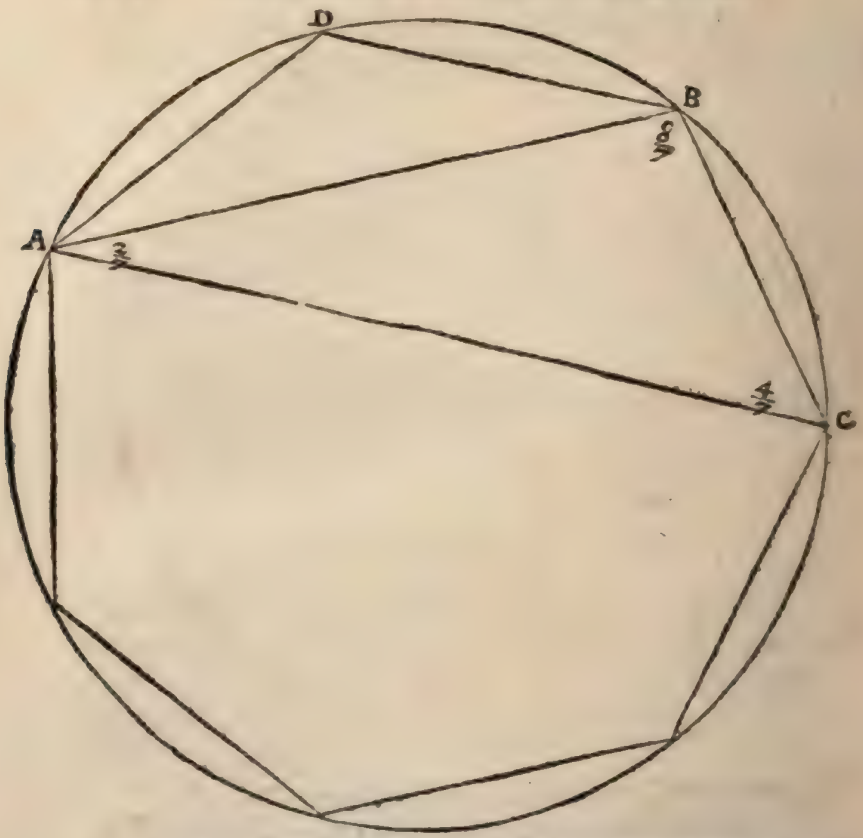
Quadratum lineæ a b facit $504 - \sqrt{3233280}$.
Quadratum lineæ a c. seu b d. facit $216 - \sqrt{325920}$, &c.

Appendix exempli.

Constituatur triangulus, habens angulos proportionales continue.

Vides triangulum a b c inscriptum heptagono æquilatero. Huius igitur angulus minimus uidelicet a. ualet $\frac{1}{7}$ unius recti. Et medius angulus eius, uidelicet c. ualet $\frac{2}{7}$ unius recti, & maximus angulus eius uidelicet b. ualet $\frac{4}{7}$. Ergo anguli illi sunt proportionales continue.

Demonstrationes, Quod



Quòd autem maximus eorum ualeat $\frac{8}{7}$ unius recti, d c demonstro. Angulus d facit $\frac{10}{7}$ unius recti, ut notum est omnes angulos heptagoni cuiuslibet, ualere 10 rectis, &c. Et anguli illi duo uidelicet d a b, & d b a, simul computati, faciunt $\frac{4}{7}$ unius recti, eo quòd sint anguli trianguli, &c. Et cum sint æquales inter se, facit quilibet eorum $\frac{2}{7}$ untuius recti. Ergo necesse est angulum a b c ualere $\frac{8}{7}$ unius recti, cum angulus b totalis ualeat $\frac{10}{7}$ unius recti.

Quo

Quòd uero medius eorum, id est, b c a, ualeat $\frac{4}{7}$ unius recti sic demonstro. Quadrangulũ a d b c, habet angulos quatuor rectis æquales, & duo maiores simul sumpti ualent $\frac{10}{7}$ unius recti. Ergo duo minores ualebunt (si simul computentur) $\frac{4}{7}$ unius recti, & uterq; eorum ualebit separatim $\frac{2}{7}$ unius recti.

Demum quòd minimus eorum, id est, b a c ualeat $\frac{2}{7}$ rectis, Patet ex prædictis, Scilicet a b c, est triangulus, cuius angulus b ualet $\frac{4}{7}$ unius recti, & angulus c ualet $\frac{2}{7}$ unius recti, ut demonstratum est. Ergo angulus eius a ualebit $\frac{2}{7}$ unius recti. Quia necesse est tres angulos cuiuslibet trianguli simul sumptos, cõtinere duos rectos. Itaq; $\frac{12}{7}$ subtractæ à 2. Relinquunt $\frac{2}{7}$. Item quia angulus d a c, facit $\frac{4}{7}$ unius recti, ut paulo superius est demonstratum, & d a b angulus, facit $\frac{2}{7}$ unius recti, necesse est b a c facere $\frac{2}{7}$ unius recti, &c.

Sequuntur nunc quædam pulchræ reductiones æquationum Hiero. Card. ex Capite 22. & ex Capite 51. transcriptæ.

SInt æquata. 25 + 4 ☉ + 2 ☍. cum 16 ☍ + 55. Quæstio est quantum faciat 1 ☍.

Sic operatio fit.

Additur utrique partium æquationis hoc connexum. 2 ☉ + 10 ☍ + 5. Et tunc 2 ☍ + 6 ☉ + 10 ☍ + 30. æquabuntur cum 2 ☉ + 26 ☍ + 60.

Diuide iam utrunq; æquatorum, per 2 ☍ + 6. tunc inuenies 1 ☉ + 5. æquari cum. 1 ☍ + 10. Et cum 1 ☉. æquetur. 1 ☍ + 5. faciet 1 ☍. $\sqrt{☉ 5\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$.

Sequitur alia reductio æquationis & resolutio radicis, per Hieronymum Cardanum.

Sint æquati 3 ☍, huic connexo. 21 ☍ + 18. Est quæstio quantum faciat 1 ☍. Operatio Cardani.

Adde utriq; partium æquationis 12 ☉ + 9 ☍. tunc inuenies æquari 3 ☍ + 12 ☉ + 9 ☍. cum 12 ☉ + 30 ☍ + 18. Diuide iam

de iam utrunq; æquatorum per 3 2ę + 3. Et sic 1 ʒ + 3 2ę. æquabuntur cum 4 2ę + 6. facit 1 ʒ. 1 2ę + 6. Et sic inuenitur 1 2ę facere 3.

Alia eiusdem Car. reductio.

Sit 1 cę. æquatus 8 2ę + 7. Quæstio est quantum faciat. 1 2ę

Adde utriq; partium æquationis unitatem, tunc 1 cę + 1 æquantur 8 2ę + 8. Diuide iam utranq; partem æquationis per 1 2ę + 1. tunc inuenies 1 ʒ — 1 2ę + 1. æquari cum 8. Et sic 1 ʒ æquabitur 1 2ę + 7. facit 1 2ę. √ ʒ 7¼ + ½.

Sic si 1 cę. æquetur 8 2ę — 7. Subtraho ab utraq; parte æquationis 1. Et sic 1 cę — 1. æquatur. 8 2ę — 8. Diuide utranq; partem æquationis per 1 2ę — 1. tunc inuenies. 1 ʒ + 1 2ę + 1. æquari 8. Et sic 1 ʒ. æquabitur 7 — 1 2ę. facit 1 2ę. √ ʒ 7¼ — ½.

Quando autem uis diuidere 1 cę + 1. per 1 2ę + 1. tunc optime (mea quidem sententia) facies si sic opereris, ut 1 cę + 1 sic ponas ad ordinem. 1 cę + 0 ʒ + 0 2ę + 1. Sic inquam signa cossica se sequi debent, ut nullum intermediorum obmittatur. Et ut te iuuem ulterius (nam in Cardano modum hunc non inuenies) uolo exemplum præsens perficere diuidendo.

```
                — ✗ ʒ   ✗ 2ę
✗ cę + ø ʒ + ø 2ę + ✗ ( 1 ʒ — 1 2ę + 1.
✗ 2ę + ✗.
      ✗ 2ę + ✗
            ✗ 2ę + ✗.
```

Sic si uelis diuidere 1 cę — 1. per 1 2ę — 1. stabit figura operationis sic.

```
          ✗ ʒ        ✗ 2ę
✗ cę + ø ʒ + ø 2ę — ✗. ( 1 ʒ + 1 2ę + 1.
✗ 2ę — ✗
      ✗ 2ę — ✗
            ✗ 2ę — ✗
```

Sic si uelis diuidere 1 cę + 1 per 1 2ę — 1. sic stabit figura operationis.

— ✗ ☽ — ✗ 2☉
✗☉ + ⊘☽ + ⊘2☉ + ✗ (1☽ — 12☉ — 1.
✗ 2☉ — ✗
✗ 2☉ — ✗
✗ 2☉ — ✗

Sic si uelis diuidere 1☉ + 8 per 1 2☉ + 2, sic stabit

— ✗☽ ✗ 2☉
✗ 1☉ + ⊘☽ + ⊘2☉ + 8 (1☽ — 2 2☉ + 4.
✗ 2☉ + ✗
✗ 2☉ + ✗
✗ 2☉ + ✗

Sic si uelis diuidere 8 1☉ + 125. per 2 2☉ — 5. sic stabit exemplum.

— ✗0☽ — ✗0 2☉
8☉ + ⊘☽ + ⊘2☉ + 125. (4☽ — 10 2☉ — 25.
✗2☉ — ✗
✗2☉ — ✗
✗2☉ — ✗

Sic si uelis diuidere 16 ☽☽ — 81. per 2 2☉ — 3. Sic stat figura exempli.

✗4 ☉. ✗⊘☽. ✗4 2☉.
16 ☽☽ + ⊘☉ + ⊘☽ + ⊘2☉ — 8✗ (8☉ + 12☽ + 18 + 27.
✗2☉ — ✗
✗2☉ — ✗
✗2☉ — ✗
✗2☉ — ✗

Sic si uelis diuidere 32 ß + 1024, per 2 2☉ — 4. facit Quotiēs diuisionis, 16 ☽☽ + 32 ☉ + 64 ☽ + 128 2☉ + 256. Et sic de alijs infinitis.

Exemplum pulchrum, unius ex alio.

Tres uiatores dum simul ambularent, peram inuenerunt, in qua erant 73 ſ.

Ad hanc ſummam flore. cum primus & ſecundus pecuniã ſuam contuliſſent, inuentum eſt, ſummam illam eſſe duplam ad ſummam primi & tertij, computatam cum ſumma ſecundi & tertij.

Collecta autem ſumma primi & tertij, ad illos 73 ſſ. inuentum eſt, ſummam illam eſſe triplam, ad ſummam ſecundi & tertij, computatam cum ſumma primi & ſecundi.

Collecta uero ſumma ſecundi & tertij, ad illos 73 ſſ. inuentum eſt, ſummam illam eſſe quadruplam, ad ſummam primi et ſecundi, computatam cum ſumma primi & tertij.

Quæſtio. Quantum pecuniæ habuit quilibet uiatorum illorum.

Pone quod primus & ſecundus, habuerint 1 2ℭ florenorum Et quod ſumma primi & tertij, cum ſumma ſecundi & tertij, faciat 1 A florenorum. Tunc 12ℭ + 73. æquatur 2 A. facit igitur 1 A. $^{1}\frac{2ℭ+73}{2}$. iam ſi huic ſummæ addaẽ 1 2ℭ. tunc prouenit ſumma omnium uiatorum duplicata, uidelicet ſumma primi & ſecundi, primi & tertij. Secundi & tertij, faciunt $^{3}\frac{2ℭ+73}{2}$ ſſ.

Secundo pone quod primus et tertius habeant 1 B florenorum, tunc ſumma ſecundi & tertij, cum ſumma primi & ſecundi faciunt $^{3}\frac{2ℭ+73}{2} - {}^{2}B$. Et ſic. 1 B + 73. æquanẽ $^{9}2ℭ + \frac{219}{2} - 6B$ Item, per reductionem ad integra, æquantur 2 B + 146. cum 9 2ℭ + 219 — 6 B. Item 8 B. æquantur 9 2ℭ + 73 facit 1 B. $^{9}\frac{2ℭ+73}{8}$.

Tertio pone quod ſecundus & tertius habeant 1 C florenorum, tunc ſumma primi & ſecundi, cum ſumma primi & tertij faciunt $^{3}2ℭ + \frac{73}{2} = {}^{2}C$. Et ſic 1 C + 73. æquantur cum 62ℭ + 146 — 4 C. Et per reductionem. 5 C. æquantur 62ℭ + 73. Et ſic 1 C (ſi reſoluatur) facit $^{6}\frac{2ℭ+73}{5}$.

Sicut autem $^{3}\frac{2ℭ+73}{2}$. eſt ſumma omnium trium duplicata (ut ſuperius uidimus) ita 12ℭ + 1 B + 1 C. eſt ſumma omniũ duplicata. Nam 12ℭ. eſt ſumma primi & ſecundi. Et 1 B, faciẽs

9 2ℭ

$\frac{9}{6}2\text{ẹ}+73$. est summa primi & tertij. Sic 1 C faciens $\frac{6}{5}2\text{ẹ}+73$. est summa secundi & tertij. Itaque summa omnium duplicata facit $\frac{133}{40}2\text{ẹ}+949$. Et illa igitur æquatur summæ omniũ superiori, id est, $\frac{3}{2}2\text{ẹ}+73$. Et per reductionem ad integra, æquãtur 1202ẹ + 2920. cum 2662ẹ + 1898. Facit 12ẹ. 7.

Et cum 12ẹ faciat 7. facit 1 B. $\frac{9}{6}2\text{ẹ}+72$. Hoc est 17. Et 1 C. Hoc est $\frac{6}{5}2\text{ẹ}+73$ facit 23.

Sequitur iam alia pars exempli.

Tres uiatores habent aliquot ff. Primus & secundus habent 7 flo. Primus & tertius habent ff 17. Secundus & tertius 23 ff.

Quæstio, Quantum habet unusquisq;.

Pone quòd primus habeat 1 D ff. Tunc secundus habebit 7 — 1 D florenorũ, & tertius habebit 17 — 1 D flo. Item idem tertius habebit 23 — 7 + 1 D. flor. Hoc est 16 + 1 D. æquata 17 — 1 D ff.

Facit 1 D. $\frac{1}{2}$ ff.

Itaq; primus habuit $\frac{1}{2}$ ff.

Secundus habuit 6 $\frac{1}{2}$ ff.

Tertius habuit 16 $\frac{1}{2}$ ff.

Habes iam, mi domine Adolphe congesta in hoc appendice omnia illa, quæ me maxime delectarunt, ex tota illa Hieronymi Cardani Arithmetica. Opto autem, ut tu aliquando alia atq; meliora ex ea excerpas.

Vale.

Finis operis Arithmeticæ
Michaelis Stifelij.

De Erratis.

Dño & amico suo Iohanni Petreio Michael Stifel Gratiam & pacem in Christo.

NOsti, uir optime, ut iste liber noster ultra quinquẽ nium, quasi captiuus fuerit detentus, antequam ad manus tuas deueniret, & satis constat conctationem hanc molestam fuisse, cum mihi, tum liberalium artium studiosis multis. Postea usus consilio amicorum, simulaui me uelle librum locupletare, ut ea occasione librum retraherem ad manus meas. Successitq; consilium, atq; ita cœpi rescribere illũ ab exordio, & inter scribendum multa quæ incidissent addebã, multaq; (ut fit) mutabam. Cum autẽ me postea meus promissor irritaret iniuria, & spem mercedis eriperet, destiti ab incepto, donec me compellarent uiri, quibus si difficilis fuissem, nephas esse duxissem. Illi tenominabant mihi, & honorificis uerbis ornabant, atq; ita reiectũ opus denuo instaurare perrexi. Cũq; postea studiosorũ quidam referrent, te præstituisse tempus nundinarum Francofordiensium, p æditione libri, modo ego moræ causam non darẽ, atq; me pollicitationibus solicitarent ut opus maturarẽ, adeo festinare cœpi, ut me tẽpus relegendi quæ dictassem deficeret. Et hinc nata sunt errata quædam, quorum me mea cõscientia reum agit, teq; absoluit. Quanquã in tua quoq; officina nonnulla sentiam esse nata, fortassis ministrorum tuorum incuria. Optimi autem typographi officio uideris mihi functus esse, quòd mihi librum remiseris corrigendum, á tam remoto loco. Sunt enim errata quædam admissa talia, qualia forsitan nullus alius præter me commode emendasset, uti est primum inter illa quæ ponam. Vale.

Regulam

ERRATA.

Regulam de inuentione laterum numerorũ polygonalium positam folio. 24. facie 1. incipiẽte à linea 13. Sic lege Lector. Numerum propositum multiplica per differentiam progressionis tuæ duplatam, & à numero producto subtrahe numerum qui sit minor una unitate quàm differentia. Deinde dimidiatam differentiam multiplicatam in se adde priori producto, & à radice quadrata aggregati illius subtrahe dimidiatam differentiam progressionis tuæ, tunc remanebit extremum maius progressionis illius, atq; ita continuabis progressionem tuam ab unitate usq; ad extremum maius inuentum. Et quot proue nerint termini, tot puncta habebit latus unum numeri tui polygonalis, dum in figuram talem polygonalem resoluitur.

Regulam inueniendi extremum maius proportionalitatis Harmonicæ, per minus extremum & medium, quæ ponitur folio 58. facie 1. sic lege. Multiplica duos tuos numeros inter se, & productum diuide per differentiã, quæ est inter differentiã amborum & terminũ minorem. Item in fine exempli adducti pro regula illa, dele has duas uoces. Differentiam amborum.

Folio 57. facie 1. pro

3	3	
3	7	10

repone

3	3	
3	6	9

Folio 12. facie 2. linea penultima. Lege, incõpositi, pro compositi. Item folio 20. facie 1. linea 14. Lege. 3. 15. pro 1. 15. Item folio 24. facie 2. linea penultima, lege, 369. pro 269. Item folio 26. facie 1. linea 23. sic lege. Medius terminus multiplicatus per numerum cellularũ. Et facie 2. in tertio ordine figuræ quadrangulatæ, transuersaliter procedendo, lege, 189. pro 198. Item folio 54. facie 2. linea 26. pro $\frac{12}{8}.\frac{9}{12}$ lege $\frac{8}{12}.\frac{9}{12}$ Et folio 59. facie 2. linea 6. pro Harmonicam, lege, Contraharmonicam. Et folio 64. facie 1. linea 5. sic lege. Male enim illa se continent intra fines suos. Et folio 66. facie 1. linea 16.

lege sic. 8. mi: in se cubice multiplicata faciunt 8 2~. 32 3~. Et ibidem linea 26. pro 15. mi~ lege, 30. mi~ Et folio 91. facie 2. li. 22. lege 11 $\frac{5}{11}$ Cad: pro 11 $\frac{5}{11}$ Cad. Item folio 106. facie 2. li. 15. sic lege. Vt a b, ad a b n. Et folio 108. facie 1. linea 2. ꝑ B D. lege A B. Et facie 2. li. 11. pro a b. lege, b c. Folio 110. facie 2. li. 3. lege, Radices numerorum. Et ibidem linea 5. lege, √ce. √ce 60 — √ȝȝ200. Et folio 121. facie 1. li. 23. lege sic. Quãdo unus terminus ꝓportionis irrationalis fuerit irrationalis etc̃. Et ibidem li. 28. lege, rationaliũ pro irrationalium. Folio 146. facie 2. li. 18. lege, Si nunquã occurrat. Et sequẽti li. lege, quod tunc tandẽ etc̃. Item fol. 154. facie 1. post figurã li. 6. ꝑ, cõmensurabilem, lege incõmensurabilem.

Folio 200. facie 1. li. 12. lege √ȝ. √ȝ17 + 3. — . √ȝ. √ȝ17 — 3. folio 207. facie 2. post figuram li. 8. lege sic. √ȝ. √ȝ41472 + √ȝ36288. Et linea ultima eiusdem faciei lege. √ȝ. √ȝ41472 — √ȝ36288. Item folio 208. facie 2. li. 23. lege sic. √ȝ. 9000 — √ȝ16200000. Et sequenti li. lege, √ȝ. 7200 — √ȝ25920000.

Folio 212. facie 1. linea 15. pro quatuor, lege, sex. Et folio 215. facie 1. li. 1. lege, Cuius semidiameter sit a c. Et linea 6. pro c b. lege, c f. Item folio 231. facie 1. li. 4. lege 12ꝛ — 36. Item folio 235. facie 1. linea 12. lege, non compræhendat. Item folio 243. facie 2. linea 18. lege, plures radices quãm unã. Item folio 241. facie 1 li. 14. sic lege. 188. qui numerus est 12ꝛ de hoc numero cossico &c. Item folio 256. facie 2. in fine primi exempli, pro 12 $\frac{12}{19}$ lege, 20. Et folio 270. facie 1. li. 12. lege sic (id est 60 — 10 — 5.). Et folio 284. facie 1. linea 2. lege, √ȝ405000. diuiditur in √ȝ101250. & √ȝ101250. Et folio 286. facie 1. li. 7. Sicut (posito hoc exemplo 2700 — 150ꝛ. ut dixi) multiplicares dimidiũ numeri radicum in se. Item folio 293. facie 1. li. 6. pro iuuellum. lege, interuallum. Et linea 26. pro, nominatores. lege, numeratores.

Folio 244. facie 2, et facie 1, sequentis folij, ubicunq; inue-

neris

ERRATA.

neris 12ę. lege, pro eis. 9ę. Item ibidem pro 72—32ę. lege 54—32ę. Et ibidem. pro, 6ę+36. aut 1⅛ æquari 32ę+72. lege tu sic. 6ę+27. aut 1⅛. æquari 32ę+54.

Quod folio 79. ꝓportiones irrationales minoris inæqualitatis, pro ꝓportionibus irrationalibus maioris inæqualitatis, error est paruí momentí, poterit enim lector relationem mutare ad libitum, utcunq; termini relationis ponantur. Et ꝙ folio 261. facie 2. ubi exemplum quintumdecimũ ponitur ad regulam De tri sub hoc Diuisore 252. nihil quidem erratũ est, mallem tamẽ hunc diuisorem esse positũ. 180+32ę. Sic enim regulariter colliguntur Diuisores ex secundis terminis huiusmodi exemplorum. Diuisor autem iste 252. formatus est ex hac dispositione terminorum regulæ De tri.

12ę. 80. 327. 1040.

Inueniet etiam Lector nonnunquã ponĩ, siue, pro sine. Item nr̃m pro numerũ. Item Sed pro scilicet, & eiusmodi alia quæ lectorem non remorantur.

Inueniet etiã aliquãdo peccata qualia ꝓhibẽt puerorũ regulæ, uel maxime nobis senibus. Vt folio 304. facie 2. ubi dum de diuisione partiũ numeri cuiusdã scriberẽ, mox excidit mihi partiũ memoria (nescio qua mentis distractione) ita ut referrẽ masculino genere, non partes numeri, sed numeros partium.

Item folio 211. facie 1. Cum lectorem inspecturum superficies corporũ regularium, remisissem ad Geometriã Alberti Dureri, postea posui uocabula demonstratiua, quibus lector re uocatur tanquam ad præsentes figuras. Cum uero oculos circũfert, nihil eorũ inuenit, quæ uocabula uidebantur ꝓmittere. Male me habet error iste præ cæteris. Sed cum nimium festinarem quatenus ad præstitutum tempus absoluerem librum, & metuerẽ fore ut deliniationes illæ figurarum mihi multũ temporis suffurarentur, uictus hoc tedio, remisi lectorem ad Geometriam prædictam. Postera uero die, cum me solicitaret

Lectoris

Lectoris inopia, cui uidelicet deesset copia uidēdi Geometriā Durerī, tediū q̄ me prius uicerat discussi, illudq̄ ego uici rursum, deliniādo figuras illas sic intermissas, atq̄ ita secundū hæc emēdare cœpi quæ prius scripserā. Si autē paulo altius emēdationē illā incepissē, sublata quidē fuisset fœda hæc discrepātia, at pditis (ut uideo) chartulis figurarū illarū, quas libro imposuerā, lectori nihilo meliꝰ fuisset cōsultū. Oportet igit̄ ut uel hic saltē figurarū huiusmodi deliniatiōes intueri atq̄ intelligere possit Lector.

Superficies corporis quattuor basiū explicata in plano.

Talis figura excisa, & cōplicata dabit figuram corporis regularis quattuor basium.

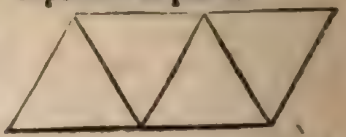
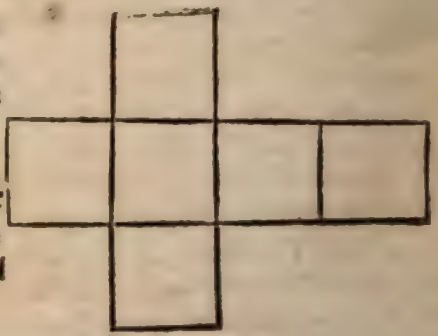


Figura. superficiei de corpore regulari sex basium ut in plano explicatur.

Talis figura excisa, & complicata Cubi soliditatem refert, seu corporis regularis sex superficierum.



Supficies corporis regularis octo basiū in plano expressa.

Talis figura excisa & cōplicata speciem corporum regulariū octo basium refert.

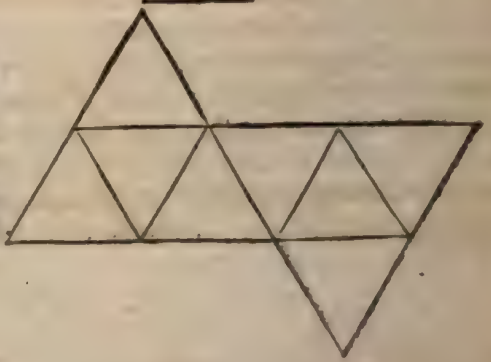


Figura ſuꝑficiei corporis regularis uigīti baſiū.

Talis figura, exciſa de papyro, & complicata, præbet figuræ ſolidæ regularis uigīti baſium uiſionē.

Sequitur ſuperficies corporis regularis duodecim baſium.

Talis figura exciſa & complicata oſtendet tibi quid ſit Corpus regulare duodecim baſium.

¶ Item dum inciperem ſcribere tertium librum, ſubijt animum meum recordatio de quodam iniquo monacho, qui nūc impiam ſuam uitam agit in Auſtria. Hæc ideo dico, qꝫ lector in præfata parte libri me cōmotum fuiſſe intelliget ſuper quadam diſceptatione habita cum monacho illo. Reputet igitur lector me illic uoluiſſe fabulā texere aut hiſtoriam, exēplo Ouidij in faſtis ſuis, modo hiſtorias intermiſcētis rebus ſuis ſeriis, modo fabulas, meꝫ (ſic inquā animo reputet lector) ob ingenij inopiā defeciſſe, atqꝫ conceptum argumentum ita intermiſiſſe.

mississe. Vale lector. Erratáq; mea hæc boni consule, & ista satisfactione mea benigne accepta excusa. Breui autem (deo dante) habebis per me nouã rationem calculandi operationes Algebricas lingua tamen Germanica. Iterum bene uale mi lector.

Vita Nova
di M. Sillitti
Latina - (B. Piave)
1970

Digitized by Google